Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

7.3 Bruchungleichungen

Die Vorzeichenregeln für die Division entsprechen völlig denen für die Multiplikation. Deshalb können wir das graphische Lösungsverfahren auch auf Bruchungleichungen anwenden, wenn wir sie auf Nullform bringen und Zähler und Nenner faktorisieren.

Beispiel:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x} \leqq \frac{x^2}{x^2-1} \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0; 1\}$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{x^2}{x^2-1} \leqq 0$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 + 2 - x^3}{x(x-1)(x+1)} \leqq 0$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} \leqq 0 \qquad L = [-2; -1[\cup]0; 1[$$

$x+2$	−	0	+		+		+		+
x	−		−		−		+		+
$x-1$	−		−		−		−		+
$x+1$	−		−		+		+		+
$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}$	+	0	−		+		−		+
x		-2		-1		0		1	

Abb. 171.1 Vorzeichenverteilung beim Term $\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}$.
Die roten Striche kennzeichnen die nicht zulässigen x-Werte.

Weil bei Bruchungleichungen Nenner auftreten, die null werden können, müssen wir auf die Definitionsmenge achten. Am besten streicht man beim graphischen Lösungsverfahren die nicht zulässigen x-Werte von vornherein weg.

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{x} < 0$ b) $\frac{2}{x+1} > 0$ c) $\frac{-7}{x-3} \geqq 0$

d) $\frac{1}{2x+5} > 0$ e) $\frac{-8}{3x+2} \geqq 0$ f) $\frac{1}{0{,}3x+1{,}2} > 0$

2. a) $\frac{x+1}{x-1} > 0$ b) $\frac{3-x}{x-5} < 0$ c) $\frac{2-3x}{3x-2} \leqq 0$

d) $\frac{2x-1}{1-x} \leqq 0$ e) $\frac{\frac{1}{2}x-3}{3x-\frac{1}{2}} < 0$ f) $\frac{1{,}2-0{,}3x}{0{,}9+3x} \geqq 0$

3. a) $\frac{1}{x} > -2$ b) $\frac{2}{x+2} < -3$ c) $\frac{x}{0{,}8-2x} > -\frac{1}{2}$

4. a) $\frac{1}{x(x+2)} > 0$ b) $\frac{-3}{(x-2)(x+3)} \geqq 0$

c) $\frac{-1}{x^2} > 0$ d) $\frac{3}{(x+3)^2} \geqq 0$

5. a) $\frac{x}{x^2-4} < 0$ b) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-6x+9} > 0$

c) $\frac{9x^2-16}{9x^2+16-24x} \leqq 0$ d) $\frac{\frac{1}{4}-x+x^2}{\frac{1}{4}-x^2} \geqq 0$

6. a) $\frac{x}{x-1} > 1$ b) $\frac{x+1}{x-1} \leqq 1$

c) $\frac{2x-1}{4x+2} \geqq -1$ d) $\frac{-0{,}2x+0{,}1}{3x+0{,}6} < 2$

7. a) $x < \frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{x+1} \geqq \frac{1}{x}$

c) $\frac{-1}{2x+1} < \frac{1}{1+2x}$ d) $\frac{-0{,}1}{x+0{,}2} \geqq \frac{0{,}2}{0{,}2x+1}$

8. a) $\frac{x}{x+2} \geqq \frac{2x}{2x+1}$ b) $\frac{6x}{x+1} \leqq \frac{6x+1}{x-1}$

c) $\frac{3x}{2-3x} > \frac{1-2x}{2x-1}$ d) $\frac{3x}{2-3x} \leqq \frac{1-2x}{2x+1}$

9. a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geqq 0$ b) $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \geqq 0$

c) $\frac{3+x}{x} + \frac{6}{3-x} \leqq 1$ d) $\frac{4x-1}{x+1} + \frac{4x+1}{x-1} < 8$

•10. a) $x + \frac{1}{x} \leqq \frac{x^2+2}{x} - 1$ b) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{1}{2+x} \geqq \frac{x^2+x}{(x-2)^2}$

c) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4} \geqq \frac{2}{x}$ d) $\frac{5x^2-6}{25x^2-4} + \frac{9-2\frac{1}{2}x}{15x^2-6x} < \frac{4x-5}{20x^2+8x} - \frac{1}{6x}$

11. a) $\dfrac{x}{x-a} \leqq 0$ **b)** $\dfrac{x}{x-a} \leqq 1$ **c)** $\dfrac{x}{x-a} \leqq a$

12. a) $1 > \dfrac{1}{x+3} > 0{,}1$ **b)** $\dfrac{1}{5} < \dfrac{2}{3x-5} < 2$

c) $-1 \leqq \dfrac{1}{x} \leqq 2$ **d)** $-10 < \dfrac{10}{2x+1} \leqq 5$

13. a) Für zwei von null verschiedene rationale Zahlen gelte $a < b$. Welche Beziehung besteht dann zwischen den Kehrwerten $\dfrac{1}{a}$ und $\dfrac{1}{b}$?

Hinweis: Multipliziere die gegebene Ungleichung mit $\dfrac{1}{ab}$ und beachte die nötigen Fallunterscheidungen.

b) Wende die Regeln aus **a** an für

1) $\dfrac{1}{x} > 1$ **2)** $\dfrac{1}{x} < -3$ **3)** $\dfrac{3}{2x} > 10$

4) $\dfrac{1}{x} < 1$ **5)** $\dfrac{1}{2x} > -3$ **6)** $\dfrac{1}{x-1} < 4$

7.4 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

Treten in Gleichungen bzw. Ungleichungen Absolutbeträge auf, so musst du immer eine Fallunterscheidung vornehmen. Dabei musst du, wie du weißt, danach unterscheiden, ob der Term zwischen den Betragsstrichen positiv, null oder negativ ist. Der Term zwischen den Betragsstrichen ist bekanntlich das Argument der Betragsfunktion.
Ist nun das Argument größer als 0 oder gleich 0, dann kannst du die Betragsstriche durch eine Plusklammer ersetzen. Ist das Argument hingegen kleiner als 0, dann musst du die Betragsstriche durch eine Minusklammer ersetzen, z. B.

$$|2x-3| = \begin{cases} (2x-3), & \text{falls} \quad 2x-3 \geqq 0, \\ -(2x-3), & \text{falls} \quad 2x-3 < 0. \end{cases}$$

Üblicherweise gibt man aber die Bedingungen $2x-3 \geqq 0$ und $2x-3 < 0$ als Bedingungen für x an und löst die Minusklammer im Kopf auf, nämlich

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{falls} \quad x \geqq \frac{3}{2}, \\ 3-2x, & \text{falls} \quad x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Die Zahl $\frac{3}{2}$ trennt die beiden Fälle. Sie ist aber auch die Nullstelle des Arguments. Es ist daher zweckmäßig, zuerst die Nullstelle des Arguments zu bestimmen, um mit ihrer Hilfe die Vorzeichenverteilung des Arguments ermitteln zu können.