Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

7.4 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

11. a) $\dfrac{x}{x-a} \leqq 0$ **b)** $\dfrac{x}{x-a} \leqq 1$ **c)** $\dfrac{x}{x-a} \leqq a$

12. a) $1 > \dfrac{1}{x+3} > 0{,}1$ **b)** $\dfrac{1}{5} < \dfrac{2}{3x-5} < 2$

c) $-1 \leqq \dfrac{1}{x} \leqq 2$ **d)** $-10 < \dfrac{10}{2x+1} \leqq 5$

13. a) Für zwei von null verschiedene rationale Zahlen gelte $a < b$. Welche Beziehung besteht dann zwischen den Kehrwerten $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$?

Hinweis: Multipliziere die gegebene Ungleichung mit $\frac{1}{ab}$ und beachte die nötigen Fallunterscheidungen.

b) Wende die Regeln aus **a** an für

1) $\dfrac{1}{x} > 1$ **2)** $\dfrac{1}{x} < -3$ **3)** $\dfrac{3}{2x} > 10$

4) $\dfrac{1}{x} < 1$ **5)** $\dfrac{1}{2x} > -3$ **6)** $\dfrac{1}{x-1} < 4$

7.4 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

Treten in Gleichungen bzw. Ungleichungen Absolutbeträge auf, so musst du immer eine Fallunterscheidung vornehmen. Dabei musst du, wie du weißt, danach unterscheiden, ob der Term zwischen den Betragsstrichen positiv, null oder negativ ist. Der Term zwischen den Betragsstrichen ist bekanntlich das Argument der Betragsfunktion.
Ist nun das Argument größer als 0 oder gleich 0, dann kannst du die Betragsstriche durch eine Plusklammer ersetzen. Ist das Argument hingegen kleiner als 0, dann musst du die Betragsstriche durch eine Minusklammer ersetzen, z. B.

$$|2x-3| = \begin{cases} (2x-3), & \text{falls } \ 2x-3 \geqq 0, \\ -(2x-3), & \text{falls } \ 2x-3 < 0. \end{cases}$$

Üblicherweise gibt man aber die Bedingungen $2x-3 \geqq 0$ und $2x-3 < 0$ als Bedingungen für x an und löst die Minusklammer im Kopf auf, nämlich

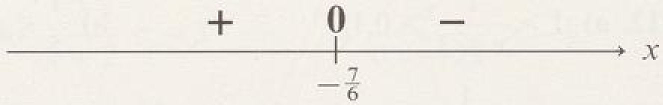
$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{falls } \ x \geqq \frac{3}{2}, \\ 3-2x, & \text{falls } \ x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Die Zahl $\frac{3}{2}$ trennt die beiden Fälle. Sie ist aber auch die Nullstelle des Arguments. Es ist daher zweckmäßig, zuerst die Nullstelle des Arguments zu bestimmen, um mit ihrer Hilfe die Vorzeichenverteilung des Arguments ermitteln zu können.

Beispiel 1: $|-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}|$

Nullstelle des Arguments: $-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}=0$

$$x=-\frac{7}{6}$$

Vorzeichenverteilung: 

Somit gilt:

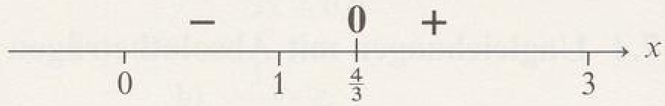
$$|-\tfrac{3}{5}x-\tfrac{7}{10}|=\begin{cases}-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}, & \text{falls} \quad x\leqq-\frac{7}{6},\\ \frac{3}{5}x+\frac{7}{10}, & \text{falls} \quad x>-\frac{7}{6}.\end{cases}$$

Beachte: An Stelle der Minusklammer $-(-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10})$ haben wir gleich $\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}$ geschrieben.

Kommen nun Absolutbeträge in Gleichungen oder Ungleichungen vor, dann musst du in den jeweiligen Vorzeichenbereichen die zugehörigen Gleichungen bzw. Ungleichungen lösen. Die Lösungsmenge der Betrags(un)gleichung ist dann die Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen. Zwei Beispiele mögen dir das veranschaulichen.

Beispiel 2: $|3x-4|\leqq 2x-1$

Vorzeichenverteilung: $3x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$.



1. Fall $\boxed{x<\frac{4}{3}}$

$$\begin{aligned} -3x+4&\leqq 2x-1\\ 5&\leqq 5x\\ 1&\leqq x \quad \Rightarrow \quad L_1=[1;\tfrac{4}{3}[\end{aligned}$$

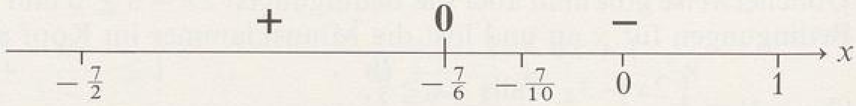
2. Fall $\boxed{x\geqq\frac{4}{3}}$

$$\begin{aligned} 3x-4&\leqq 2x-1\\ x&\leqq 3 \quad \Rightarrow \quad L_2=[\tfrac{4}{3};3] \end{aligned}$$

Somit gilt $L=L_1\cup L_2=[1;3]$.

Beispiel 3: $|-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}|>\frac{2}{5}x$

Vorzeichenverteilung: $-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{6}$



1. Fall $\boxed{x<-\frac{7}{6}}$

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{5}x-\tfrac{7}{10}&>\tfrac{2}{5}x\\ -x&>\tfrac{7}{10}\\ x&<-\tfrac{7}{10} \Rightarrow L_1=]-\infty;-\tfrac{7}{6}[,\\ &\text{da } -\tfrac{7}{6}<-\tfrac{7}{10}. \end{aligned}$$

2. Fall $\boxed{x \geqq -\frac{7}{6}}$ $\quad -(-\frac{3}{5}x - \frac{7}{10}) > \frac{2}{5}x$

$$\frac{1}{5}x > -\frac{7}{10}$$

$$x > -\frac{7}{2} \Rightarrow L_2 = [-\tfrac{7}{6}; +\infty[,$$

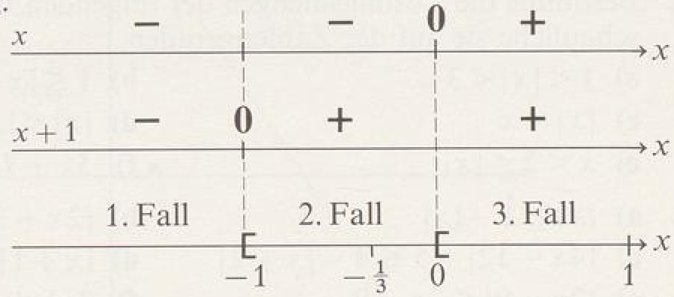
$$\text{da } -\tfrac{7}{2} < -\tfrac{7}{6}.$$

Somit gilt $L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{Q}$

Schwieriger wird es, wenn mehrere Absolutbeträge vorkommen. Dann musst du für jedes Argument die Vorzeichenverteilung feststellen und anschließend die Zahlengerade so in Intervalle einteilen, dass in keinem der Intervalle ein Argument das Vorzeichen ändert. Die Nullstellen der Argumente trennen die Intervalle. Wir wollen sie immer zum rechten Intervall dazunehmen. Dazu

Beispiel 4: $|x| - |x+1| > x$

Vorzeichenverteilung:



1. Fall $\boxed{x < -1}$

$$-x - (-x - 1) > x$$
$$-x + x + 1 > x$$
$$1 > x$$
$$x < 1 \quad \Rightarrow L_1 =]-\infty; -1[$$

2. Fall $\boxed{-1 \leqq x < 0}$

$$-x - (x + 1) > x$$
$$-x - x - 1 > x$$
$$-1 > 3x$$
$$x < -\tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow L_2 = [-1; -\tfrac{1}{3}[$$

3. Fall $\boxed{0 \leqq x}$

$$x - (x + 1) > x$$
$$x - x - 1 > x$$
$$-1 > x$$
$$x < -1 \quad \Rightarrow L_3 = \{\ \}$$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty; -\tfrac{1}{3}[.$$

Aufgaben

1. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a) $|x| = 0$ **b)** $|x| = 1$ **c)** $|x| = -3{,}75$ **d)** $|x| = |-2\frac{3}{7}|$

e) $|x| - 8 = 11$ **f)** $3 - |x| = 7$ **g)** $2 \cdot |x| + 5 = 9$ **h)** $5 + |3x| = 5$

i) $|x-1| = 1{,}5$ **k)** $|x+4| = 6$ **l)** $|2x+5| = 0$ **m)** $|9-7x| = 30$

2. Welche Punktmengen auf der Zahlengeraden werden durch die folgenden Ungleichungen beschrieben?

a) $|x| < 1$ **b)** $|x| \geqq 2$ **c)** $|x-3| \leqq 1$ **d)** $|4x+10| > 5$

3. **a)** $|2x-1| < 5x$ **b)** $|x+1| \geqq 2x-1$

c) $2 \cdot |x-0{,}5| \leqq 2x+1{,}5$ **d)** $-|3-x| > 3-x$

e) $-3 \cdot |\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}| > 10 - x$ **f)** $-2{,}5 \cdot |2x-1{,}2| \leqq 10-2x$

4. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen und veranschauliche sie auf der Zahlengeraden.

a) $1 < |x| < 3$ **b)** $1 \leqq |x-3| \leqq 4$

c) $|x| < x$ **d)** $|x| < |x+3|$

e) $x < 2 < |x|$ •**f)** $5x+7 > |2x-4| \geqq x-1$

5. **a)** $|x| \geqq 1 - |x|$ **b)** $|2x+3| \geqq |3x-2|$

c) $|4x-12| + 5 \leqq 4 - |x+2|$ **d)** $|x+1| \geqq x + |x-1|$

e) $|2x-9| \leqq 2x-9$ **f)** $3 \cdot |x| + 2x + 1 \leqq 2 - |2x-6|$

6. **a)** $|x| + |x+1| \geqq x+2$ **b)** $|x| - |x+1| \geqq x+2$

c) $-|x| + |x+1| \geqq x+2$ **d)** $-|x| - |x+1| \geqq x+2$

•**7.** **a)** $|x+2| - |2x-1| < 2x$

b) $|\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}| - 2 \cdot |\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

c) $|2{,}5 - 1{,}2x| + |2{,}4x + 7{,}5| \geqq 3{,}6x + 1{,}5$

••**8.** **a)** $|x| + |x+1| - |x+2| > 0$

b) $|x-1{,}5| + |2x-5| - |3x+6| \leqq 4x - 2{,}5$

c) $|\frac{1}{4}x + 1| - |x + \frac{1}{4}| \geqq |\frac{2}{3}x + 1| - |x + \frac{2}{3}|$