Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

7.5.1 Graphische Lösung einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

7.5 Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

7.5.1 Graphische Lösung einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen lässt sich geometrisch in einem Koordinatensystem als Menge von Punkten deuten, die auf einer Geraden liegen. So ergibt sich als Lösungsmenge für die Gleichung $3x + 2y - 12 = 0$ die Gerade der Abbildung 177.1.

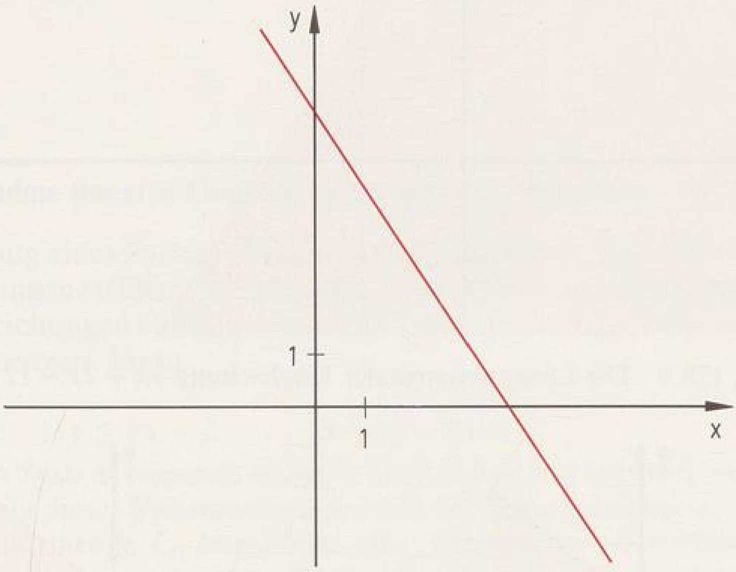

Abb. 177.1 Die Lösungsmenge der Gleichung $3x + 2y - 12 = 0$

Nun betrachten wir statt dieser Gleichung eine Ungleichung, zum Beispiel $3x + 2y - 12 \leqq 0$. Wie sieht in diesem Fall das geometrische Bild der Lösungsmenge aus? Am leichtesten lässt sich diese Frage beantworten, wenn man die Ungleichung nach y auflöst. Wir erhalten als neue Ungleichung $y \leqq -\frac{3}{2}x + 6$. Wegen des $=$-Zeichens sind die Punkte der Geraden von Abbildung 177.1 auch Lösung dieser Ungleichung; so ist z. B. $(2|3)$ ein Lösungspunkt. Wegen des $<$-Zeichens ist dann auch jeder Punkt $(2|y)$ mit $y < 3$, d. h. jeder Punkt, der unterhalb des Geradenpunkts $(2|3)$ liegt, ein Lösungspunkt der Ungleichung (Abbildung 178.1). Weil die für den Punkt $(2|3)$ angestellte Überlegung für jeden Geradenpunkt richtig ist, können wir sagen: Die Lösungsmenge der Ungleichung $y \leqq -\frac{3}{2}x + 6$ ist die Menge aller Punkte unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}x + 6$ und die Gerade selbst. Eine solche Punktmenge heißt **Halbebene**.
Bei der Ungleichung $y < -\frac{3}{2}x + 6$ gehört die Randgerade natürlich nicht zur Lösungsmenge. Ersetzt man $<$ durch $>$, dann sind die oberhalb der Geraden gelegenen Punkte Lösungspunkte. Einen Überblick über die möglichen vier Fälle gibt dir Abbildung 178.2.

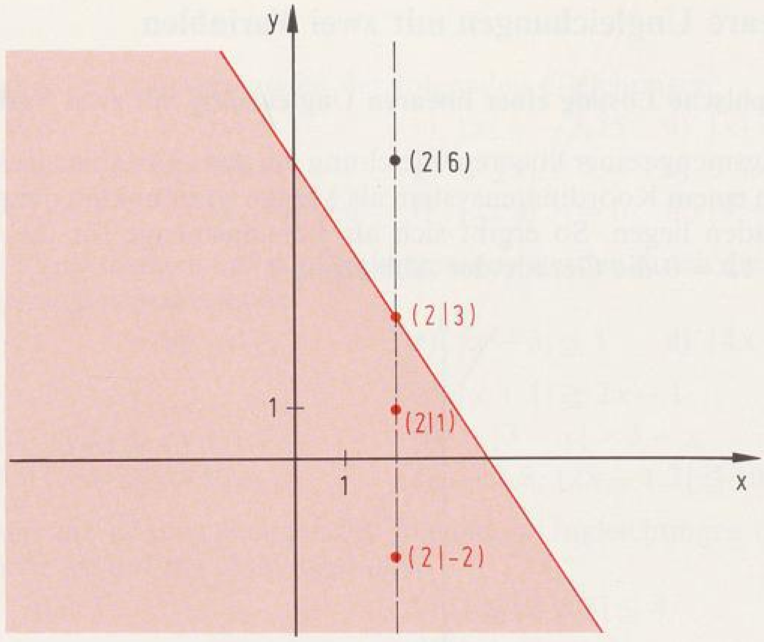

Abb. 178.1 Die Lösungsmenge der Ungleichung $3x + 2y - 12 \leqq 0$

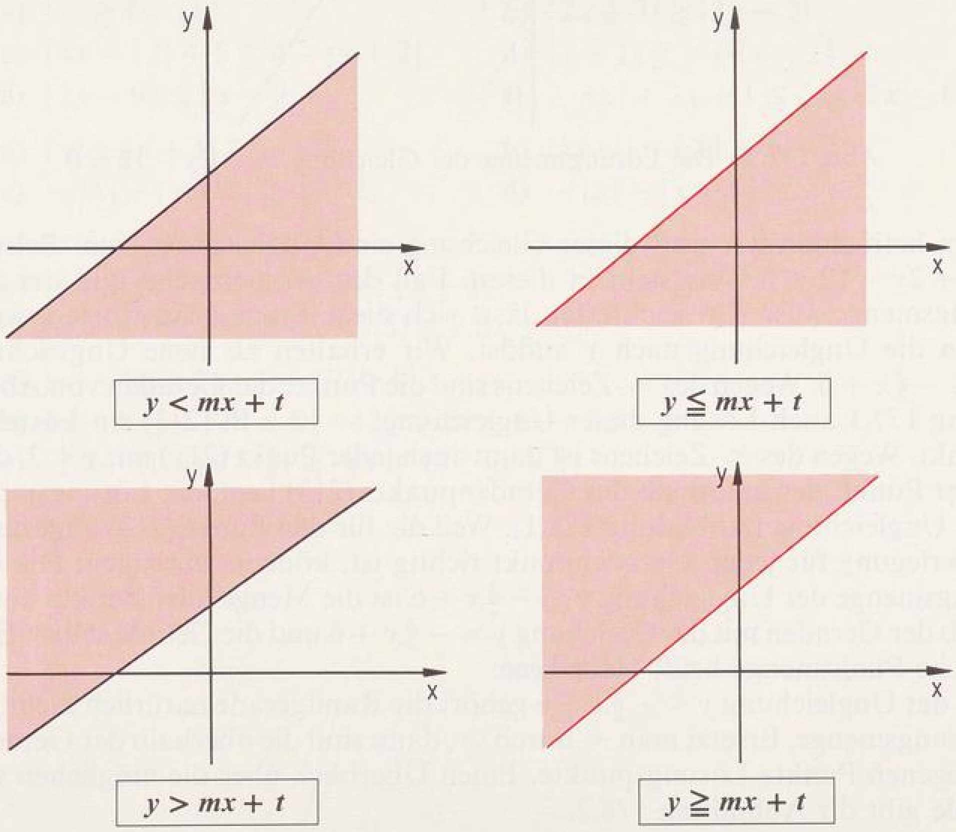

Abb. 178.2 Die Lösungsmengen der Ungleichungen $y \lesseqgtr mx + t$

Aufgaben

Zeichne die Lösungsmenge!

1. **a)** $y < x + 3$ **b)** $y \leqq -\frac{1}{2}x$ **c)** $y > 2x - 5$ **d)** $y \geqq -\frac{3}{4}x + 4$

2. **a)** $y < 2$ **b)** $y \geqq -3$ **c)** $x < 0$ (!) **d)** $x \geqq -2$ (!)

3. **a)** $x + y < 0$ **b)** $2x + 4y - 6 \geqq 0$
c) $-3x + 2y + 4 < 0$ **d)** $\frac{3}{2}x - \frac{6}{5}y - 1\frac{2}{5} > 0$

7.5.2 Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen

Eine Lösung eines Systems linearer Ungleichungen muss jede einzelne dieser Ungleichungen erfüllen. Sie muss also in jeder der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen enthalten sein und damit auch in der Schnittmenge dieser Lösungsmengen. Dazu

Beispiel 1: I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$ II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$
ist ein System von zwei linearen Ungleichungen mit zwei Variablen. Eine Lösung dieses Systems muss sowohl der Lösungsmenge L_1 wie auch der Lösungsmenge L_{II} angehören, also Element der Schnittmenge $L_I \cap L_{II}$ sein. In der geometrischen Deutung ist die Lösungsmenge des Systems die Schnittmenge der beiden Halbebenen L_I und L_{II}. (Abbildung 179.1)

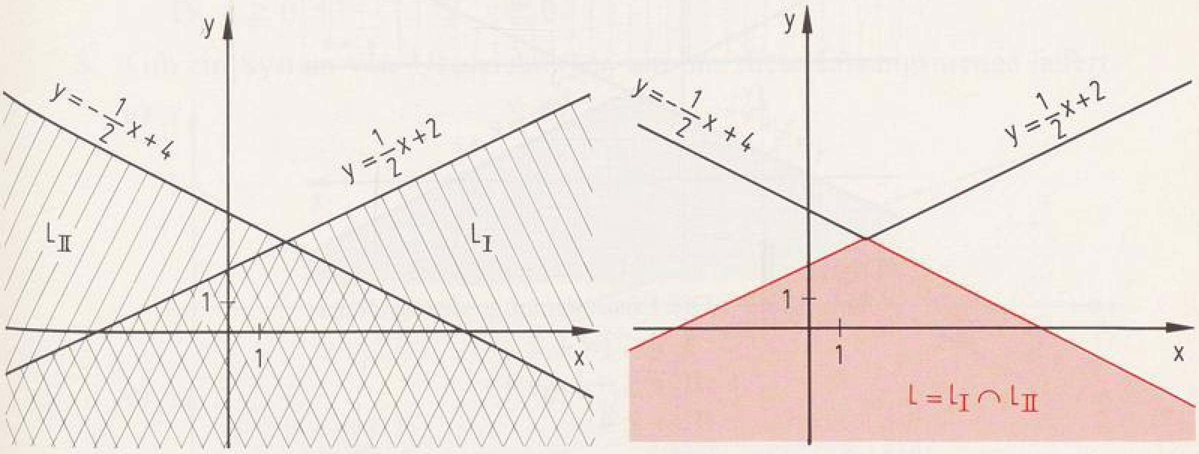

Abb. 179.1 Die Lösungsmenge des Systems von Beispiel 1 als Schnittmenge der Teil-Lösungsmengen

Auch bei einem System mit mehr als zwei Ungleichungen erhält man die Lösungsmenge als Schnittmenge aller Teil-Lösungsmengen, geometrisch als Schnittmenge aller Lösungs-Halbebenen. Es entsteht dabei entweder eine