Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

7.5.2 Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen

Aufgaben

Zeichne die Lösungsmenge!

1. **a)** $y < x + 3$ **b)** $y \leqq -\frac{1}{2}x$ **c)** $y > 2x - 5$ **d)** $y \geqq -\frac{3}{4}x + 4$

2. **a)** $y < 2$ **b)** $y \geqq -3$ **c)** $x < 0$ (!) **d)** $x \geqq -2$ (!)

3. **a)** $x + y < 0$ **b)** $2x + 4y - 6 \geqq 0$
c) $-3x + 2y + 4 < 0$ **d)** $\frac{3}{2}x - \frac{6}{5}y - 1\frac{2}{5} > 0$

7.5.2 Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen

Eine Lösung eines Systems linearer Ungleichungen muss jede einzelne dieser Ungleichungen erfüllen. Sie muss also in jeder der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen enthalten sein und damit auch in der Schnittmenge dieser Lösungsmengen. Dazu

Beispiel 1: I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$ II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$

ist ein System von zwei linearen Ungleichungen mit zwei Variablen. Eine Lösung dieses Systems muss sowohl der Lösungsmenge L_1 wie auch der Lösungsmenge L_{II} angehören, also Element der Schnittmenge $L_I \cap L_{II}$ sein. In der geometrischen Deutung ist die Lösungsmenge des Systems die Schnittmenge der beiden Halbebenen L_I und L_{II}. (Abbildung 179.1)

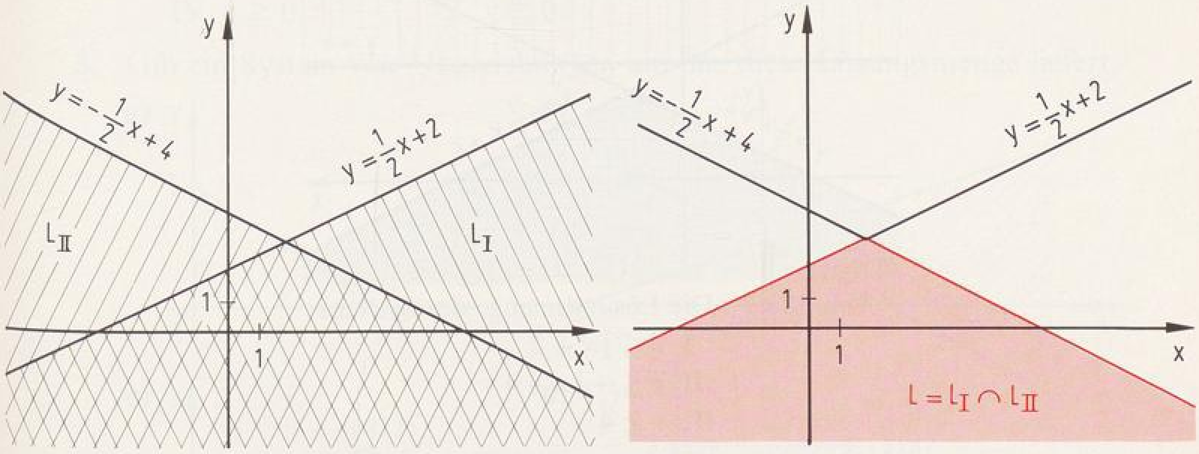


Abb. 179.1 Die Lösungsmenge des Systems von Beispiel 1 als Schnittmenge der Teil-Lösungsmengen

Auch bei einem System mit mehr als zwei Ungleichungen erhält man die Lösungsmenge als Schnittmenge aller Teil-Lösungsmengen, geometrisch als Schnittmenge aller Lösungs-Halbebenen. Es entsteht dabei entweder eine konvexe Polygonfläche* (siehe Abbildung 180.1) oder eine konvexe Punktmenge, die sich ins Unendliche erstreckt (siehe Abbildung 179.1) oder die leere Menge (siehe Abbildung 180.2).

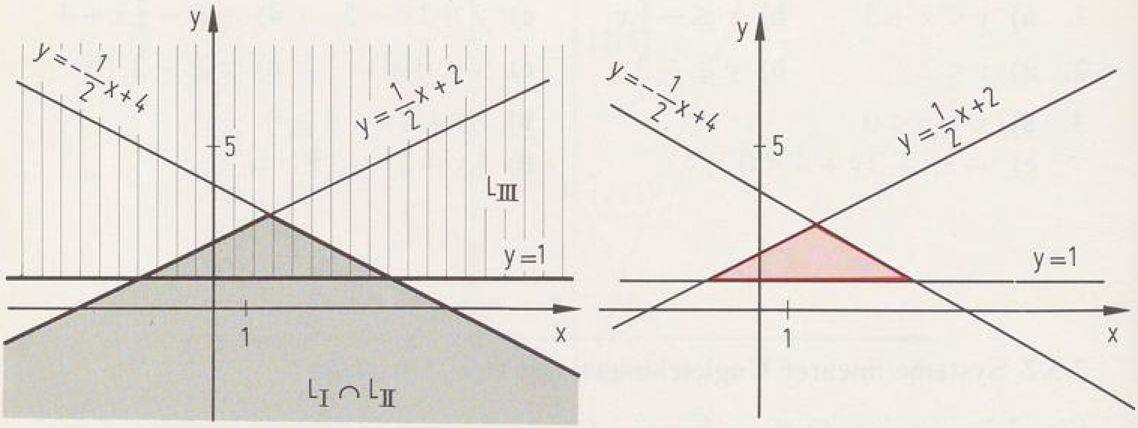


Abb. 180.1 Die Lösungsmenge des Systems

I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$

II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$

III $y \geqq 1$

ist die rote Dreiecksfläche.

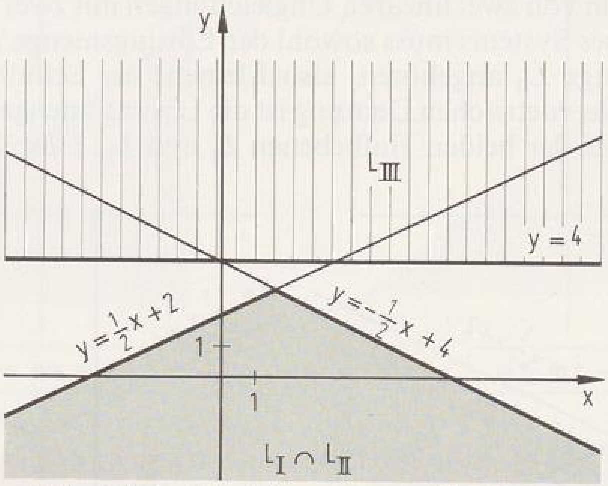


Abb. 180.2 Die Lösungsmenge des Systems

I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$

II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$

III $y \geqq 4$

ist leer.

* Aus πολύς (polýs) = *viel* und dem ionischen ἡ γωνία (he gonía) = der *Winkel, die Ecke* wurde in nachklassischer Zeit, d. h. nach 300 v. Chr., das Kunstwort τὸ πολύγωνον (to polýgonon) = *das Vieleck* geprägt. *convexus* (lat.) = *kesselförmig, gewölbt*. Ein Vieleck heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger innerer Punkte ganz im Inneren des Vielecks liegt.

Je mehr Ungleichungen das System hat, desto mehr Ecken hat im Normalfall die entstehende Polygonfläche. Dazu

Beispiel 2:

I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$
II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$
III $y \leqq -x + 6$
IV $y \geqq 0$
V $x \geqq 0$

Die Lösungsmenge, eine Fünfecksfläche, zeigt Abbildung 181.1.

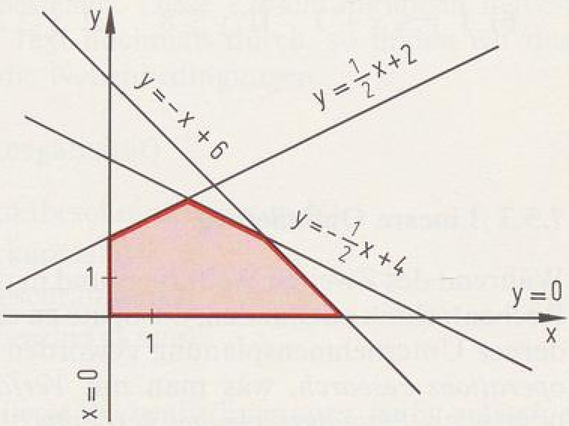


Abb. 181.1 Zum Beispiel 2

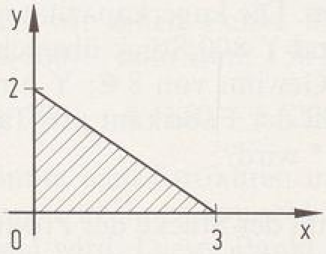
Aufgaben

1. **a)** I $y \leqq 3x + 5$ II $y \geqq -2x$
b) I $x + y \geqq 0$ II $x - y \leqq 0$
c) I $2x - y + 3 < 0$ II $-3x + 5y < 10$
d) I $-x + 2y \leqq 2$ II $x - y > 3$

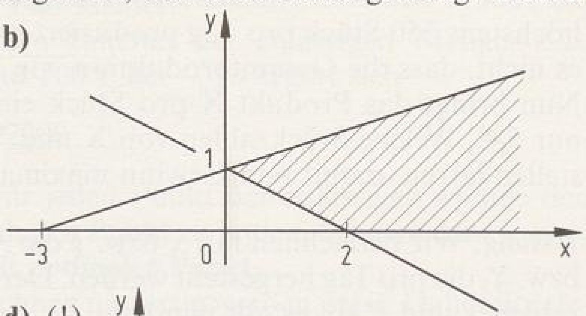
2. **a)** I $y \leqq \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ II $y \geqq -x - 1$ III $y \geqq x$
b) I $2x - y + 2 \geqq 0$ II $x - 2y - 2 \leqq 0$ III $y + 3 \geqq 0$
c) I $y \leqq 2x + 6$ II $3y \leqq -4x + 12$ III $y \leqq -\frac{1}{3}x$
IV $y \geqq -6$ V $x \leqq 6$
d) I $y + x - 2 \geqq 0$ II $y - 2x + 10 \geqq 0$ III $3y - x + 18 \leqq 0$
IV $y \geqq 0$ V $x \geqq 0$

3. Gib ein System von Ungleichungen an, das diese Lösungsmenge liefert.

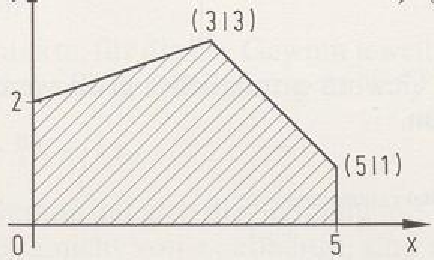
a)



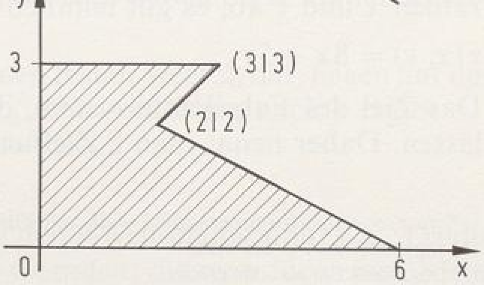
b)



c)



d) (!)



• **4.** Bestimme alle Lösungspunkte, deren Koordinaten natürliche Zahlen sind.
a) I $2x - y + 2 \geqq 0$ II $x - 2y - 2 \leqq 0$ III $x + y - 5 \leqq 0$
b) I $y \leqq x + 3$ II $y \leqq 8$ III $y \geqq 2x - 4$ IV $y \geqq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ V $x \geqq 1$

7.5.3 Lineare Optimierung

Während des Zweiten Weltkriegs und in den darauf folgenden Jahren ist eine Rechentechnik entstanden, die heute zu einem sehr wichtigen Hilfsmittel moderner Unternehmensplanung geworden ist. Im Englischen nannte man sie *operations research*, was man mit *Verfahrensforschung*, *Verfahrensplanung* oder auch *Planungsrechnung* verdeutschte. G. B. Dantzig hat im Wesentlichen dieses neue Gebiet der Mathematik begründet; er nannte es 1949 *Lineares Programmieren*, da man schematisch mittels so genannter Programme* Lösungen von linearen Gleichungen und Ungleichungen sucht. Heute spricht man lieber von *linearer Optimierung***, weil man im Grunde die beste aller möglichen Lösungen sucht. Zur Verdeutlichung und Einführung betrachten wir das einfache, aber doch schon genügend aussagekräftige

Beispiel 1:

Ein Betrieb stellt zwei verschiedene Produkte X und Y her. Für die Anfertigung von einem Stück X benötigt man 5 Std. und verbraucht Material im Wert von 5 €, wohingegen ein Y Material im Wert von 0,60 € und eine Herstellungszeit von 6 Std. benötigt. Pro Tag können bis zu 4000 Arbeitsstunden von der Belegschaft geleistet werden. Der Finanzplan erlaubt es, täglich bis zu 1500 € Material einzukaufen. Aus technischen Gründen können von Y höchstens 550 Stück pro Tag produziert werden. Die Lagerkapazität erlaubt es nicht, dass die Gesamtproduktion von X und Y 800 Stück überschreitet. Nun bringt das Produkt X pro Stück einen Gewinn von 8 €, Y hingegen nur 5 €. Welche Stückzahlen von X und Y soll der Fabrikant pro Tag herstellen lassen, damit sein Gewinn maximal *** wird?

Lösung: Wir bezeichnen mit x bzw. y die Anzahl der Stücke des Produkts X bzw. Y, die pro Tag hergestellt werden. Der Gewinn z hängt von diesen Stückzahlen x und y ab; es gilt nämlich

$$z(x, y) = 8x + 5y.$$

Das Ziel des Fabrikanten ist es, den Gewinn z möglichst groß werden zu lassen. Daher nennt man z **Zielfunktion**.

* *τὸ πρόγραμμα* (to prógramma) = die schriftliche Bekanntmachung
** optimus (lat.) = der beste
*** maximus (lat.) = der größte