Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

2.2.3 Divisionsverfahren

Man kann zeigen, dass dies immer so ist (vgl. Aufgaben 44/**4** und 45/**7**). Da S die Koordinaten $(\sqrt{a}|\sqrt{a})$ hat, strebt die Zahlenfolge $x_2, x_3, x_4, \ldots$ immer monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ (vgl. Aufgabe 45/**5**).

**2.2.3 Divisionsverfahren

Es gibt einen interessanten Algorithmus*, bei dem – ähnlich wie beim Intervallschachtelungsverfahren – die einzelnen Ziffern der Dezimalentwicklung einer Wurzel nacheinander berechnet werden, wobei aber der wesentliche Schritt bei der Bestimmung einer Dezimalen im Ausführen einer Division besteht.
Zunächst eine einfache Vorüberlegung zur Größe von $\sqrt{a}$. Es gilt

$1 \leqq a < 100 \Rightarrow 1 \leqq \sqrt{a} < 10$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 1 Stelle vor dem Komma

$100 \leqq a < 10000 \Rightarrow 10 \leqq \sqrt{a} < 100$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 2 Stellen vor dem Komma

$10^4 \leqq a < 10^6 \Rightarrow 10^2 \leqq \sqrt{a} < 10^3$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 3 Stellen vor dem Komma
usw.

Daraus folgt: Die Zahl der Stellen, die bei der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{a}$ mit $a > 1$ vor dem Komma stehen, ergibt sich, indem man den Radikanden a vom Komma aus nach links in Zweiergruppen einteilt.

Beispiele: $\sqrt{13|67{,}5}$ hat 2 Stellen vor dem Komma.

$\sqrt{6|15|34}$ hat 3 Stellen vor dem Komma.

$\sqrt{10|47|69{,}824}$ hat 3 Stellen vor dem Komma.

Eine entsprechende Regel lässt sich auch für Radikanden zwischen 0 und 1 aufstellen (Aufgabe 46/**10**).
Zur Erklärung des Divisionsverfahrens betrachten wir zunächst das einfache

Beispiel 1: Berechnung von $\sqrt{1369}$
Das Ergebnis ist eine Zahl mit 2 Stellen vor dem Komma, also $\sqrt{13|69} = \_\ \_, \ldots$

a) Bestimmung der ersten Ziffer
Man sucht die größte Ziffer, deren Quadrat kleiner oder gleich 13 ist; Ergebnis 3.
Begründung: Der Radikand enthält 13 Hunderter (1. Zifferngruppe von links), liegt also zwischen 900 und 1600. Daher muss die Wurzel einen zwischen 30 und 40 liegenden Wert haben.

b) Bestimmung der nächsten Ziffer
Aus dem Ansatz $\sqrt{1369} = 30 + r$ mit $0 \leqq r < 10$
folgt
$$1369 = (30 + r)^2$$
$$1369 = 900 + 60r + r^2$$
$$469 = (60 + r)r$$

* Algorithmus = Rechenverfahren. Das Wort Algorithmus entstand aus *algorismus*, einer Verballhornung des Namens AL-CHARIZMI, der in Vergessenheit geraten war, sodass man unter *algorismus* die *Lehre vom Rechnen* verstand. Erst 1849 hat der Orientalist Joseph-Toussaint REINAUD den Ursprung dieses Wortes erkannt.

Der ganzzahlige Teil von r ist die gesuchte Einerziffer. Um sie zu bestimmen bringen wir die letzte Gleichung auf die Form $469 : (60 + r) = r$. Da der Divisor $60 + r$ zwischen 60 und 70 liegt, kann r nur 7 Ganze enthalten; denn $8 \cdot 60 > 469$ und $6 \cdot 70 < 469$.

Somit gilt: $\sqrt{1369} = 37, \ldots$

c) Bestimmung eventueller weiterer Stellen

Aus dem Ansatz $\sqrt{1369} = 37 + s$ mit $0 \leqq s < 1$

folgt
$$\begin{aligned} 1369 &= (37 + s)^2 \\ 1369 &= 1369 + 74s + s^2 \\ 0 &= (74 + s)s \end{aligned}$$

Wegen $s \geqq 0$ folgt daraus $s = 0$.

Wir erhalten somit das Ergebnis: $\sqrt{1369} = 37$.

Die hier durchgeführte Rechnung lässt sich in einer sehr kurzen Niederschrift darstellen; zu Beginn des Schrittes **b** sieht sie etwa so aus:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{13|69} = 3\square, & & \\ \underline{-9} & & (3^2 = 9) \\ 469 & & \\ & 6\square \cdot \square & (3 \cdot 2 = 6) \end{array}$$

Die drei roten Kästchen müssen nun mit derselben Ziffer besetzt werden! Ein Schätzwert für diese ergibt sich aus der Rechnung $46 : 6 \approx 7$. Wegen $67 \cdot 7 \leqq 469$ ist 7 die richtige Einerziffer. Die vollständige Rechnung lautet damit

$$\begin{array}{ll} \sqrt{13|69} = 37, & \\ \underline{-9} & \\ 469 & \\ \underline{-469} & 67 \cdot 7 \\ 0 & \end{array}$$

Da der neue Rest 0 beträgt, ist die Rechnung beendet.

Solange die bei diesem Divisionsverfahren auftretenden Reste positiv sind, kann man die Rechnung fortsetzen und wie bei **b** die nächste Ziffer ermitteln. Dies gilt auch beim Überschreiten des Kommas. Dazu das

Beispiel 2: Berechnung von $\sqrt{40{,}9}$

Das Ergebnis hat 1 Stelle vor dem Komma: $\sqrt{40{,}9} = 6, \ldots$

Aus dem Ansatz $\sqrt{40{,}9} = 6 + r$ mit $0 \leqq r < 1$

folgt
$$\begin{aligned} 40{,}9 &= 36 + 12r + r^2 \\ 4{,}9 &= (12 + r)r \end{aligned}$$

Die gesuchte nächste Ziffer ist nun der ganzzahlige Teil von $10r$. Wir führen deshalb $r' = 10r$ ein. Dazu multiplizieren wir beide Faktoren auf der rechten Seite mit 10, die ganze Gleichung also mit 100:

$$490 = (120 + r')r'$$

also
$$490 : (120 + r') = r'.$$

Als ganzzahliger Teil von r' ergibt sich daraus nicht 4, sondern 3. Somit gilt: $\sqrt{40{,}9} = 6{,}3\ldots$

Ganz entsprechend verfährt man bei der Bestimmung weiterer Ziffern. Die Kurzform der Rechnung sieht dann so aus:

$$
\begin{array}{rrr|l}
\sqrt{40{,}9} = \sqrt{40{,}90\,00\,00\ldots} = 6{,}395\ldots & & & \\
-36 & & & (6^2 = 36) \\
\hline
4\,90 & & & \\
-3\,69 & 123 \cdot 3 & & (6 \cdot 2 = 12) \\
\hline
1\,21\,00 & & & \\
-1\,17\,21 & 1269 \cdot 9 & & (63 \cdot 2 = \underline{126} = 123 + 3) \\
\hline
6\,79\,00 & & & \\
-6\,39\,25 & 12785 \cdot 5 & & (639 \cdot 2 = \underline{1278} = 1269 + 9) \\
\hline
39\,75 & & &
\end{array}
$$

Man rechnet so lange, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

** Zur Geschichte

Das angegebene Divisionsverfahren hat 1540 Reinerus Gemma Frisius (1508–1555) in seiner um 1536 geschriebenen *Arithmeticae practicae methodus facilis* veröffentlicht.

Aufgaben

1. Bei der Berechnung von $\sqrt{31}$ nach dem Intervallschachtelungsverfahren erhält man [5; 6] als erstes und [5,5; 5,6] als zweites Intervall. Muss man zur Bestimmung des nächsten Intervalls die Quadrate aller Zwischenwerte 5,51; 5,52; …; 5,59 berechnen? Wie viele Quadrate sind bei geschicktem Vorgehen höchstens notwendig? Wie heißt das dritte Intervall für $\sqrt{31}$?

2. Das fünfte Intervall der Schachtelung für $\sqrt{21{,}8}$ heißt [4,6690; 4,6691]. Wie entscheidet man am einfachsten, ob der auf vier Stellen nach dem Komma gerundete Wert von $\sqrt{21{,}8}$ mit der linken oder mit der rechten Intervallgrenze übereinstimmt?

3. Berechne nach dem Iterationsverfahren (I) die Näherungswerte x_2 bis x_5 für

   a) $\sqrt{13}$ und $x_1 = 3$, b) $\sqrt{13}$ und $x_1 = 4$,

   c) $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2$, d) $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2{,}5$,

   e) $\sqrt{3987}$ und $x_1 = 60$, f) $\sqrt{0{,}95}$ und $x_1 = 1$.

4. Zeichne den Graphen der zur Berechnung von $\sqrt{8}$ gehörenden Iterationsfunktion $x \mapsto \left(x + \frac{8}{x}\right) : 2$ im Intervall $0 < x \leqq 10$ und veranschauliche das Iterationsverfahren wie in Abbildung 41.2. Verwende dabei als (sehr schlechten!) Anfangswert zuerst 10, dann 0,5.