Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

Zur Geschichte

Als ganzzahliger Teil von r' ergibt sich daraus nicht 4, sondern 3. Somit gilt: $\sqrt{40{,}9} = 6{,}3\ldots$

Ganz entsprechend verfährt man bei der Bestimmung weiterer Ziffern. Die Kurzform der Rechnung sieht dann so aus:

$$\sqrt{40{,}9} = \sqrt{40{,}90\,00\,00\ldots} = 6{,}395\ldots$$

$$\begin{array}{rrl}
-36 & & (6^2 = 36) \\
\hline
4\,90 & & \\
-3\,69 & \underline{123 \cdot 3} & (6 \cdot 2 = 12) \\
\hline
1\,21\,00 & & \\
-1\,17\,21 & \underline{1269 \cdot 9} & (63 \cdot 2 = \underline{126} = 123 + 3) \\
\hline
6\,79\,00 & & \\
-6\,39\,25 & \underline{12785 \cdot 5} & (639 \cdot 2 = \underline{1278} = 1269 + 9) \\
\hline
39\,75 & &
\end{array}$$

Man rechnet so lange, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

** Zur Geschichte

Das angegebene Divisionsverfahren hat 1540 Reinerus Gemma Frisius (1508–1555) in seiner um 1536 geschriebenen *Arithmeticae practicae methodus facilis* veröffentlicht.

Aufgaben

1. Bei der Berechnung von $\sqrt{31}$ nach dem Intervallschachtelungsverfahren erhält man [5; 6] als erstes und [5,5; 5,6] als zweites Intervall. Muss man zur Bestimmung des nächsten Intervalls die Quadrate aller Zwischenwerte 5,51; 5,52; …; 5,59 berechnen? Wie viele Quadrate sind bei geschicktem Vorgehen höchstens notwendig? Wie heißt das dritte Intervall für $\sqrt{31}$?

2. Das fünfte Intervall der Schachtelung für $\sqrt{21{,}8}$ heißt [4,6690; 4,6691]. Wie entscheidet man am einfachsten, ob der auf vier Stellen nach dem Komma gerundete Wert von $\sqrt{21{,}8}$ mit der linken oder mit der rechten Intervallgrenze übereinstimmt?

3. Berechne nach dem Iterationsverfahren (I) die Näherungswerte x_2 bis x_5 für

   a) $\sqrt{13}$ und $x_1 = 3$, b) $\sqrt{13}$ und $x_1 = 4$,

   c) $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2$, d) $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2{,}5$,

   e) $\sqrt{3987}$ und $x_1 = 60$, f) $\sqrt{0{,}95}$ und $x_1 = 1$.

4. Zeichne den Graphen der zur Berechnung von $\sqrt{8}$ gehörenden Iterationsfunktion $x \mapsto \left(x + \dfrac{8}{x}\right) : 2$ im Intervall $0 < x \leqq 10$ und veranschauliche das Iterationsverfahren wie in Abbildung 41.2. Verwende dabei als (sehr schlechten!) Anfangswert zuerst 10, dann 0,5.

5. Beweise, dass die Gerade $y = x$ die Kurve $y = \left(x + \frac{a}{x}\right) : 2,\ x > 0$, im Punkt $S(\sqrt{a}\,|\,\sqrt{a})$ schneidet.

•6. Die halbe Summe zweier Zahlen bezeichnet man als ihr **arithmetisches Mittel***; die Wurzel aus dem Produkt zweier positiver Zahlen heißt **geometrisches Mittel***. Weise nach, dass das geometrische Mittel zweier Zahlen stets kleiner oder gleich ihrem arithmetischen Mittel ist.

7. a) Bilde das geometrische Mittel der in der Formel des Iterationsverfahrens (I) vorkommenden Zahlen x_n und $\frac{a}{x_n}$. Zeige, dass für $x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2$ stets die Ungleichung $x_{n+1} \geqq \sqrt{a}$ gilt ($n \in \mathbb{N}$).

b) Bestätige die Beziehung $x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n}$ und begründe damit die Ungleichungen $x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq \ldots$

c) Die aus zwei positiven Zahlen u und v gebildete Zahl $\frac{2uv}{u+v}$ bezeichnet man als **harmonisches Mittel*** von u und v.
Beweise, dass für die beim Iterationsverfahren (I) auftretenden Zahlenpaare $\left(x_1 \,\middle|\, \frac{a}{x_1}\right), \left(x_2 \,\middle|\, \frac{a}{x_2}\right), \left(x_3 \,\middle|\, \frac{a}{x_3}\right), \ldots$ gilt:
Das arithmetische Mittel der Zahlen eines Paars ist die erste Zahl des nächsten Paars. Das harmonische Mittel der Zahlen eines Paars ist die zweite Zahl des nächsten Paars.

* Archytas, der als Staatsmann, Feldherr, pythagoreischer Philosoph und Mathematiker um 375 v. Chr. in Tarent wirkte, sagt, dass es in der Musik drei Mittel gebe, und zwar die μέση ἀριθμητική (mese arithmetikē), das arithmetische Mittel, für das $u - m = m - v$ gilt, die μέση γεωμετρική (mese geometrikē), das geometrische Mittel, für das $u : m = m : v$ gilt, und schließlich die μέση ὑπεναντίη (mese hypenantíe), das konträre oder entgegengesetzte Mittel, das auch μέση ἁρμονική (mese harmonikē), harmonisches Mittel, genannt wird und für das $(u - m) : u = (m - v) : v$ gilt. Hippasos (Mitte 5. Jh. v. Chr.) soll, anderen Berichten zufolge, als erster den Ausdruck harmonisches Mittel gebraucht haben. Löst man jeweils nach m auf, dann erhält man die bekannten Ausdrücke $\frac{u+v}{2}$ bzw. $\sqrt{uv}$ bzw. $\frac{2uv}{u+v}$.

Die Mittel ergeben sich aus Sonderfällen von Proportionen. Setzt man nämlich in der arithmetischen Proportion $a - b = c - d$ bzw. in der geometrischen Proportion $a : b = c : d$ die Innenglieder b und c gleich, dann erhält man mit den Außengliedern u und v die oben angegebenen stetigen oder fortlaufenden Proportionen (siehe Seite 99) $u - m = m - v$ bzw. $u : m = m : v$. Allmählich wurde es Brauch, eine solche dreigliedrige stetige Proportion μεσότης (mesótes) = *Mittelheit* zu nennen. Euklid (um 300 v. Chr.) verwendet nur die geometrische Proportion. In Buch VI, Satz 13 der *Elemente* nennt er $\sqrt{uv}$ *mittlere proportionale Größe* (μέσον μέγεθος ἀνάλογον [méson mégethos análogon]), was Johannes de Sacro Bosco (1200–1256) mit *medium proportionale* übersetzt. Johannes Widmann von Eger (um 1460–nach 1500) bildet 1489 in seinem Rechenbuch dafür *eyn mittel zal* und Johann Scheybl (1494–1570) in seiner Euklidübersetzung *Das sibend/acht und neunt buch des hochberümbten Mathematici Euclidis Megarensis* von 1555 das *mittel proportional zwaier zalen* oder kurz *mittel*. Den Ausdruck *geometrisches Mittel* hat anscheinend 1808 Georg Simon Klügel (1739–1812) in seinem *Mathematischen Wörterbuch* geprägt. Bei Johannes Kepler (1571–1630) findet man 1615 *medium arithmeticum* in seiner *Nova Stereometria doliorum vinariorum* – »Neue Raummesskunst für Weinfässer« –, die Eindeutschung *arithmetisches Mittel* erst im 1. Viertel des 19. Jh.s.
(Übrigens verwechselt Scheybl wie so mancher andere den Mathematiker Euklid [um 300 v. Chr.] mit dem Philosophen Euklid von Megara [um 450–um 370 v. Chr.], einem Schüler des Sokrates. Federigo Commandino [1509–1575] weist 1572 in seiner Euklidübersetzung auf diesen Irrtum hin.)

8. Wähle einen Startwert x_1 und berechne mit dem Iterationsverfahren (I) die ersten vier geltenden* Ziffern der Dezimalentwicklung von

a) $\sqrt{8170}$ **b)** $\sqrt{14{,}36}$ **c)** $\sqrt{0{,}088855}$ **d)** $\sqrt{0{,}000001234}$.

9. Wie viel Stellen vor dem Komma hat die Dezimalentwicklung der Wurzel und wie heißt die erste Ziffer?

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{37{,}64}$ **c)** $\sqrt{428}$ **d)** $\sqrt{3650809}$

e) $\sqrt{82145}$ **f)** $\sqrt{8214{,}5}$ **g)** $\sqrt{821{,}45}$ **h)** $\sqrt{82{,}145}$

10. a) Welche Ungleichung für $\sqrt{a}$ folgt aus

1) $1 > a \geqq 0{,}01$; **2)** $0{,}01 > a \geqq 0{,}0001$; **3)** $\frac{1}{10^4} > a \geqq \frac{1}{10^6}$?

b) Wo steht in der Dezimalentwicklung von **1)** $\sqrt{0{,}5}$; **2)** $\sqrt{0{,}025}$; **3)** $\sqrt{0{,}004}$ die erste von 0 verschiedene Ziffer und wie heißt sie?

11. Wie muss bzw. kann der Anfang der Dezimalentwicklung der Wurzel aussehen? (Die Punkte bedeuten weggelassene Ziffern.)

a) $\sqrt{0{,}7\ldots}$ **b)** $\sqrt{0{,}006\ldots}$ **c)** $\sqrt{0{,}12\ldots}$ **d)** $\sqrt{0{,}0147\ldots}$

12. Berechne nach dem Divisionsverfahren den ganzzahligen Teil der Wurzel.

a) $\sqrt{1000}$ **b)** $\sqrt{80656}$ **c)** $\sqrt{338725}$ **d)** $\sqrt{3387{,}25}$

13. Berechne nach dem Divisionsverfahren den auf Hundertstel gerundeten Wert von **a)** $\sqrt{19}$, **b)** $\sqrt{187{,}5}$, **c)** $\sqrt{17{,}7241}$, **d)** $\sqrt{0{,}6196}$.

14. Auf der in Abbildung 48.1 gezeigten altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598 (um 1600 v. Chr.) wurde zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln folgendes Verfahren angewandt, das auch HERON (um 62 n. Chr.) in seinem *Περὶ μέτρων* – »Vermessungslehre« – angibt:

$$\sqrt{p^2+q} \approx p + \frac{q}{2p} \qquad (p > 0;\ p^2+q \geqq 0)$$

Welcher Wert ergibt sich damit

a) für $\sqrt{3}$ aus der Zerlegung $3 = 4 - 1$;

b) für $\sqrt{3}$ aus der Zerlegung $3 = 2{,}89 + 0{,}11$;

c) für $\sqrt{6}$ aus der Zerlegung $6 = 6{,}25 - 0{,}25$;

d) für $\sqrt{435}$ aus der Zerlegung $435 = 400 + 35$;

e) für $\sqrt{435}$ aus der Zerlegung $435 = 441 - 6$;

f) für $\sqrt{1000}$ aus der Zerlegung $1000 = 1024 - 24$?

Vergleiche das Ergebnis mit dem Näherungswert des Taschenrechners.

* Die geltenden Ziffern werden von links nach rechts gezählt. Die erste von 0 verschiedene Ziffer ist dabei die erste geltende Ziffer.

15. Welcher Näherungswert x_2 ergibt sich nach der Formel von Aufgabe **14** für $\sqrt{a}$, wenn man mit Hilfe eines Schätzwertes x_1 den Radikanden in der Form $a = x_1^2 + (a - x_1^2)$ darstellt? Vergleiche damit das entsprechende Ergebnis beim Iterationsverfahren (I).

16. Von HERON (um 62 n. Chr.) wird angenommen, dass er für Wurzeln der Form $\sqrt{n^2-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ auch die Näherungsformel

$$\sqrt{n^2-1} \approx n - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \quad \text{verwandte.}$$

a) Zeige, dass die von HERON angegebene Näherung $\sqrt{3} \approx \frac{26}{15}$ mit dieser Formel gewonnen werden kann.

b) Welcher Näherungswert ergibt sich aus obiger Formel für

1) $\sqrt{15}$, **2)** $\sqrt{63}$, **3)** $\sqrt{120}$?

c) Vergleiche die HERONsche Näherung für $\sqrt{3}$ mit der von ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) stammenden Abschätzung

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Vergleiche die Ergebnisse jeweils auch mit den von deinem Taschenrechner gelieferten Näherungswerten.

17. Die Babylonier rechneten bekanntlich im Sexagesimalsystem*, also im Stellenwertsystem mit der Grundzahl 60. In den Übersetzungen ihrer Keilschrifttexte werden Zahlen meist in der Form geschrieben, dass hinter die Ganzen ein Strichpunkt und zwischen Einer, Sechziger, ... bzw. zwischen Sechzigstel, 3600stel, ... jeweils ein Komma gesetzt wird. Zum Beispiel bedeutet 4,20;25,08 die Zahl $4 \cdot 60 + 20 + \frac{25}{60} + \frac{8}{3600}$.

a) Prüfe die aus einer babylonischen Wurzeltabelle stammende Gleichung $\sqrt{0;38,24} = 0;48$.

b) Gib den Wert von **1)** $\sqrt{3,45}$, **2)** $\sqrt{1;33,45}$, **3)** $\sqrt{11;13,21}$ im Sexagesimalsystem an.

18. Die Keilschrifttafel VAT 6598 (Abbildung 48.1) enthält folgende Aufgabe: Ein Tor. $\frac{1}{2}$ GAR und 2 Ellen Höhe, 2 Ellen Weite. Seine Diagonale ist was?

a) Wie viel Ellen misst die Diagonale, wenn 1 GAR = 12 Ellen** gilt?

b) Auf der Tafel wird für die Länge der Diagonale der Wert 0;41,15 GAR angegeben. Zeige, dass dies keine exakte Lösung ist und dass sie sich nach der Näherungsformel von Aufgabe **14** ergibt, wenn

* sexagesimus (lat.) = der sechzigste
** 1 GAR bedeutet etwa 6 Meter, 1 babylonische Elle also etwa 5 dm.

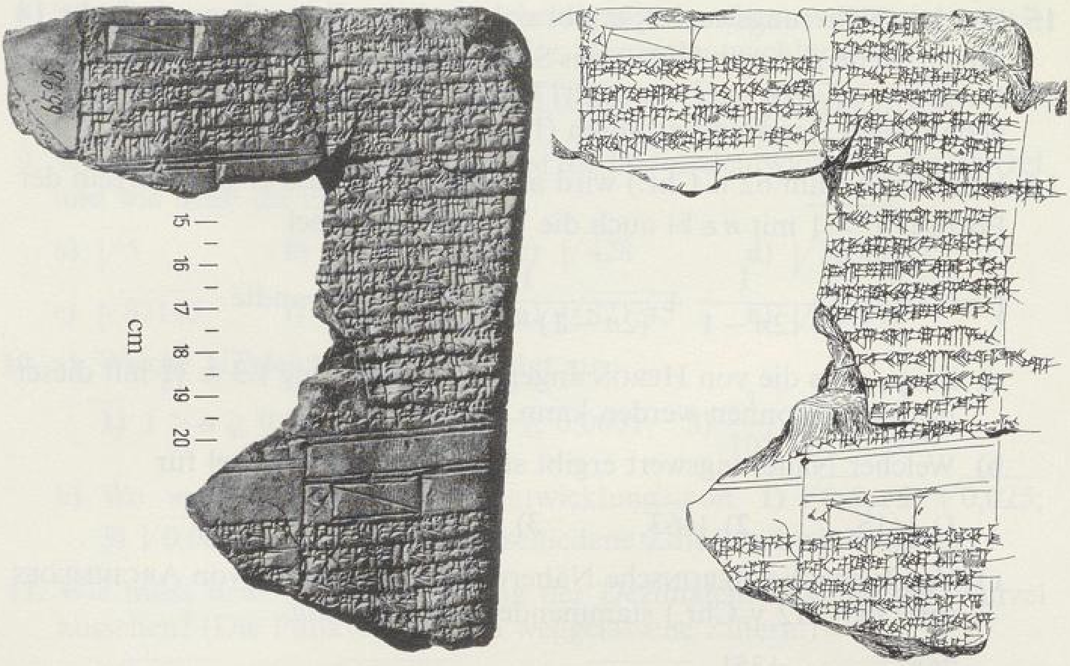

Abb. 48.1 Rückseite der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598, aufbewahrt in Berlin, Staatliche Museen: Vorderasiatische Abteilung; Tontafeln, samt zugehöriger Autographie (wörtlich: Selbstgeschriebenes), d.h. handschriftlicher Übertragung der in den Ton eingedrückten Zeichen

man für p^2 die größte Quadratzahl wählt, die im Quadrat der Diagonalen enthalten ist.

c) Für dieselbe Aufgabe wird auf der Tafel auch noch die Lösung 0;42,13,20 GAR angegeben. Vergleiche die Genauigkeit der beiden Lösungen.

19. a) Auf der babylonischen Keilschrifttafel* AO 6484 aus Uruk aus der Zeit der SELEUKIDEN (321–63 v. Chr.) findet man für $\sqrt{2}$ den sexagesimalen Wert 1;25.

1) Auf wie viel Dezimalstellen stimmt dieser Wert mit dem von deinem Taschenrechner angezeigten Wert überein?

2) Man kann nur vermuten, dass die Babylonier diese Näherung durch zweimalige Anwendung der Formel von Aufgabe 46/**14** gefunden haben, und zwar beginnend mit $p_1^2 = 1$; der sich dabei ergebende Näherungswert wird als p_2 genommen. Führe diese Rechnung durch.

•**b)** Auf der altbabylonischen Keilschrifttafel** YBC 7289 (Abbildung 49.1) steht auf der Diagonale eines Quadrats die Sexagesimalzahl 1;24,51,10.

* aufbewahrt im Louvre zu Paris in der Abteilung Antiquités Orientales
** aufbewahrt in der Yale Babylonian Collection in New Haven (USA)

1) Auf wie viel Dezimalstellen stimmt dieser Wert für $\sqrt{2}$ mit dem von deinem Taschenrechner hierfür angezeigten Wert überein?

2) Wie die Babylonier diesen recht genauen Wert gefunden haben, wissen wir nicht. Nahe liegend erscheinen die beiden folgenden Verfahren.
1. Art: Man führt zuerst das in **a 2** beschriebene Näherungsverfahren noch einen Schritt weiter.
2. Art: Man wendet zuerst auf 1;25 das Iterationsverfahren (I) von Seite 38f. einmal an.
Zeige, dass man jedes Mal $1\frac{169}{408}$ als Näherungswert erhält. Rechnet man dann diesen Bruch in eine Sexagesimalzahl um* und bricht nach der 3. Sexagesimalstelle hinter dem Semikolon ab, so erhält man die auf der Diagonale stehende Zahl. Weise dies nach.

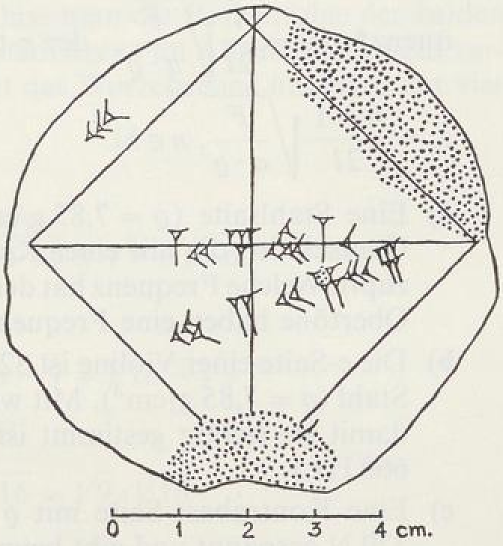

Abb. 49.1 Autographie der altbabylonischen Keilschrifttafel YBC 7289 (um 1700 v. Chr.). Auf der Quadratseite links oben liest man ‹‹‹ = 30, auf der Diagonale als Näherungswert für $\sqrt{2}$. Darunter steht die entsprechende Länge der Diagonale.

3) Berechne mit Hilfe dieses Näherungswerts die Länge der Diagonale als Sexagesimalzahl, wenn die Quadratseite die Länge 30 hat. (Abbildung 49.1)

20. Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft von 0 °C beträgt $c_0 = 331{,}6\ \mathrm{m/s}$. Sie nimmt mit steigender Temperatur zu, und zwar gilt bei der Lufttemperatur t (in °C): $c = c_0\sqrt{1 + \frac{1}{273{,}2\ \mathrm{K}}\, t}$.

a) Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit bei 20 °C bzw. 40 °C?

b) Bei welcher Temperatur beträgt die Schallgeschwindigkeit 325 m/s?

21. Wenn eine schwingende Saite von der Länge l, dem Querschnitt q und der Dichte ϱ mit einer Kraft F gespannt ist, dann hat ihr Grundton die Fre-

* Beispiel einer Umrechnung:

$$\frac{3}{35} = \frac{\frac{3}{35}\cdot 60}{60} = \frac{\frac{36}{7}}{60} = \frac{5+\frac{1}{7}}{60} = \frac{5}{60} + \frac{\frac{1}{7}}{60} = \frac{5}{60} + \frac{\frac{1}{7}\cdot 60}{3600} = \frac{5}{60} + \frac{8}{3600} + \frac{\frac{4}{7}\cdot 60}{216000} = 0;05,08,\ldots$$