Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

2.3 Rechenregeln für Quadratwurzeln

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

quenz* $\nu_0 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{q \cdot \varrho}}$, der n-te Oberton die Frequenz

$$\nu_n = \frac{n+1}{2l}\sqrt{\frac{F}{q \cdot \varrho}}, \; n \in \mathbb{N}.$$

a) Eine Stahlsaite ($\varrho = 7{,}85\,\text{g/cm}^3$) von 1,00 m Länge und 0,50 mm² Querschnitt, die mit einer Kraft von 160 N gespannt ist, wird angezupft. Welche Frequenz hat der dabei erklingende Grundton? Wie viele Obertöne haben eine Frequenz unter 2 kHz?

b) Die e-Saite einer Violine ist 32,5 cm lang; sie ist 0,35 mm dick und aus Stahl ($\varrho = 7{,}85\,\text{g/cm}^3$). Mit welcher Kraft muss sie gespannt werden, damit sie richtig gestimmt ist? (Die Frequenz des Tones e″ beträgt 660 Hz.)

c) Eine Kontrabass-Saite mit $\varrho = 7{,}9\,\text{g/cm}^3$ und $q = 6{,}2\,\text{mm}^2$ ist mit 370 N gespannt und gibt beim Anstreichen den Ton $_1$E (so genanntes Kontra-E) mit 41 Hz. Wie viel cm ist diese Saite lang?

2.3 Rechenregeln für Quadratwurzeln

Aus Definition 33.1 folgt unmittelbar, dass $(\sqrt{a})^2 = a$ gilt. Das Ziehen der Quadratwurzel und anschließendes Quadrieren heben sich also auf. Gilt das auch für die umgekehrte Reihenfolge dieser beiden Rechenschritte? Dass dies nicht zutrifft, zeigt folgendes

Beispiel: $(-2)^2 = 4$; $\sqrt{4} = 2$; also $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Wegen $|-2| = 2$ gilt aber $\sqrt{(-2)^2} = |-2|$.

Das führt uns zu

> **Satz 50.1:** Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$.

Beweis: $\sqrt{a^2}$ ist nach Definition 33.1 die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a^2$. Diese Gleichung hat für $a \neq 0$ die beiden Lösungen a und $-a$. Je nachdem, ob $a > 0$ oder $a < 0$ gilt, ist a oder $-a$ die positive Lösung. Für $a = 0$ ist $x = 0 = \sqrt{0^2}$ die einzige Lösung.
Somit gilt:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \end{cases}$$

also $\sqrt{a^2} = |a|$.

* frequentia (lat.) = die Häufigkeit; Frequenz = Zahl der Schwingungen pro Sekunde, Einheit 1/s = 1 Hz (1 Hertz) zu Ehren von Heinrich HERTZ (1857–1894), dem Entdecker der elektromagnetischen Wellen

Die vorausgehende Überlegung zeigt, dass man die Reihenfolge der beiden Rechenschritte »Wurzelziehen« und »Quadrieren« im Allgemeinen nicht vertauschen darf. Kann man aber vielleicht das Wurzelziehen mit einer der vier Grundrechenarten vertauschen?

Beispiele:

1) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\\ \sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$

2) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\\ \sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{16-9} \neq \sqrt{16}-\sqrt{9}$

3) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{144}=12\\ \sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}$

4) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9:16}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}\\ \sqrt{9}:\sqrt{16}=3:4=\frac{3}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{9:16}=\sqrt{9}:\sqrt{16}$

Die Beispiele 1 und 2 *beweisen*, dass man die Reihenfolge von Wurzelziehen und Addieren bzw. Subtrahieren nicht vertauschen darf. Die beiden anderen Beispiele lassen jedoch *vermuten*, dass beim Multiplizieren und Dividieren die Vertauschung zulässig ist.
Tatsächlich gilt

Satz 51.1:

1) Für $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ gilt $\boldsymbol{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$.

2) Für $a \geqq 0$ und $b > 0$ gilt $\boldsymbol{\sqrt{a:b}=\sqrt{a}:\sqrt{b}}$, oder $\boldsymbol{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$.

Beweis von **1**: Aus $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ folgt $a\cdot b \geqq 0$; alle drei Wurzeln sind definiert.
Aus $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = a\cdot b$ folgt, dass $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = ab$ darstellt, also gleich $\sqrt{ab}$ ist.

Beweis von **2**: Nach **1** gilt $\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{b\cdot\frac{a}{b}}$,

$$\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a}, \qquad \|:\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Die Regel **1** von Satz 51.1 lässt sich natürlich auch auf mehr als zwei Faktoren ausdehnen. So gilt z. B.

$\sqrt{abc} = \sqrt{a(bc)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{bc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$.

Im Sonderfall von n gleichen Faktoren erhält man

Satz 52.1: Für $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$.

Als Anwendungen der bisher gefundenen Rechengesetze treten besonders häufig folgende Fälle auf:

Teilweises Wurzelziehen (partielles Radizieren): Lässt sich aus dem Radikanden ein quadratischer Faktor abspalten, so kann man aus diesem die Wurzel ziehen.

Beispiele:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{a^2 b^3 c^4} = \sqrt{a^2 b^2 c^4 \cdot b} = \sqrt{a^2 b^2 c^4} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot |b| \cdot c^2 \sqrt{b}$$

$$\sqrt{2a^2 - 4ab + 2b^2} = \sqrt{2(a^2 - 2ab + b^2)} = \sqrt{2(a-b)^2} = |a - b| \cdot \sqrt{2}$$

Einen Faktor unter die Wurzel nehmen: Es handelt sich hier um die Umkehrung des partiellen Radizierens.

Beispiele:

$$2 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28}$$

$$-5 \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{5^2 \cdot 3} = -\sqrt{75}$$

$$a \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} |a| \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, & \text{falls } a \geqq 0 \\ -|a| \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Beachte also, dass man nur nicht negative Faktoren durch eine Quadratwurzel darstellen kann.

Rationalmachen des Nenners: Dabei geht es darum, Wurzeln, die im Nenner eines Bruches auftreten, zu beseitigen.

Beispiele:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{7-5} =$$

$$= \frac{\sqrt{21}+\sqrt{15}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{21}+\sqrt{15})$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^4}} = \frac{\sqrt{ab}}{a^2}$$

Aus $a = b$ folgt, falls a und b nicht negativ sind, die Gleichung $\sqrt{a} = \sqrt{b}$; umgekehrt erhält man durch Quadrieren daraus wieder $a = b$. Also sind, falls $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$, die beiden Gleichungen $a = b$ und $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ äquivalent. Gilt eine entsprechende Feststellung auch für Ungleichungen?

Beispiele:

$4 < 49$ liefert $\sqrt{4} < \sqrt{49}$; richtig, weil $2 < 7$.

$0 < 5$ liefert $\sqrt{0} < \sqrt{5}$; richtig, denn $0 < 2{,}23\ldots$

$2{,}25 > 0{,}36$ liefert $\sqrt{2{,}25} > \sqrt{0{,}36}$; richtig, da $1{,}5 > 0{,}6$.

Vermutlich gilt also

Satz 53.1: Monotoniegesetz des Radizierens

Für $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ gilt: $\boldsymbol{a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}}$.

Beweis: 1) $\Leftarrow$: Aus der Voraussetzung $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ und $\sqrt{a} \geqq 0$ folgt $\sqrt{b} > 0$. Wir multiplizieren die Ungleichung $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ mit $\sqrt{a}$ bzw. $\sqrt{b}$:

$\sqrt{a} < \sqrt{b} \quad \Vert \cdot \sqrt{a}$	$\sqrt{a} < \sqrt{b} \quad \Vert \cdot \sqrt{b}$
$a \leqq \sqrt{ab}$.	$\sqrt{ab} < b$.

Somit ist $a \leqq \sqrt{ab} < b$, also $a < b$.

2) $\Rightarrow$: Vorausgesetzt ist nun $0 \leqq a < b$. Die Annahme $\sqrt{a} \geqq \sqrt{b}$ hätte nach **1** die Ungleichung $a \geqq b$ zur Folge, also einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher gilt: $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ c) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{20}$
d) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{1000}$ e) $\sqrt{10^7}\cdot\sqrt{10^3}$ f) $\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{0{,}001}$
g) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{14{,}4}$ h) $\sqrt{0{,}625}\cdot\sqrt{10^3}$ i) $\sqrt{1960}\cdot\sqrt{0{,}1}$
k) $\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{0{,}4}$ l) $\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{0{,}9}$ m) $\sqrt{0{,}121}\cdot\sqrt{4{,}9}$
n) $\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$ o) $\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{\frac{28}{3}}$ p) $\sqrt{14\frac{17}{35}}\cdot\sqrt{11\frac{2}{3}}$

2. a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}$
c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}$ d) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{0{,}03}\cdot\sqrt{15}$
e) $\sqrt{0{,}35}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2{,}1}$ f) $\sqrt{1{,}2}\cdot\sqrt{0{,}02}\cdot\sqrt{0{,}03}\cdot\sqrt{0{,}8}$
g) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{6}{7}}\cdot\sqrt{1{,}75}$ h) $\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{2{,}2}\cdot\sqrt{\frac{18}{11}}\cdot\sqrt{7{,}5}\cdot\sqrt{16{,}8}$

3. a) $\sqrt{16\cdot 121}$ b) $\sqrt{625\cdot 49\cdot 100}$ c) $\sqrt{0{,}01\cdot 144\cdot 225}$
d) $\sqrt{0{,}36\cdot 2^4\cdot 5^2}$ e) $\sqrt{3^6\cdot 1{,}69\cdot 7^2}$ f) $\sqrt{5^4\cdot 2^8\cdot 11^2}$
g) $\sqrt{(2\cdot 3^2)\cdot(5^6\cdot 2^3)}$ h) $\sqrt{(3\cdot 5^2\cdot 7)\cdot 84}$ i) $\sqrt{(2^3\cdot 11\cdot 3^5)\cdot 297\cdot 8}$

4. Vereinfache durch teilweises Radizieren:
a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{180}$ d) $\sqrt{176}$
e) $\sqrt{216}$ f) $\sqrt{1250}$ g) $\sqrt{9000}$ h) $\sqrt{2{,}5}$
i) $\sqrt{40{,}5}$ k) $\sqrt{0{,}00625}$

5. a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{243}}$ d) $\dfrac{\sqrt{176}}{\sqrt{275}}$
e) $\sqrt{32{,}4}:\sqrt{0{,}1}$ f) $\sqrt{0{,}294}:\sqrt{2{,}4}$ g) $\sqrt{0{,}098}:\sqrt{22{,}05}$

6. a) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{75}}\cdot\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{32}}$ b) $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{24}}\cdot\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{700}}$ c) $\dfrac{\sqrt{24{,}5}}{\sqrt{192}}:\dfrac{6}{\sqrt{54}}$ d) $\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{450}}:\dfrac{\sqrt{405}}{\sqrt{2025}}$

7. Vereinfache:
a) $\sqrt{ab^4}$ b) $\sqrt{a^2b^2}$ c) $\sqrt{25m^{10}n^3}$ d) $\sqrt{27x^8y^4}$
e) $\sqrt{\dfrac{32}{a^2}\cdot\dfrac{b}{25}}$ f) $\sqrt{\dfrac{250m^3}{n^2}:\dfrac{2n^2}{m^2}}$ g) $\sqrt{\dfrac{1{,}21uv^2w^4}{192}}$

8. a) $(\sqrt{8}-3\sqrt{18}+2\sqrt{32})\cdot\sqrt{2}$ b) $(3\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{80})\cdot 2\sqrt{5}$
c) $\dfrac{1}{3}\sqrt{6}\,(8\sqrt{12}-2\sqrt{24}+\sqrt{75})$ d) $\dfrac{1}{5}\sqrt{15}\,(2\sqrt{45}+3\sqrt{135}-3\sqrt{20})$

9. **a)** $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ **b)** $(6\sqrt{5}-5\sqrt{6})(5\sqrt{6}-6\sqrt{5})$

c) $(\sqrt{14}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{7})$ **d)** $(5\sqrt{11}-2\sqrt{10})(-\sqrt{55}-2\sqrt{2})$

10. **a)** $[(2\sqrt{5}+\sqrt{2})+\sqrt{22}]\cdot[(2\sqrt{5}+\sqrt{2})-\sqrt{22}]$

b) $[2\sqrt{15}+(4\sqrt{3}-2\sqrt{7})]\cdot[2\sqrt{15}-(4\sqrt{3}-2\sqrt{7})]$

11. **a)** $(5\sqrt{2}+\sqrt{18})^2$

b) $(2\sqrt{5}-\sqrt{18})^2$

c) $(\sqrt{20}-3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{5}+\sqrt{8})^2$

d) $(\sqrt{320}-2\sqrt{70})^2-(\sqrt{240}-6\sqrt{10})^2$

12. Beispiel: $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

Mache bei den folgenden Quotienten den Nenner rational:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{5}{\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{-2}{\sqrt{19}}$ **d)** $\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}}$

e) $\frac{2}{3\sqrt{11}}$ **f)** $\frac{6+10\sqrt{1,2}}{5\sqrt{1,2}}$ **g)** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$ **h)** $\frac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}$

13. Mache die Nenner rational.

a) $\frac{1}{3+\sqrt{10}}$ **b)** $\frac{5}{2\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **c)** $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

d) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ **e)** $\frac{1-\sqrt{15}}{2\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$ **f)** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{8}}{3\sqrt{14}+\sqrt{7}}$

14. Beseitige die Wurzeln im Nenner.

a) $\frac{1}{\sqrt{a^2b}}$ **b)** $\frac{2b^2}{\sqrt{8a^2b^5c}}$ **c)** $\frac{2a^3}{\sqrt{6a^4b^3c^3}}$

d) $\frac{a^3b}{\sqrt{a^6b}}$ **e)** $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ **f)** $\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p\sqrt{q}+q\sqrt{p}}$

15. Beispiel: $\mathbf{(\sqrt{2})^3=(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}}$.

a) $(\sqrt{2})^4$ **b)** $(\sqrt{2})^{10}$ **c)** $(\sqrt{2})^{11}$ **d)** $(\sqrt{2})^{15}$ **e)** $(\sqrt{2})^{18}$

f) $(\sqrt{3})^3$ **g)** $(\sqrt{11})^2$ **h)** $(\sqrt{7})^5$ **i)** $(\sqrt{3})^8$ **k)** $(\sqrt{5})^9$

16. Beispiel: $\sqrt{7^5} = \sqrt{7^4 \cdot 7} = 7^2 \cdot \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$.

a) $\sqrt{2^6}$ **b)** $\sqrt{3^5}$ **c)** $\sqrt{5^3}$ **d)** $\sqrt{8^2}$ **e)** $\sqrt{6^3}$

f) $\sqrt{11^4}$ **g)** $\sqrt{3^9}$ **h)** $\sqrt{2^{10}}$ **i)** $\sqrt{2^{13}}$ **k)** $\sqrt{2^{20}}$

17. a) $(\sqrt{2})^5 + (\sqrt{8})^4 - 2\sqrt{2^3}$ **b)** $((\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5^3}$

c) $(\sqrt{7^4} + 4(\sqrt{7})^3)((\sqrt{7})^5 - 7 \cdot \sqrt{4^2})$

d) $(4\sqrt{3^3} + (\sqrt{2})^5) : (8(\sqrt{3})^7 + 9\sqrt{2^7})$

18. Vereinfache:

a) $(\sqrt{a})^3$ **b)** $(\sqrt{a})^4$ **c)** $(\sqrt{a})^7$ **d)** $(\sqrt{a})^{2n}$ **e)** $(\sqrt{a})^{2m+1}$

f) $\sqrt{a^2}$ **g)** $\sqrt{a^3}$ **h)** $\sqrt{a^4}$ **i)** $\sqrt{a^5}$ **k)** $\sqrt{a^6}$

19. Vereinfache:

a) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ **b)** $\sqrt{2m^2 - 12m + 18}$

c) $\sqrt{z^4 + 2z^2 + 1}$ **d)** $\sqrt{9z^4 - 6z^2 + 1}$

e) $\sqrt{12{,}1x^2 + 4{,}4xy + 0{,}4y^2}$ **f)** $\sqrt{1 + 2|x| + x^2}$

20. Nimm, soweit dies möglich ist, die Faktoren unter die Wurzel. Achte dabei auf eventuell notwendige Fallunterscheidungen.

a) $3\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{7} \cdot 5$ **c)** $(-2)\sqrt{3-x}$ **d)** $(7-3)\sqrt{5a}$

e) $x\sqrt{y}$ **f)** $a^2\sqrt{x}$ **g)** $2b^3\sqrt{y}$ **h)** $(a-b)\sqrt{a+b}$

21. Welche Größenbeziehung besteht zwischen folgenden Zahlenpaaren?

a) $\sqrt{17}$ und $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt{381}$ und $\sqrt{247}$

c) $\sqrt{a^2+2}$ und $\sqrt{a^2+1}$ **d)** $\sqrt{0{,}75}$ und $\sqrt{\frac{3}{4}}$

e) $\sqrt{0{,}1}$ und $\sqrt{0{,}01}$ **f)** $\sqrt{\frac{37}{81}}$ und $\sqrt{0{,}457}$

• **22.** Es sei $0 < a < 1$ und $b > 1$. Welche Größenbeziehung besteht dann zwischen

a) $\sqrt{a}$ und a, **b)** $\sqrt{b}$ und b, **c)** $\sqrt{a^7}$ und $(\sqrt{a})^8$,

d) $(\sqrt{b})^3$ und $\sqrt{b^5}$, **e)** $\sqrt{a^3b^2}$ und $b\sqrt{a^5}$, **f)** $\sqrt{a^3b}$ und $a\sqrt{ab^3}$?

23. Welche Ungleichung besteht zwischen

a) $\sqrt{9+16}$ und $\sqrt{9} + \sqrt{16}$, **b)** $\sqrt{5^2+10^2}$ und $\sqrt{5^2} + \sqrt{10^2}$,

c) $\sqrt{625-49}$ und $\sqrt{625} - \sqrt{49}$, **d)** $\sqrt{225-25}$ und $\sqrt{225} - \sqrt{25}$?

24. a) Beweise: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

b) Beweise: $0 < a < b \Rightarrow \sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$. (Hinweis: Quadriere!)

25. Zeige, dass die Zahlen x und y gleiche Quadrate haben. Warum sind trotzdem die Zahlen selbst nicht gleich?

a) $x = 3 - 2\sqrt{3}$; $\quad y = \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$

b) $x = \sqrt{14 - 8\sqrt{3}}$; $\quad y = \sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

26. Mit Hilfe von Quadratwurzeln kann man dieselbe Zahl auf sehr unterschiedliche Art darstellen. Weise nach, dass die folgenden Gleichungen richtig sind:

a) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ $\qquad$ **b)** $2 + \sqrt{5} = \sqrt{4\sqrt{5}+9}$

c) $\sqrt{9+2\sqrt{14}} = \sqrt{2} + \sqrt{7}$ $\qquad$ **d)** $\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{2}+4} = \sqrt{\sqrt{8}} + \sqrt{\sqrt{2}}$

•**27.** Beispiele wie die von Aufgabe **26** lassen sich auf zwei Rechenregeln zurückführen, die in geometrischer Fassung schon bei EUKLID (um 300 v. Chr.) in Buch X seiner *Elemente*, in algebraischer Form z. B. im arabischen Euklid-Kommentar des AL-NAYRIZI († 922) und im indischen *Bidscha-ganita* – »Samen der Rechenkunst« – von BHĀSKARA II (1115–nach 1178) vorkommen: Für $0 \leqq a \leqq b$ gilt

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \quad \text{und} \quad \sqrt{b}-\sqrt{a} = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$$

a) Beweise diese Regeln.

b) Warum existiert $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ für beliebige positive Zahlen a und b? (Hinweis: Aufgabe 45/**6**)

c) Bereits ABU KAMIL (um 850–930) berechnet in seinem *al-kitab fi al-dschabr wa-'l-muqabala* mit diesen Formeln $\sqrt{8}+\sqrt{18} = \sqrt{50}$ und $\sqrt{18}-\sqrt{8} = \sqrt{2}$. Bestätige diese Ergebnisse **1)** unter Verwendung der obigen Formeln, **2)** ohne Verwendung dieser Formeln.

d) Vereinfache die folgenden Terme mit Hilfe der obigen Formeln:

1) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\qquad$ (arabisch, um 1100)

2) $\left(\sqrt{\sqrt{40}+6} + \sqrt{\sqrt{40}-6}\right)^2$ $\qquad$ (Luca PACIOLI [um 1445–1517], *Summa*, 1494)

3) $\left(\sqrt{12+\sqrt{6}} + \sqrt{12-\sqrt{6}}\right)^2$ $\qquad$ (Michael STIFEL [1487?–1567], *Arithmetica integra*, 1544)

28. Überprüfe die folgenden Beispiele aus der altindischen Mathematik:

a) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

b) $\sqrt{16+\sqrt{120}+\sqrt{72}+\sqrt{60}+\sqrt{48}+\sqrt{40}+\sqrt{24}} = \sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$