Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

2.4 Zur Geschichte der irrationalen Zahlen

**2.4 Zur Geschichte der irrationalen Zahlen

Eine der größten Leistungen der griechischen Mathematik ist die Entdeckung der Inkommensurabilität zweier Strecken, d.h. der Existenz von Streckenverhältnissen, die nicht mehr durch das Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausgedrückt werden können. Sie führte schließlich zum Begriff der irrationalen Zahl. Es überrascht, dass die Ägypter, erst recht die Babylonier, die ja bereits um 1800 v. Chr. erhebliche mathematische Kenntnisse besaßen – du wirst später davon noch mehr hören –, das Problem, ob es zu zwei Strecken stets ein gemeinsames Maß gibt, überhaupt nicht erkannten. Es überrascht noch mehr, dass die Griechen dieses Problem zu einer Zeit erkannten und auch zu lösen verstanden, als ihre Mathematik noch in den Kinderschuhen steckte. Noch erstaunlicher ist es, dass durch kein Dokument belegt ist, wann und durch wen diese ungeheuere Entdeckung erfolgte, obwohl die Griechen die Tragweite dieser Entdeckung erfassten.*
Der früheste Bericht von dieser Entdeckung ist die Stelle 147c des Dialogs *Theätet*, den PLATON (428–348 v. Chr.) im Jahre 368 v. Chr. verfasste, kurz nachdem sein Schüler, der Mathematiker THEAITETOS (um 415–369 v. Chr.), in einer Schlacht tödlich verwundet worden war. In diesem Dialog, der im Jahre 399 v. Chr., dem Todesjahr des SOKRATES, spielt, zeigt ein alter Mathematiker, nämlich THEODOROS VON KYRENE (um 465 bis um 385 v. Chr.), dass die Seite eines Quadrats, dessen Inhalt eine der Nichtquadratzahlen von 3 bis 17 ist, irrational ist. Bei 17, so heißt es, »hielt er zufällig inne«. Von einem Quadrat des Inhalts 2 wird nichts gesagt! Also muss der Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ älter sein. Der in den meisten Codices als Nachtrag zu Buch X von EUKLIDS *Elementen* (um 300 v. Chr.) überlieferte arithmetische Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist sprachlich weitaus schwerfälliger als die sonstige Diktion der *Elemente*; das weist darauf hin, dass er aus alter Zeit stammt. Auf alle Fälle scheint $\sqrt{2}$ die erste Zahl zu sein, deren Irrationalität arithmetisch und nicht nur geometrisch bewiesen wurde (siehe Aufgabe 12/**4**). Mit größter Wahrscheinlichkeit wurde aber die Irrationalität nicht am Quadrat entdeckt, sondern am regelmäßigen Fünfeck bzw. am Pentagramm (Abbildung 9.1), dem Erkennungszeichen des Geheimbundes der PYTHAGOREER (Aufgabe 13/**11**).
Einstimmig sind spätantike Autoren der Meinung, dass der Philosoph** HIPPASOS aus Metapont/Unteritalien (2. Viertel des 5. Jh.s v. Chr.), der noch ein unmittelbarer Schüler des PYTHAGORAS (um 570–um 497 v. Chr.) sein könnte, die Entdeckung des Irrationalen an die Öffentlichkeit gebracht hat. Ansonsten wird von ihm noch berichtet, dass er musikalische Experimente an Metallscheiben verschiedener Dicke und an mit Wasser gefüllten Röhren ausgeführt und sich außerdem mit Proportionen und Mitteln (siehe Aufgabe 45/**6**) beschäftigt habe. Aber zurück zum Irrationalen!
IAMBLICHOS aus Chalkis/Koile-Syrien (um 250–um 330 n. Chr.) berichtet uns:
»HIPPASOS habe als Erster die aus 12 Fünfecken zusammengesetzte Kugel, d.h. die Umkugel des Dodekaeders [Abbildung 59.1], öffentlich beschrieben und sei deshalb wie ein Gottloser im Meer umgekommen.«
Und an späteren Stellen lesen wir bei ihm:
»Einige sagen auch, ihm sei dies widerfahren, weil er das Geheimnis des Unaussprechbaren [siehe unten] und des Inkommensurablen verraten habe.«

* ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) kommt z. B. nicht weniger als 26-mal in seinen Werken auf die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat zu sprechen.
** φιλόσοφος (philósophos) ist eine Wortschöpfung der PYTHAGOREER und bedeutet Freund der Weisheit.

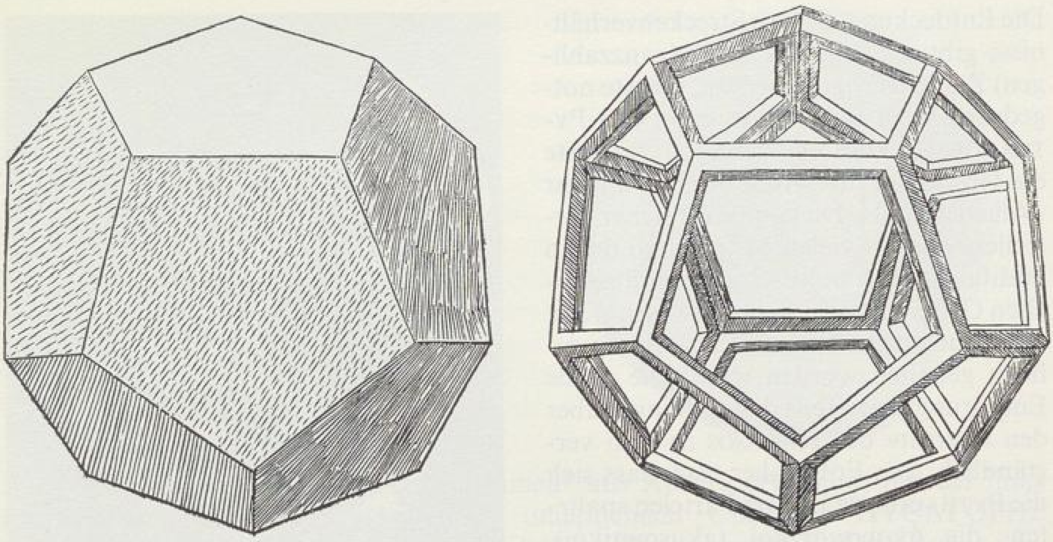

Abb. 59.1 Das Dodekaeder (= Zwölfflach)*, ein von 12 regelmäßigen ebenen Fünfecken begrenzter Körper, links als Vollkörper, rechts als Hohlkörper, gezeichnet von LEONARDO DA VINCI (1452–1519) für die 1509 erschienene *Divina Proportione* seines Freundes Luca PACIOLI (um 1445–1517).

»Denjenigen aber, welcher als erster die Natur des Kommensurablen und des Inkommensurablen solchen eröffnete, die nicht würdig waren an der Lehre teilzuhaben, sollen die Pythagoreer so tief verabscheut haben, dass sie ihn nicht nur aus der Lehr- und Lebensgemeinschaft ausschlossen, sondern ihm [zu Lebzeiten] auch ein Grabmal errichteten mit der Begründung, ihr einstiger Gefährte sei aus dem Leben unter den Menschen ausgeschieden.«

Nirgends wird also berichtet, dass HIPPASOS der Entdecker des Irrationalen sei; nur als Verräter wird er dingfest gemacht. Man neigt jedoch heute dazu, ihn auch für den Entdecker zu halten. Warum aber die ganze Aufregung über den Frevler und den Verrat?

Um die Frage beantworten zu können müssen wir mehr über die PYTHAGOREER wissen. In seiner *Metaphysik* berichtet uns ARISTOTELES (384–322 v. Chr.), die PYTHAGOREER »sahen in den [natürlichen] Zahlen die Eigenschaften und Verhältnisse der Harmonie [... und da] die Zahlen das erste in der ganzen Natur, so nahmen sie auch an, die Elemente der Zahlen seien die Elemente alles Seienden und die ganze Welt sei Harmonie und Zahl. [...] Alles führen sie auf die Zahlen zurück.« Anders ausgedrückt: PYTHAGORAS und seine Schüler waren der Meinung, dass irgend zwei Dinge dieser Welt stets in einem Verhältnis zueinander stehen, das durch zwei natürliche Zahlen, d. h. durch einen Bruch, ausgedrückt werden kann. Als Beispiel diene die Musik: Man erhält die Oktave bzw. die Quint zu einem Ton, wenn man die ihn erzeugende Saite im Verhältnis 2 : 1 bzw. 3 : 2 verkürzt:

Oktave 2 : 1 Quint 3 : 2

* δωδεκάεδρος (dodekáedros) = *zwölfsitzig, mit zwölf Grundlagen* aus δώδεκα (dódeka) = *zwölf* und ἡ ἕδρα (he hédra) = *der Sitz, die Grundlage*. Das Fachwort δωδεκάεδρον (dodekáedron) verwendet EUKLID in Buch XI seiner *Elemente*.

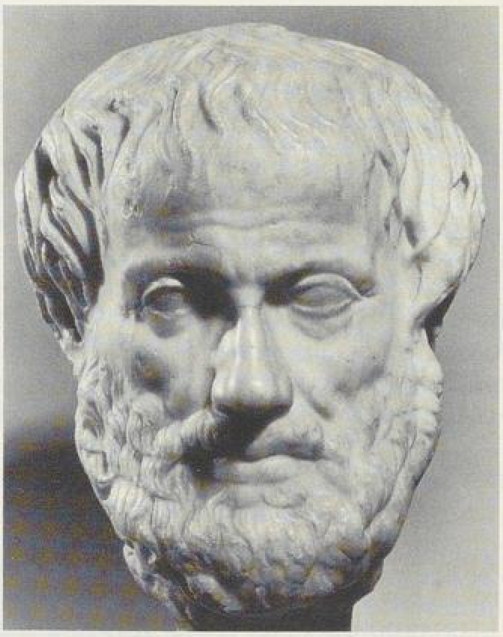

Abb. 60.1 ARISTOTELES (384 Stagira/Thrakien – 322 Chalkis/Euböa). Römische Kopie nach einem um 325 v. Chr. entstandenen griechischen Original. Wien, Kunsthistorisches Museum

Die Entdeckung, dass es Streckenverhältnisse gibt, zu denen es keine (ganzzahligen) Zahlenverhältnisse gibt, musste notgedrungen zu einer Krise unter den PYTHAGOREERN führen; denn sie zerstörte die Grundlage ihrer Weltanschauung, ihr »Alles ist Zahl«. Du kannst dir sicher vorstellen, dass es vielen Mitgliedern des in Süditalien auch politisch sehr einflussreichen Geheimbundes lieber gewesen wäre, wenn diese umwälzende Entdeckung geheim gehalten worden wäre. Die große Empörung eines Teils der Anhänger über den »Verrat« des HIPPASOS ist also verständlich. Die Folge aber war, dass sich die PYTHAGOREER in zwei Parteien spalteten, die ἀκουσματικοί (akusmatikói), d.h. die Hörer, die ohne tiefere Einsicht auf das Wort des Meisters schworen und der alten Lehre anhingen, und die μαθηματικοί (mathematikói), d.h. die durch Lernen Einsicht erlangt Habenden, also die Gruppe um HIPPASOS, die durch ihre geistige Schulung in der Lage waren das Neue zu begreifen.* Bezeichnenderweise stellten sich die Mathematikoi bei den Unruhen in Unteritalien um 445 v. Chr. auf die Seite des Volkes, die Akusmatikoi dagegen auf die Seite des herrschenden Adels. Die wechselhaften Ereignisse führten schließlich dazu, dass zuerst die Akusmatikoi und später die Mathematikoi aus Unteritalien vertrieben wurden, sodass um 350 v. Chr. der pythagoreische Bund jede Bedeutung verloren hatte.

PLATON lernte 388/387 in Unteritalien bei ARCHYTAS VON TARENT pythagoreisches Gedankengut kennen. In seinem letzten Werk, den *Νόμοι* (Nómoi) – »Gesetze« –, das erst nach seinem Tode bekannt wurde, zeigt sich, wie beeindruckt PLATON von der Entdeckung der irrationalen Verhältnisse war. Er spricht dort an der Stelle 819/820 von einer »lächerlichen und schimpflichen Unwissenheit, die allen Menschen innewohnt«, ehe sie davon erfahren haben, und bekennt: »Mich selbst ergriff durchaus Verwunderung, als ich spät [hier übertreibt er!] davon hörte. Es kam mir vor, als wäre so etwas [nämlich ein solches Unwissen] bei den Menschen gar nicht möglich, sondern eher bei einer Herde von Schweinen. Und ich schämte mich, nicht nur für mich selbst, sondern für alle Griechen.« In diesen Worten kommt auch zum Ausdruck, dass sich die Kenntnis von der Existenz irrationaler Verhältnisse noch nicht sehr verbreitet hatte. Und PLATON schließt seine Betrachtung über das Irrationale mit den Worten: »Das ist eins von den Dingen, welches nicht zu wissen wir für eine große Schande erklärten; es aber zu kennen ist nichts besonders Rühmenswertes!«

* ἀκούειν (akúein) = *hören, vernehmen*; ἄκουσμα (ákusma) = *das Gehörte, die Lehre*.
μαθηματικός (mathematikós) = *lernbegierig, gelehrig* kommt von μανθάνειν (manthánein) = *lernen, erlernen, verstehen, einsehen* und hängt zusammen mit μάθημα (máthema) = *das Gelernte, die Kenntnis, das Wissen*.

Abb. 61.1 Rückseite zweier Tetradrachmen* aus Abdera (Ἄβδηρα) mit der links oben beginnenden, im Uhrzeigersinn umlaufenden Umschrift ΠΥΘΑΓΟΡΗΣ (= Pythagores), geprägt zwischen 430 und 420 v. Chr., vermutlich PYTHAGORAS darstellend. ∅ = 2,4 cm; links 13,98 g,** rechts 13,08 g.

Die Entdeckung, dass die Diagonalen des Fünfecks und des Quadrats nicht durch den griechischen Zahlbegriff erfasst werden können, dass sie aber andererseits als Strecken exakt vorhanden sind, hatte weit reichende Folgen für die weitere Entwicklung der griechischen Mathematik. Man wandte sich nämlich von der Arithmetik, der Lehre von den Zahlen, ab und betrieb Mathematik als Geometrie. In ihr konnte, auch mit Strecken irrationaler Länge, das von den griechischen Philosophen geforderte Ideal der Exaktheit verwirklicht werden.
Einen großen Schritt weiter brachte EUDOXOS VON KNIDOS (um 400–347 v. Chr.) die Mathematik: Es gelingt ihm, eine geometrische Proportionenlehre auch für inkommensurable Streckenverhältnisse zu schaffen. Dabei führt er bewusst den Begriff der Größe (μέγεϑος [mégethos]) in die Mathematik ein, was auf eine Erweiterung des Zahlbegriffs bis hin zur reellen Zahl hinausläuft. EUKLIDS Buch V der *Elemente* geht praktisch auf EUDOXOS zurück. Im recht schwierigen Buch X, das vermutlich von THEAITETOS stammt, wird die Theorie der irrationalen Größen geometrisch weiter ausgebaut. Aber EUDOXOS wurde erst 2000 Jahre später voll verstanden. In ihren Beweisen schlagen sich die Griechen immer auf die sichere Seite: Sie bevorzugen geometrische Beweise vor algebraischen Überlegungen, da irrationale Zahlen ihnen unvorstellbar waren. Auch DIOPHANT (um 250 n. Chr.), der mit seinen *Ἀριϑμητικῶν βιβλία* (Arithmetikōn biblía) – »Bücher über die Zahlenlehre« – algebraisches Denken wieder aufnimmt, vermeidet es stets durch entsprechende Wahl der Koeffizienten, dass solche Zahlen als Lösungen einer Gleichung auftreten.
Erst den Arabern gelingt es, langsam die Algebra von ihrer geometrischen Verkleidung zu befreien. Es ist insbesondere ein Verdienst AL-BAGDADIS (um 1100), dass er in seinem Kommentar zu Buch X von EUKLIDS *Elementen*, den GERHARD VON CREMONA (1114–1187) übersetzt, Zahlenbeispiele mit Wurzeln vorführt. Es entwickelt sich eine

* Eine Tetradrachme ist ein silbernes Vier-Drachmen-Stück. Das Monatsgehalt eines Lehrers im 2. Jh. v. Chr. betrug etwa 12 Tetradrachmen.

** Diese Münze ist die erste in einer Reihe ähnlicher Prägungen, bei denen der für die Prägung zuständige Jahresbeamte der Stadt Abdera seinen Namen mit einer berühmten Gestalt der griechischen Geschichte oder Sagenwelt in Verbindung brachte. Der Beamte PYTHAGORES wählte ein idealisiertes Portrait seines berühmten Namensvetters, des Philosophen und Mathematikers PYTHAGORAS.

Abb. 62.1 Vorderseite der Tetradrachme von Abbildung 61.1, links; dargestellt ist ein Greif.

Kunst des Rechnens mit Wurzeln, wie du sie in **2.3** gelernt hast. LEONARDO VON PISA (um 1170 bis nach 1240), der sein Wissen von den Arabern bezog, ließ in seinem *liber abaci* (1202) irrationale Zahlen sowohl als Lösungen wie auch als Koeffizienten von Gleichungen zu (Aufgabe 79/**3** und 82/**4e**, **f**). Allmählich wird das Rechnen mit irrationalen Zahlen zu einer Selbstverständlichkeit. Schreibt doch um 1460 Frater FRIDERICUS AMANN* († 1465) in einem algebraischen Traktat des *Codex latinus monacensis 14908*: »Wer mit den surdischen [d.h. irrationalen (siehe unten)] Zahlen, ihrem Addieren und ihrem Subtrahieren, den Binomen [...] und den anderen irrationalen Größen nicht umzugehen weiß, der versteht in der Arithmetik nichts Besonderes.«** Dennoch sind diese surdischen Zahlen für ihn keine Zahlen. »Surdus numerus non est numerus« schreibt er. Auch Michael STIFEL (1487?–1567) diskutiert diese Frage 1544 in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« –, obwohl er zu einem vertieften Verständnis der Irrationalzahl gelangt ist: »So, wie also eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist auch eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie gewissermaßen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist.«*** Dieser Nebel der Unendlichkeit sind wohl die unendlichen Dezimalzahlen, mit denen man die irrationalen Zahlen darstellen kann. Erst dadurch, dass 1637 René DESCARTES (1596–1650) in seiner *La Géométrie* mit Hilfe des Strahlensatzes auch das Produkt zweier Strecken a und b wieder als Strecke darstellt (Abbildung 62.2) – bis dahin wurde dieses Produkt immer als Fläche interpretiert –, gelingt eine Übertragung der geometrisch wohl definierten Irrationalitäten in die Welt der Zahlen mit ihren Rechengesetzen. Der Durchbruch ist geschafft, die irrationalen Zahlen werden als Zahlen anerkannt.

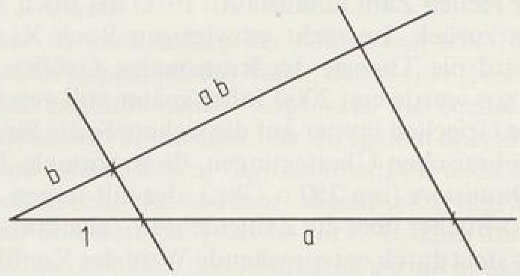

Abb. 62.2 Das Produkt *ab* als Strecke nach DESCARTES

Dennoch blieb es dem 19. Jh. vorbehalten, die irrationalen Zahlen ohne jede geometrische Begründung auf algebraischem Wege einführen zu können. Von verschiedenen Mathematikern wurden dazu verschiedene Verfahren vorgeschlagen, die alle auf das-

* Seit 1995 weiß man, dass die bisher dem FRIDERICUS GERHART († 1463) zugeschriebenen Abhandlungen von FRIDERICUS AMANN stammen und umgekehrt.

** Qui in surdis atque additis et diminutis et binomiis [...] et lineis ceteris irrationalibus agere nescit, nihil in Arismetrica egregii novit.

*** Sic igitur infinitus numerus, non est numerus: sic irrationalis numerus non est verus numerus, qui lateat sub quadam infinitatis nebula.

selbe Ergebnis hinauslaufen. Wir nennen hier die Arbeiten Richard DEDEKINDS (1831 bis 1916) und Georg CANTORS (1845–1918), beide aus dem Jahre 1872. Die Definition der reellen Zahlen durch Intervallschachtelungen, die du kennen gelernt hast, geht auf die *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen* von Paul Gustav Heinrich BACHMANN (1837–1920) aus dem Jahre 1892 zurück.

Abschließend wollen wir noch die Entstehung des Fachworts **irrational** verfolgen. Nach der Entdeckung der Inkommensurabilität nannten die PYTHAGOREER ein Verhältnis aus zwei ganzen Zahlen, also unsere rationale Zahl, ῥητός (rhetós) = *aussprechbar*, ein Verhältnis aber, das sich nicht durch ganze Zahlen ausdrücken ließ, also unsere irrationale Zahl, ἄρρητος (árrhetos) = *unaussprechbar*. THEODOROS VON KYRENE (um 465–um 385), der Lehrer PLATONS, verwendet stattdessen das Gegensatzpaar σύμμετρος – ἀσύμμετρος (sýmmetros – asýmmetros), also *gemeinsam messbar – nicht gemeinsam messbar*, bezogen auf die Einheit. Sein und PLATONS Schüler THEAITETOS (um 415–369 v. Chr.) betrachtet Verbindungen wie $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ und $\sqrt{\sqrt{a}}$. Erstere ergeben, wenn man sie quadriert, nicht immer eine rationale Zahl. So wird z. B. $(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2 = 2+8+2\sqrt{16} = 18$, also eine rationale Zahl, aber $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+3+2\sqrt{6} = 5+2\sqrt{6}$ eine irrationale Zahl. Für Größen der letzteren Art benützt THEAITETOS ein altes Wort, nämlich ἄλογος (álogos) = *sprachlos, stumm, unaussprechbar*. EUKLID (um 300 v. Chr.) übernimmt die Bezeichnung von THEAITETOS, behält aber das Gegensatzpaar des THEODOROS bei. Dadurch vermischen sich diese drei Wörter in ihrer Bedeutung. Allmählich setzt sich jedoch bei den griechischen Mathematikern ἄλογος zur Bezeichnung irrationaler Größen durch.

BOETHIUS (um 480–524?) übersetzt σύμμετρος mit *commensurabilis*, der römische Staatsmann und Gelehrte CASSIODORUS (um 490– um 583), der ebenso wie BOETHIUS in den Diensten THEODERICHS DES GROSSEN, des Ostgotenkönigs, stand, übersetzt das Gegensatzpaar mit *rationalis – irrationalis*, womit wir bei unseren Fachwörtern sind. GERHARD VON CREMONA (1114–1187) benützt sie, als er den Euklid-Kommentar des AL-NAYRIZI († um 922) übersetzt. In Michael STIFELS (1487?–1567) *Arithmetica integra* von 1544 sind sie feste Fachausdrücke. Das Wort *irrational* hatte aber lange Zeit noch einen interessanten Konkurrenten.
Das griechische ἄλογος (álogos) = *sprachlos, unaussprechbar* wird bei AL-CHARIZMI (um 780 – nach 847) und anderen arabischen Mathematikern unerklärlicherweise durch das arabische Wort *aṣamm* wiedergegeben, das nicht sprachlos, sondern *taub* bedeutet. Als GERHARD VON CREMONA den Euklid-Kommentar des AL-BAGDADI (um 1100), den er dem des AL-NAYRIZI beifügt, und die *Algebra* des AL-CHARIZMI übersetzt, wählt er für *aṣamm* die wortgetreue Entsprechung, nämlich **surdus**, das dann auch LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) gerne verwendet. Michael STIFEL übernimmt es und verdeutscht die *numeri surdi* gar zu *surdische Zahlen*! Bis ins 18. Jh. bleibt *surdus* als mathematisches Fachwort lebendig. Im Englischen ist heute noch *surd number* als Fachbegriff für Irrationalzahl gebräuchlich.

Bei dieser Gelegenheit können wir dir jetzt auch den mathematischen Ursprung des Worts **Binom** erklären. Die schon bei THEAITETOS vorkommenden Summen $a + \sqrt{b}$ und $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, bei denen die Wurzeln keine ganzen Zahlen ergeben, nannte EUKLID in Buch X seiner *Elemente* ἐκ δύο ὀνομάτων (ek dýo onomáton) = *aus zwei Namen*, wofür GERHARD VON CREMONA in seiner AL-NAYRIZI-Übersetzung kurz *binomium* sagte. In der weiteren Entwicklung (siehe *Algebra 7*, Seite 187) wurde die Bedeutung von Binom verallgemeinert zu »Summe aus zwei Summanden«.