Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

2.5 Wurzelgleichungen

2.5 Wurzelgleichungen

2.5.1 Einfache Wurzelgleichungen

Eine Gleichung, bei welcher die Unbekannte unter einer Wurzel auftritt, bezeichnet man als Wurzelgleichung.

Beispiele:

1) $\sqrt{x} = 3$ **2)** $\sqrt{2x-5} = 7$

3) $\sqrt{4x+5} = x+2$ **4)** $\sqrt{x^2+2} = 3x$

5) $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+3}$ **6)** $\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$

Um eine solche Gleichung lösen zu können muss man zunächst alle Wurzeln, welche die Unbekannte enthalten, beseitigen. Dies geschieht durch Quadrieren der Gleichung. Dabei gilt: Jede Lösung der Ausgangsgleichung erfüllt auch die durch Quadrieren entstehende Hilfsgleichung.
Denn wenn eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ eine Lösung x_1 hat, d.h., wenn $T_1(x_1) = T_2(x_1)$ gilt, so folgt daraus auch $(T_1(x_1))^2 = (T_2(x_1))^2$; also ist x_1 auch eine Lösung der Gleichung $(T_1(x))^2 = (T_2(x))^2$.
Gehört aber umgekehrt auch jede Lösung der durch Quadrieren gewonnenen Hilfsgleichung zur Lösungsmenge der Ausgangsgleichung? Wenn ja, wäre das Quadrieren eine Äquivalenzumformung. Um dies zu untersuchen betrachten wir die obigen Beispiele.

1) $\sqrt{x} = 3$. Durch Quadrieren erhält man $x = 9$.

Probe: LS $= \sqrt{9} = 3 =$ RS; also $L = \{9\}$.

2) $\sqrt{2x-5} = 7 \Rightarrow 2x - 5 = 49$

$$x = 27$$

Probe: LS $= \sqrt{2 \cdot 27 - 5} = \sqrt{49} = 7 =$ RS; also $L = \{27\}$.

3) $\sqrt{4x+5} = x+2 \Rightarrow 4x+5 = x^2+4x+4$

$$x^2 = 1$$

Lösungen der Hilfsgleichung: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

Probe mit x_1: LS $= \sqrt{4 \cdot 1 + 5} = \sqrt{9} = 3$; RS $= 1 + 2 = 3 =$ LS.

Probe mit x_2: LS $= \sqrt{4 \cdot (-1) + 5} = \sqrt{1} = 1$; RS $= -1 + 2 = 1 =$ LS.

Ergebnis: $L = \{1; -1\}$.

4) $\sqrt{x^2+2} = 3x \Rightarrow x^2 + 2 = 9x^2$

$$8x^2 = 2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}$$

Lösungen der Hilfsgleichung: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Probe mit x_1: $\mathrm{LS} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$; $\mathrm{RS} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \mathrm{LS}$.

Probe mit x_2: $\mathrm{LS} = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$; $\mathrm{RS} = 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} \neq \mathrm{LS}$.

Ergebnis: $L = \{\frac{1}{2}\}$.

5) $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+3} \Rightarrow x - 1 = 2x + 3$

$$x = -4$$

Probe: $\mathrm{LS} = \sqrt{-4-1}$, sinnlos! $\mathrm{RS} = \sqrt{2 \cdot (-4) + 3}$, sinnlos!

Ergebnis: $L = \{\,\}$.

6) $\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$

Die Rechnung gestaltet sich einfacher, wenn man vor dem Quadrieren die Gleichung so umformt, dass eine der beiden Seiten nur aus einer Wurzel besteht. Man spricht vom **Isolieren der Wurzel**.

$$\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$$

$$\sqrt{2x+8} = 1 + \sqrt{5+x} \Rightarrow 2x + 8 = 1 + 2\sqrt{5+x} + 5 + x$$

Da immer noch eine Wurzel vorhanden ist, muss man noch einmal quadrieren; zuvor aber wird die Wurzel isoliert.

$$2x + 8 = 1 + 2\sqrt{5+x} + 5 + x$$

$$\sqrt{5+x} = \tfrac{1}{2}x + 1 \Rightarrow 5 + x = \tfrac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$\tfrac{1}{4}x^2 = 4$$

$$x^2 = 16.$$

Die wurzelfreie Hilfsgleichung hat die Lösungen $x_1 = 4$; $x_2 = -4$.

Probe mit x_1: $\mathrm{LS} = \sqrt{2 \cdot 4 + 8} - \sqrt{5+4} = \sqrt{16} - \sqrt{9} = 1 = \mathrm{RS}$.

Probe mit x_2: $\mathrm{LS} = \sqrt{2 \cdot (-4) + 8} - \sqrt{5-4} = \sqrt{0} - \sqrt{1} = -1 \neq \mathrm{RS}$.

Ergebnis: $L = \{4\}$.

Bei den ersten drei Beispielen haben die Ausgangsgleichung und die aus ihr durch Quadrieren gewonnene Hilfsgleichung jeweils dieselbe Lösungsmenge, nicht jedoch in den übrigen Beispielen; dort besitzt die Hilfsgleichung noch zusätzliche Lösungen! In Beispiel **4** liegt das daran, dass die beiden Gleichungen $\sqrt{x^2+2} = 3x$ und $\sqrt{x^2+2} = -3x$ auf dieselbe Hilfsgleichung $x^2 + 2 = 9x^2$ führen. In deren Lösungsmenge sind also die Lösungen von zwei verschiedenen Ausgangsgleichungen enthalten. Entsprechendes gilt auch im Beispiel **6** (vgl. Aufgabe 67/7). Dagegen hat die Verschiedenheit der beiden

Lösungsmengen bei Beispiel **5** eine andere Ursache: Die beim Quadrieren entstehende Gleichung hat ganz $\mathbb{R}$ als Definitionsmenge und besitzt dort die Lösung $x = -4$. Die Wurzelgleichung ist jedoch nur auf $D = [1; +\infty[$ definiert und kann daher nicht -4 als Lösung haben. Dass $-4 \notin D$ gilt, zeigt sich bei der Probe am Auftreten sinnloser Terme.
Beachte also: Das Quadrieren einer Gleichung ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung. Zwar erfüllt jede Lösung der Ausgangsgleichung auch die Hilfsgleichung, es kommt aber vor, dass die Hilfsgleichung noch zusätzliche Lösungen besitzt. Das Quadrieren kann also eine »**Gewinnumformung**« sein. Mit anderen Worten: Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist eine echte oder unechte Teilmenge der Lösungsmenge der durch Quadrieren entstandenen neuen Gleichung. Nachdem man deren Lösungen bestimmt hat, muss man prüfen, ob sie auch der Ausgangsgleichung genügen. Das geschieht im Allgemeinen durch eine Probe.

Es gibt allerdings einen einfachen Typ von Wurzelgleichungen, bei welchem das Quadrieren die Lösungsmenge nicht ändert. Das sind Gleichungen der Form $\sqrt{T(x)} = c$ mit $c \geqq 0$ (vgl. Beispiel **1)** und **2)**). Durch Quadrieren entsteht nämlich die Gleichung $T(x) = c^2$ mit $c^2 \geqq 0$. Wenn x_1 eine Lösung dieser Gleichung ist, gilt $T(x_1) = c^2$, also $T(x_1) \geqq 0$. Man kann daher auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und erhält $\sqrt{T(x_1)} = |c|$, also, wegen $c \geqq 0$, $\sqrt{T(x_1)} = c$, sodass x_1 auch die Ausgangsgleichung löst. Bei solchen Wurzelgleichungen kann man daher auf die Probe verzichten.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{2x} = 2$ **b)** $\sqrt{1+x} = 0$ **c)** $\sqrt{2x+3} - 1 = 0$

d) $\sqrt{3x+7} + 10 = 0$ **e)** $\sqrt{8-3x} = \sqrt{14}$ **f)** $\sqrt{7x+3} + 2\sqrt{7} = 5$

2. a) $\sqrt{2x+1} = x+1$ **b)** $3x+2 = \sqrt{12x+5}$

c) $\sqrt{3-4x} = 2x-1$ **d)** $1 + \sqrt{5x-1} = x + 3{,}5$

e) $7x = \sqrt{28x+13} - 2$ **f)** $4x + \sqrt{25-16x} - 2 = 0$

3. a) $\sqrt{4+3x} = 3x+2$ **b)** $x - 1 = \sqrt{1-3x}$

c) $\sqrt{15x+25} = 2x+5$ **d)** $2x = \sqrt{9-2x} + 3$

e) $4x = \sqrt{x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$ **f)** $\sqrt{8x+3} - 6x - \sqrt{3} = 0$

4. a) $\sqrt{4x^2-7} = 3$ **b)** $\sqrt{25-x^2} = 6$

c) $\sqrt{17-2x^2} = 3$ **d)** $\sqrt{5x^2-1} = x$

e) $\sqrt{6x^2+50} + 2\sqrt{2x} = 0$ **f)** $\sqrt{5+3x^2} = x\sqrt{3}$

5. a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{3x+3}$ **b)** $\sqrt{x-8} = \sqrt{4-2x}$

c) $\sqrt{3x+10} = \sqrt{x+6}$ **d)** $\sqrt{x^2+7} = \sqrt{2x^2-2}$

e) $\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{5x^2+11}$ **f)** $\sqrt{6x^2+5} = \sqrt{5-3x}$

6. a) $\sqrt{\frac{x}{2x+5}} = \sqrt{\frac{x-1}{2x+2}}$ b) $\sqrt{\frac{13-x}{3x+1}} = \sqrt{\frac{x-5}{1-x}}$

c) $\sqrt{\frac{2-x}{3+x}} = \sqrt{\frac{x+1}{3x+2}}$ d) $\sqrt{\frac{5x-14}{7-6x}} = \sqrt{\frac{4x+6}{8x-3}}$

•7. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden drei Gleichungen und vergleiche die Lösungswege:

$\sqrt{x^2+3x} = 1 + \sqrt{x^2+x}$, $\sqrt{x^2+3x} = 1 - \sqrt{x^2+x}$ und

$\sqrt{x^2+3x} = -1 + \sqrt{x^2+x}$

•8. a) $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x-4}$ b) $\sqrt{x-3} - 3 = \sqrt{x-12}$

c) $\sqrt{x+1} = 3 + \sqrt{x-5}$ d) $\sqrt{x^2+1} + 2 = \sqrt{x^2+17}$

e) $\sqrt{x^2+15} = 5 - \sqrt{x^2+10}$ f) $\sqrt{12-x^2} - 3 = \sqrt{3-x^2}$

•9. a) $\sqrt{x^2+x} = 1 + \sqrt{x^2-x}$ b) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{2x^2+x} + \sqrt{2x^2-x} = 5$ d) $\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{2x^2-x} = 5$

•10. a) $\sqrt{x^2+4x+5} = 5 - \sqrt{x^2-6x}$ b) $\sqrt{x^2+4x+6} + \sqrt{x^2-2x} = 3$

••11. Am 2. Juni 1461 schreibt der Benediktiner Frater FRIDERICUS, eigentlich Friedrich AMANN, († 1465) im Kloster St. Emmeram zu Regensburg die erste Algebra in deutscher Sprache nieder, die sog. *deutsche Algebra* aus dem *Codex latinus monacensis 14908*, und rechnet dabei die folgende von AL-CHARIZMI stammende Aufgabe vor (sie steht in Abbildung 68.1, 4. Zeile von unten links bis 1. Zeile oben rechts):
Gib mir ain censum vnd zuech dar von sin wurcz vnd von dem daz vber belyb an dem censu zuech och vß dye wurcz dye czwo wurcz tue zesamen daz 2 zal dar auß werden.*

* *census* ist die wortgetreue lateinische Übersetzung des arabischen مال *māl*, das *Vermögen* bedeutet. Meist wird unter *census* das Quadrat der Unbekannten verstanden. In dieser Aufgabe zeigt sich aber, dass AL-CHARIZMI mit *māl* nicht immer das Quadrat, sondern gelegentlich die Unbekannte selbst bezeichnet. (Vgl. auch die Fußnote zu Aufgabe 94/**11i**). Andernfalls würde die Aufgabe unnötig schwer.
»Dass ›2 zal‹ daraus werden«, heißt bei AL-CHARIZMI, »dass ›2 Dirhem‹ daraus werden«. AL-CHARIZMI hat von den Indern die Gewohnheit übernommen, reine Zahlen durch das Wort *Dirhem* zu kennzeichnen – so hießen die von den Kalifen geprägten Silbermünzen (3,98 g). ARYABHATA (476–? n. Chr.) nämlich hatte bekannten Größen das Wort *rupaka* (= mit Zeichen versehene Münze) beigefügt, das bald durch *ru* abgekürzt wurde. Im europäischen Mittelalter wurde AL-CHARIZMIS *Dirhem* durch *drachme* oder auch durch *dragma* wiedergegeben, was in deutschen Handschriften mit $\mathcal{H}$, einem *d* mit Schnörkel, ϕ oder auch f abgekürzt wurde. Schließlich wurden *dragma* und *numerus* synonym gebraucht. Letzteres übersetzt der Verfasser der *deutschen Algebra* mit *zal*. Michael STIFEL (1487?–1567) war der erste, der im Druck solche Zeichen wegließ und nur mehr die Zahl alleine schrieb. – Das Wort *dirhem* ist eine Arabisierung des griechischen Worts δραχμή (drachmē), dem Namen einer alten Gewichts- und Rechnungseinheit. Man vermutet, dass dieses Wort vom Verbum δράσσεσθαι (drássesthai) = *fassen, umfassen* abgeleitet wurde, weil man tatsächlich mit einer Hand sechs ὀβελίσκοι (obelískoi) = *Spießchen* umfassen konnte, deren Gewicht eine Drachme ausmachte. Später nannte man ein solches Spießchen ὀβολός (obolós); es wog in Attika 0,728 g.
Bei GERHARD VON CREMONA (1114–1187) lautet die Aufgabe so: »Est census de quo radicem suam proieci et addidi radici radicem eius quod remansit, et quod provenit fuit due dragme. Ergo hec radix census et radix eius quod remansit fuit equale duabus dragmis.«

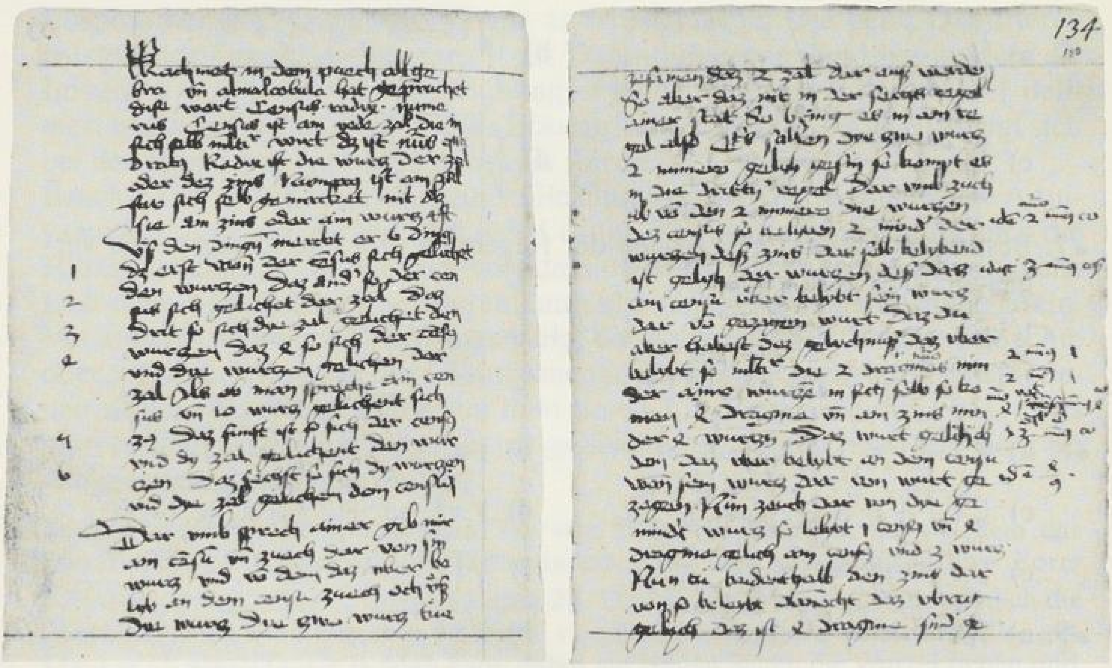

Abb. 68.1 Folium 133v und 134r der 3-seitigen *deutschen Algebra*, geschrieben am Tag des hl. Erasmus (= 2. Juni) des Jahres 1461, in der Bruchstücke und eine einzige Aufgabe aus AL-CHARIZMIS *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* auf Deutsch wiedergegeben sind. Der Text beginnt so: Machmet in dem puech algebra vnd almalcobula hat gepruchet dise wort Census · radix · numerus.* Sammelhandschrift *Codex latinus monacensis 14908*, Größe des Schriftblocks 9,7 cm × 5,8 cm.

**2.5.2 Wurzelgleichungen mit Parametern

Das Lösen von Wurzelgleichungen, in denen außer der Unbekannten auch noch Parameter vorkommen, erfordert im Allgemeinen Fallunterscheidungen. Bei der Untersuchung, ob eine Lösung der durch Quadrieren erhaltenen Hilfsgleichung auch die Ausgangsgleichung erfüllt, ist vor allem auch zu beachten, dass die auftretenden Radikanden nicht negativ sein dürfen.

Beispiel 1:

$$\sqrt{x + a^2} = \sqrt{2x + 1} \;\Rightarrow\; x + a^2 = 2x + 1$$

$$x = a^2 - 1$$

$$\text{Probe: LS} = \sqrt{a^2 - 1 + a^2} = \sqrt{2a^2 - 1}$$

$$\text{RS} = \sqrt{2(a^2 - 1) + 1} = \sqrt{2a^2 - 1}$$

* Der gesamte von Frater FRIDERICUS AMANN geschriebene Text ist im Lösungsheft abgedruckt. Vergleiche auch die Übersetzung GERHARD VON CREMONAS in unserer *Algebra 7*, Seite 10, und im zugehörigen Lösungsheft, Seite 4f.

LS und RS sind jedoch nur definiert, wenn $2a^2 - 1 \geqq 0$ gilt, also für $|a| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ergebnis: $x = a^2 - 1$, falls $|a| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$; sonst $L = \{\ \}$.

Beispiel 2:

$$\sqrt{x + 8a} = \sqrt{x} + 2a \Rightarrow x + 8a = x + 4a\sqrt{x} + 4a^2$$

$$a\sqrt{x} = 2a - a^2$$

Die Auflösung der letzten Gleichung nach $\sqrt{x}$ ist nur für $a \neq 0$ möglich. Also Fallunterscheidung:

$\boxed{a = 0}$ $0 \cdot \sqrt{x} = 0$; also $L = \mathbb{R}_0^+$, was auch für die Ausgangsgleichung gilt.

$\boxed{a \neq 0}$ $\sqrt{x} = 2 - a \Rightarrow x = (2 - a)^2$

Probe: $\mathrm{LS} = \sqrt{(2-a)^2 + 8a} = \sqrt{4 + 4a + a^2} = \sqrt{(2+a)^2} = |2 + a| =$

$$= \begin{cases} 2 + a & \text{für} \quad a \geqq -2 \\ -(2 + a) & \text{für} \quad a < -2 \end{cases}$$

$$\mathrm{RS} = \sqrt{(2-a)^2} + 2a = |2 - a| + 2a = \begin{cases} 2 + a & \text{für} \quad a \leqq 2 \\ -2 + 3a & \text{für} \quad a > 2 \end{cases}$$

Für $a \neq 0$ lautet somit das Ergebnis:

$L = \{(2-a)^2\}$ für $0 < |a| \leqq 2$; $\quad L = \{\ \}$ für $|a| > 2$.

Am Lösungsbaum lassen sich die verschiedenen Fälle übersichtlich darstellen (Abbildung 69.1):

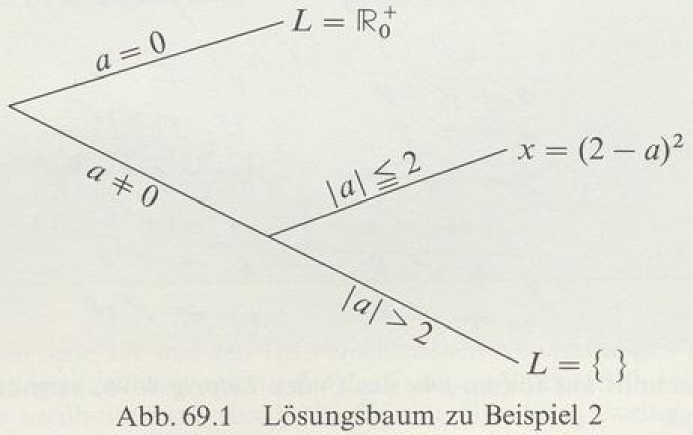

Abb. 69.1 Lösungsbaum zu Beispiel 2

Aufgaben

1. Löse die folgenden Parametergleichungen:

a) $\sqrt{x+a^2} = a+1$ **b)** $\sqrt{x+a} = a-1$

c) $\sqrt{x+a} = \sqrt{5a-x}$ **d)** $\sqrt{x+a} = \sqrt{a^2-x}$

e) $\sqrt{x^2+a} = \sqrt{a-x}$ **f)** $\sqrt{x^2-a^2} = x+a$

2. a) Zeige, dass die Gleichung $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a} = 2a$ genau dann lösbar ist, wenn die Bedingung $a = 0 \vee a \geqq 0{,}5$ erfüllt ist. Wie lautet jeweils die Lösung?

b) Für welche Werte von a ist die Gleichung $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a} = 2a$ lösbar und wie lautet die Lösung?

Zu den Aufgaben 3 bis 5:

Löse die Gleichung und zeichne einen Lösungsbaum.

3. a) $\sqrt{x^2+\frac{1}{a^2}} = \sqrt{x^2-1}+\frac{1}{a}$ **b)** $\sqrt{x+\frac{1}{a}}-\sqrt{x-\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$

•**4. a)** $\sqrt{ax^3+3} = \sqrt{3+a^3x}$ **b)** $\sqrt{x^2+a}-\sqrt{ax^2-2} = 0$

⁚**5. a)** $\sqrt{x+2a^2} = a+\sqrt{x+a^2}$ **b)** $\sqrt{ax^2+x} = \sqrt{ax^2-x}+1$

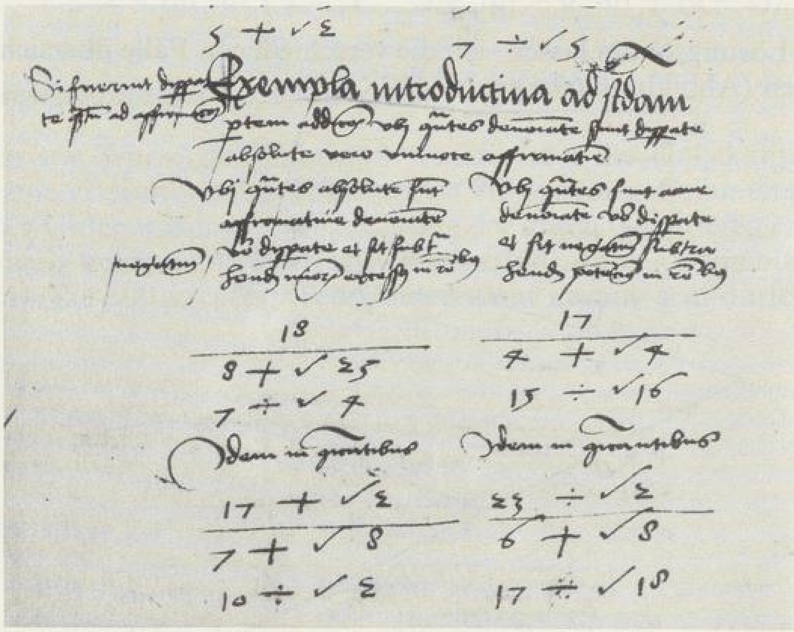

Abb. 70.1 Ausschnitt aus folium 64v des *Codex Leipzig 1696*, vermutlich aus dem Ende des 15. Jh.s