UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

2.5.2 Wurzelgleichungen mit Parametern

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

Visual Library

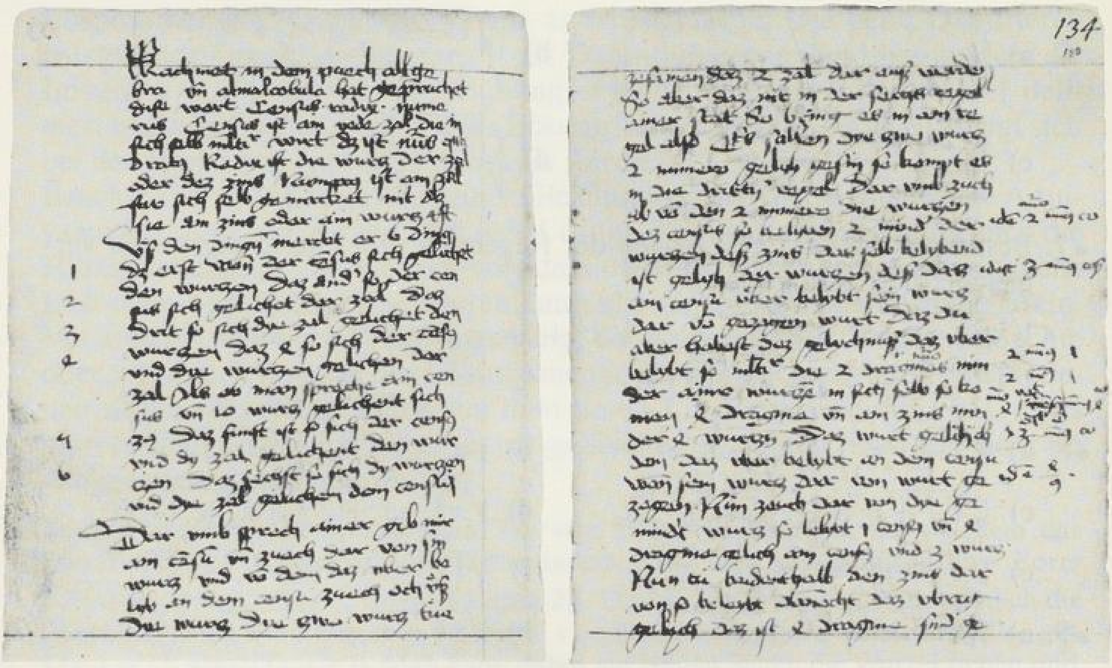

Abb. 68.1 Folium 133v und 134r der 3-seitigen *deutschen Algebra*, geschrieben am Tag des hl. Erasmus (= 2. Juni) des Jahres 1461, in der Bruchstücke und eine einzige Aufgabe aus AL-CHARIZMIS *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* auf Deutsch wiedergegeben sind. Der Text beginnt so: Machmet in dem puech algebra vnd almalcobula hat gepruchet dise wort Census · radix · numerus.* Sammelhandschrift *Codex latinus monacensis 14908*, Größe des Schriftblocks 9,7 cm × 5,8 cm.

**2.5.2 Wurzelgleichungen mit Parametern

Das Lösen von Wurzelgleichungen, in denen außer der Unbekannten auch noch Parameter vorkommen, erfordert im Allgemeinen Fallunterscheidungen. Bei der Untersuchung, ob eine Lösung der durch Quadrieren erhaltenen Hilfsgleichung auch die Ausgangsgleichung erfüllt, ist vor allem auch zu beachten, dass die auftretenden Radikanden nicht negativ sein dürfen.

Beispiel 1:

$$\sqrt{x+a^2} = \sqrt{2x+1} \;\Rightarrow\; x + a^2 = 2x + 1$$

$$x = a^2 - 1$$

$$\text{Probe: LS} = \sqrt{a^2 - 1 + a^2} = \sqrt{2a^2 - 1}$$

$$\text{RS} = \sqrt{2(a^2-1)+1} = \sqrt{2a^2 - 1}$$

* Der gesamte von Frater FRIDERICUS AMANN geschriebene Text ist im Lösungsheft abgedruckt. Vergleiche auch die Übersetzung GERHARD VON CREMONAS in unserer *Algebra 7*, Seite 10, und im zugehörigen Lösungsheft, Seite 4f.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

LS und RS sind jedoch nur definiert, wenn $2a^2 - 1 \geqq 0$ gilt, also für $|a| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ergebnis: $x = a^2 - 1$, falls $|a| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$; sonst $L = \{\,\}$.

Beispiel 2:

$$\sqrt{x+8a} = \sqrt{x} + 2a \Rightarrow x + 8a = x + 4a\sqrt{x} + 4a^2$$
$$a\sqrt{x} = 2a - a^2$$

Die Auflösung der letzten Gleichung nach $\sqrt{x}$ ist nur für $a \neq 0$ möglich. Also Fallunterscheidung:

$\boxed{a = 0}$ $0 \cdot \sqrt{x} = 0$; also $L = \mathbb{R}_0^+$, was auch für die Ausgangsgleichung gilt.

$\boxed{a \neq 0}$ $\sqrt{x} = 2 - a \Rightarrow x = (2-a)^2$

Probe: $\mathrm{LS} = \sqrt{(2-a)^2 + 8a} = \sqrt{4 + 4a + a^2} = \sqrt{(2+a)^2} = |2+a| =$

$$= \begin{cases} 2+a & \text{für} \quad a \geqq -2 \\ -(2+a) & \text{für} \quad a < -2 \end{cases}$$

$$\mathrm{RS} = \sqrt{(2-a)^2} + 2a = |2-a| + 2a = \begin{cases} 2+a & \text{für} \quad a \leqq 2 \\ -2+3a & \text{für} \quad a > 2 \end{cases}$$

Für $a \neq 0$ lautet somit das Ergebnis:

$L = \{(2-a)^2\}$ für $0 < |a| \leqq 2$; $\quad L = \{\,\}$ für $|a| > 2$.

Am Lösungsbaum lassen sich die verschiedenen Fälle übersichtlich darstellen (Abbildung 69.1):

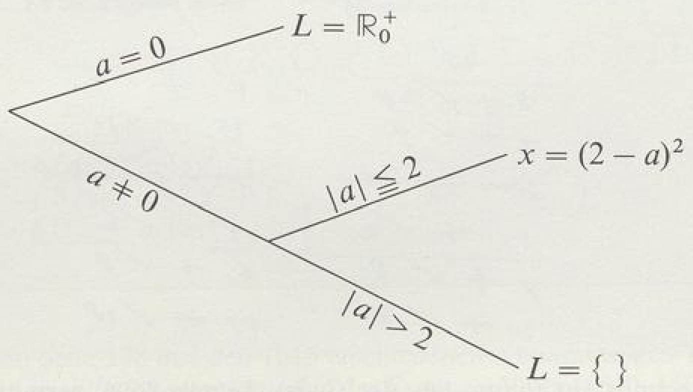

Abb. 69.1 Lösungsbaum zu Beispiel 2

Aufgaben

1. Löse die folgenden Parametergleichungen:

a) $\sqrt{x+a^2} = a+1$ **b)** $\sqrt{x+a} = a-1$

c) $\sqrt{x+a} = \sqrt{5a-x}$ **d)** $\sqrt{x+a} = \sqrt{a^2-x}$

e) $\sqrt{x^2+a} = \sqrt{a-x}$ **f)** $\sqrt{x^2-a^2} = x+a$

2. a) Zeige, dass die Gleichung $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a} = 2a$ genau dann lösbar ist, wenn die Bedingung $a = 0 \vee a \geqq 0{,}5$ erfüllt ist. Wie lautet jeweils die Lösung?

b) Für welche Werte von a ist die Gleichung $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a} = 2a$ lösbar und wie lautet die Lösung?

Zu den Aufgaben 3 bis 5:

Löse die Gleichung und zeichne einen Lösungsbaum.

3. a) $\sqrt{x^2+\frac{1}{a^2}} = \sqrt{x^2-1}+\frac{1}{a}$ **b)** $\sqrt{x+\frac{1}{a}}-\sqrt{x-\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$

• **4. a)** $\sqrt{ax^3+3} = \sqrt{3+a^3x}$ **b)** $\sqrt{x^2+a}-\sqrt{ax^2-2} = 0$

⁝ **5. a)** $\sqrt{x+2a^2} = a+\sqrt{x+a^2}$ **b)** $\sqrt{ax^2+x} = \sqrt{ax^2-x}+1$

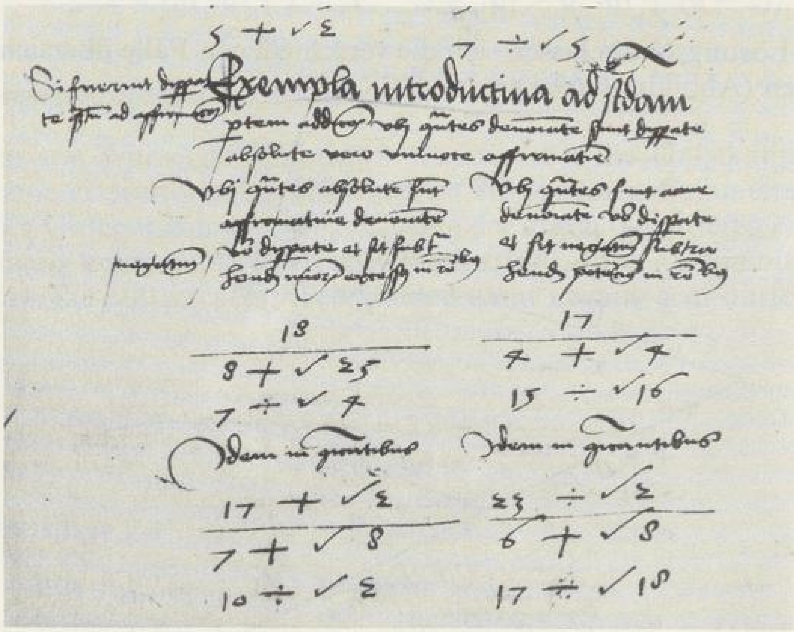

Abb. 70.1 Ausschnitt aus folium 64v des *Codex Leipzig 1696*, vermutlich aus dem Ende des 15. Jh.s