Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3 Die quadratische Gleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

3 Die quadratische Gleichung

Collectio Quarta.

CAP. XIIII.

PROPOSITIO I.

Si B + D in A
— A quad. } æquetur B in D.

A explicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D.

3 N. — 1 Q. *æquetur* 2. *fit* 1 N. 1. *vel* 2.

PROPOSTIO. II.

Si A cubus
— { B, D, G } in A quad.
+ { B in D, B in G, D in G } in A.
} æquetur B in D in G.

A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D, vel G.

1 C. — 6 Q. + 11 N. *æquatur* 6.

Fit 1 N. 1. 2. *vel* 3.

PROPOSITIO. III.

Si { B in D in G
+ B in D in H
+ B in G in H
+ D in G in H } in A

Ausschnitt von Seite 128 aus den 1615 erschienenen Abhandlungen *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo* des François VIÈTE (1540–1603). Propositio I ist der berühmte SATZ VON VIETA für eine Gleichung zweiten Grades.

3 Die quadratische Gleichung

3.1 Was ist eine quadratische Gleichung?

Du hast bisher meist nur mit linearen Gleichungen zu tun gehabt, die man auf die Form $ax + b = 0$ bringen kann. Für $a \neq 0$ ergibt sich $-\frac{b}{a}$ als einzige Lösung. Gelegentlich sind dir aber auch schon Gleichungen wie z. B. $x^2 = 4$ oder $x(x-2) = 0$ begegnet. Sie sind einfache Sonderfälle so genannter quadratischer Gleichungen.

> **Definition 72.1:** Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißt **quadratische Gleichung für x** oder auch **Gleichung zweiten Grades in x**.

Wegen $a \neq 0$ kommt x^2 in dieser Gleichung auch wirklich vor, und zwar als höchste Potenz der Unbekannten; daher der Name quadratische Gleichung bzw. Gleichung zweiten Grades. In Analogie dazu nennt man eine lineare Gleichung auch **Gleichung ersten Grades**.
Bei einer quadratischen Gleichung sind folgende Bezeichnungen üblich:
ax^2 heißt **quadratisches Glied**, bx **lineares Glied** und c die **Konstante*** der quadratischen Gleichung.
a, b und c sind die Koeffizienten der quadratischen Gleichung. Dividiert man die Gleichung durch a, dann ergibt sich die **Normalform** der quadratischen Gleichung, nämlich $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Dafür schreibt man gerne auch $x^2 + px + q = 0$.

**Zur Geschichte der quadratischen Gleichung

Aus der frühen Zeit der ägyptischen Mathematik sind uns nur ganz einfache quadratische Gleichungen des Typs $ax^2 = b$ überliefert (siehe Aufgabe 78/**14**). Im berühmten *Papyrus Rhind* wird überhaupt keine quadratische Gleichung behandelt.
Von den alten Babyloniern blieben uns hingegen aus der gleichen Zeit (ca. 20.–19. Jh. v. Chr.) viele Tontafeln in Keilschrift erhalten, die sich mit quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten beschäftigen (Aufgabe 97/**24**), viel öfter aber mit Gleichungssystemen mit zwei und mehr Unbekannten, wobei mindestens eine der auftretenden Gleichungen quadratisch ist (siehe **3.8**). Neben der Lösung ist auf vielen Tafeln auch der Lösungsweg angegeben (siehe Seite 86). Der geometrische Ursprung dieser Aufgaben ist aus den verwendeten Bezeichnungen wie »Länge«, »Breite« und »Fläche« ersichtlich. Die Babylonier haben sich aber sehr früh von dieser geometrischen Begriffswelt gelöst und verstehen unter diesen Wörtern, die bezeichnenderweise auch nicht dekliniert werden, meist nur mehr – modern ausgedrückt – die Unbekannten x und y und ihr Produkt xy. Wie wäre es sonst verständlich, dass sie eine Fläche und eine Seite

* Das Wort Konstante hat 1692 Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) in die Mathematik eingeführt.

addierten und eine Zahl erhielten! Sie haben bereits in früher Zeit eine Mathematik geschaffen, die nur mit Zahlen umgeht, anders als im alten Indien oder Ägypten, wo Mathematik im Gewande der Geometrie getrieben wurde. So sollen die ägyptischen Harpedonapten* durch Spannen von Seilen geometrische Konstruktionen und auch Beweise ausgeführt haben**.
Dieses geometrische Wissen brachten sowohl THALES (um 625–um 547 v. Chr.) wie auch PYTHAGORAS (um 570–um 497 v. Chr.) von ihren ägyptischen Studienaufenthalten mit. PYTHAGORAS – so berichtet uns der Volksredner ISOKRATES (436–338 v. Chr.) – soll dabei 525 anlässlich der Eroberung Ägyptens durch den Perserkönig KAMBYSES II. (reg. 529–522) nach Babylon verschleppt worden sein, wo er – dem Bericht des Neuplatonikers IAMBLICHOS VON CHALKIS (um 250–um 330 n. Chr.) zufolge – 7 Jahre verbrachte und dort in die Lehre von den Zahlen und der Musik eingeführt wurde. Die Entdeckung der PYTHAGOREER, daß z. B. $x^2 = 2$ im Bereich der Brüche nicht exakt lösbar ist, dass aber andererseits immer exakt eine Strecke konstruiert werden kann, sodass das darüber errichtete Quadrat den Flächeninhalt 2 hat, ließ die Griechen eine »geometrische Algebra«*** entwickeln, in der Flächen und Längen wie physikalische Größen behandelt werden. Die *Στοιχεῖα* (Stoicheîa) – »Elemente« – und die *Δεδομένα* (Dedoména), lateinisch *Data* – »Gegebenes« – EUKLIDS (um 300 v. Chr.) bezeugen, dass alle quadratischen Gleichungen mit positiven Lösungen – und nur solche waren zugelassen – durch geometrische Konstruktionen exakt gelöst werden konnten.
Natürlich ist die babylonische Zahlenmathematik nicht verloren gegangen. Man überließ sie aber den Praktikern, d. h. den Land- und Himmelsvermessern. So soll der berühmte Astronom HIPPARCH (Mitte des 2. Jh.s v. Chr.), arabischen Berichten zufolge, ein Lehrbuch über quadratische Gleichungen geschrieben haben. Mit DIOPHANT (um 250 n. Chr.) gelangte die alte babylonische Tradition des Rechnens mit Zahlen zu neuer Blüte. In seinen *Ἀριθμητικῶν βιβλία* (Arithmetikōn biblía) – »Bücher über die Zahlenlehre« – finden sich viele Aufgaben von derselben Art wie auf den babylonischen Keilschrifttafeln.
Quadratische Gleichungen werden auch im letzten der »Neun Bücher arithmetischer Technik«, dem *Chiu Chang Suan Shu* (China, 2. Jh. v. Chr.), gelöst, dem wir Aufgabe 98/**25** entnommen haben.
Die Leistungen der Inder und Araber, von denen das mittelalterliche Europa das Rechnen mit quadratischen Gleichungen lernte, schildern wir auf Seite 86ff.
Auch unsere Fachwörter haben ihre Geschichte.
Das griechische ἴσωσις (isosis) DIOPHANTS (um 250 n. Chr.) wurde zum lateinischen *aequatio*, das LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) in seinem *liber abaci* (1202) als Fachwort verwendet. Die Eindeutschung führt über *Vorgleichung* – 1518/21 Heinrich SCHREYBER, genannt GRAMMATEUS (1492/96?–1525) in seinem *Rechenbüchlein* – schließlich zu **Gleichung**, belegt 1695 bei Henrich HORCH in seinem Werk *Anfangs-Gründe einer Vernunfft- und Schrifft-übenden Zahl- und Buchstab-Rechenkunst / Deren diese sonst Algebra heisset*. Christian VON WOLFF (1679–1754) übernimmt das Wort Gleichung in *Die Anfangsgründe Aller Mathematischen Wissenschaften* 1710, wo sich auch der Fachausdruck **quadratische Gleichung** findet.
Mit dem Wort *gradus* bezeichnet 1591 François VIÈTE (1540–1603) in seiner *In artem analyticem Isagoge* die Höhe einer Potenz. Vom **Grad** einer Gleichung spricht dann 1675 Jean PRESTET (1652–1690) in seinen *Élémens des Mathematiques*.

* = Seilverknüpfer, von ἁρπεδόνη (harpedóne) = *Seil* und ἅπτειν (háptein) = *anknüpfen*

** CLEMENS von Alexandria (150–215) schreibt in seinen *Stromateis* (I, 15) diese Behauptung DEMOKRIT (um 460–um 370 v. Chr.) zu.

*** Den Ausdruck führte 1886 der dänische Mathematiker Hieronymus Georg ZEUTHEN (1839–1920) ein. 1925 entdeckte man in Bologna ein zwischen 1574 und 1587 geschriebenes Manuskript des Paolo BONASONI († nach 1593) mit dem Titel *Algebra geometrica*.

Aufgaben

1. Entscheide, ob eine quadratische Gleichung vorliegt. Bringe sie gegebenenfalls auf eine Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit positivem a und gib das lineare Glied und die Konstante an.

a) $3 - x^2 = x$ **b)** $3x^2 - 1 = x^2$
c) $x(x - x^2) = 0$ **d)** $(x-1)(1-x) = 3$
e) $(0{,}5x + 4)^2 = 0$ **f)** $x^2 - 1 = (x-1)^2$

2. Entscheide, für welche Unbekannte eine quadratische Gleichung vorliegt. Gib jeweils das lineare Glied und die Konstante an.

a) $x^2 y = -1$ **b)** $xy^2 = 3x + y^2$
c) $xy + y^2 = 3x^2$ **d)** $x^2 - xy^2 + y^3 = 1$
e) $a^3 b^2 - abx^2 + 2 = 0$ **f)** $(a+b)(a-b) = (a-b)^2$

3. Stelle die Normalform her.

a) $3x^2 - 6x + 15 = 0$ **b)** $1 - x^2 = 3x$
c) $-1{,}5x^2 + 4{,}5x = 2{,}7x^2 - 8{,}1$ **d)** $(1 - 5x)^2 = 5x - 1$
e) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}x)^2 = (\frac{1}{3} - \frac{3}{4}x)^2$ **•f)** $\sqrt{2}x = \sqrt{6}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{3}$

3.2 Spezialfälle von quadratischen Gleichungen

Einfache Spezialfälle der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ liegen vor, wenn ein Koeffizient der quadratischen Gleichung null ist. a selbst kann aber nicht null sein; denn sonst hätte man keine quadratische Gleichung.

3.2.1 Die rein quadratische Gleichung

Wenn $b = 0$ ist, fehlt das lineare Glied bx in der quadratischen Gleichung. Sie hat dann die Gestalt $ax^2 + c = 0$. Eine Gleichung dieser Bauart heißt **rein quadratisch**. Wegen $a \neq 0$ gewinnt man ihre Normalform zu $x^2 + \frac{c}{a} = 0$ bzw. $x^2 + q = 0$.

Für $q > 0$ ist die linke Seite sicher positiv; die Gleichung hat daher keine Lösung. Für $q = 0$ ergibt sich die Gleichung $x^2 = 0$. Sie hat die Lösung 0. Für $q < 0$ kann man mit Hilfe der 3. binomischen Formel die linke Seite faktorisieren. Wir zeigen es dir für $q = -49$:

$x^2 - 49 = 0$
$x^2 - 7^2 = 0$
$(x + 7)(x - 7) = 0$

Wie wir wissen, kann ein Produkt nur null sein, wenn mindestens ein Faktor null ist. Aus der letzten Zeile entsteht die Oder-Aussageform

$x+7=0 \vee x-7=0$ bzw.
$x=-7 \vee x=7$.

Wir erhalten also zwei Lösungen, nämlich $x_1=-7$ und $x_2=7$.
Selbstverständlich kann man die Methode des Faktorisierens auch anwenden, wenn $-q$ keine Quadratzahl ist. Nehmen wir als Beispiel $q=-5$:

$x^2-5=0$
$x^2-(\sqrt{5})^2=0$
$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$
$x=-\sqrt{5} \vee x=\sqrt{5}$. Also $x_1=-\sqrt{5}$ und $x_2=\sqrt{5}$.

Merke: Die rein quadratische Gleichung $x^2+q=0$ hat entweder keine, genau eine oder zwei Lösungen, je nachdem ob $q>0$, $q=0$ oder $q<0$ ist.

Die Lösungen der rein quadratischen Gleichung kann man aber statt durch Faktorisieren auch durch Radizieren finden. Es gilt nämlich

Satz 75.1: Sind die beiden Seiten einer Gleichung nicht negativ und radiziert man beide Seiten, so entsteht eine äquivalente Gleichung; kurz:

Für $T_1 \geqq 0$ und $T_2 \geqq 0$ gilt: $T_1=T_2 \Leftrightarrow \sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$

Beweis:

1) Ist u eine Lösung der Gleichung $T_1=T_2$ mit $T_1(u) \geqq 0$, dann gilt $T_1(u)= = T_2(u)$, also auch wegen der Eindeutigkeit der Wurzel $\sqrt{T_1(u)}=\sqrt{T_2(u)}$. Damit ist u auch eine Lösung der Gleichung $\sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$. Es gehen also beim Radizieren keine Lösungen verloren.

2) Ist nun umgekehrt v eine Lösung der Gleichung $\sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$, dann gilt $\sqrt{T_1(v)}=\sqrt{T_2(v)}$, woraus sich wegen der Eindeutigkeit des Quadrats $T_1(v)=T_2(v)$ ergibt. Das bedeutet aber, dass v auch eine Lösung der Gleichung $T_1=T_2$ ist. Es kann also beim Radizieren auch keine Lösung hinzugekommen sein.
Da somit beim Radizieren weder Lösungen hinzugekommen noch verloren gegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1=T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$ überein. Radizieren ist also eine Äquivalenzumformung.

Wir wenden Satz 75.1 auf unsere beiden obigen Beispiele an:

$x^2 - 49 = 0$	$x^2 - 5 = 0$
$x^2 = 49 \quad \Vert\sqrt{}$	$x^2 = 5 \quad \Vert\sqrt{}$
$\lvert x\rvert = 7$	$\lvert x\rvert = \sqrt{5}$
$x = -7 \vee x = 7.$	$x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}.$

Du siehst, beim Radizieren von Quadraten entstehen Absolutbeträge, die sich durch Fallunterscheidungen wieder beseitigen lassen. Betrachten wir dazu allgemein die Gleichung

$$x^2 = d^2 \quad \Vert\sqrt{}$$
$$|x| = |d|.$$

Weil zwei Zahlen mit gleichem Absolutbetrag entweder gleich oder entgegengesetzt gleich sind, bedeutet die letzte Gleichung dasselbe wie

$$x = d \vee x = -d.$$

Merke: $\boxed{|x| = |d| \quad \Leftrightarrow \quad x = d \vee x = -d}$

Aufgaben

1. a) $x^2 = 169$ **b)** $x^2 - 1024 = 0$ **c)** $x^2 = 6{,}25$
d) $x^2 - 0{,}0324 = 0$ **e)** $16 = 0{,}64x^2$ **f)** $2{,}56x^2 - 40{,}96 = 0$
g) $144x^2 = 1225$ **h)** $22\,500 - 2025x^2 = 0$ **i)** $10{,}89x^2 = 0{,}1936$

2. a) $2x^2 = 8$ **b)** $0{,}5x^2 = 8$ **c)** $5x^2 - 45 = 0$
d) $28 - 63x^2 = 0$ **e)** $\frac{x^2}{12} = \frac{1}{27}$ **f)** $\frac{x^2}{35} - \frac{7}{125} = 0$
g) $\frac{13}{6} = \frac{78x^2}{49}$ **h)** $\frac{22}{3} - \frac{24x^2}{11} = 0$ **i)** $\frac{0{,}125x^2}{3} = \frac{1{,}5}{4}$

Beachte bei den folgenden Aufgaben die Definitionsmengen!

3. a) $\frac{4x-1}{x+1} = \frac{x-1}{4x+1}$ **b)** $\frac{2x-5}{3x+10} = \frac{x}{2x+10}$
c) $\frac{x+10}{2x-5} + \frac{5x+4}{x+7} = 0$ **d)** $\frac{x+10}{2x+5} = \frac{5x-4}{x+7}$
• e) $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{7x+3}{2x+2}$ **• f)** $\frac{2x+7}{4x-6} = \frac{2x+2}{1{,}5-x}$
g) $\frac{16x-1}{x+4} = \frac{4x+25}{2-9x}$ **h)** $\frac{3x+2}{2x-3} = \frac{11x+8}{5x-9}$

4. a) $\frac{2x^2-5}{3}+2=\frac{3x^2+5}{6}$ b) $\frac{7x^2+1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{4x^2-2}{3}$

c) $\frac{1}{3x^2-2}=\frac{3}{17x^2-7}$ d) $\frac{5}{10-2x^2}+2=0$

e) $\frac{x-4}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}=0$ f) $\frac{8-20x}{9x^2-4}+\frac{x+6}{3x-2}=1$

5. a) $\frac{3}{x+2}-4=\frac{3}{x-2}$ b) $\frac{1}{5x+2}+\frac{4}{x-2}+7=0$

c) $\frac{6x-8}{3x}+2x=\frac{3x+4}{2}-x$ d) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}+2$

• **6.** Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

a) $ax^2=b^2$ b) $\left(\frac{x}{a}\right)^2-a^2=0$

c) $\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$ d) $a^2x^2-a=b^2x^2-b$

e) $(3x-2a)^2-(2x-3a)^2=4a^2$ f) $\frac{(bx-a)^2}{a^2}+\frac{2bx-a}{a}=b$

: **7.** Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

a) $x^2+a=b$ b) $ax^2=b$

c) $(x+2a)^2+(2x-a)^2=5a$ d) $(3x-2a)^2+64=(x-6a)^2$

e) $a(x-b)^2+ax(x+2b)=\frac{1}{a}$

f) $(ax+b)^2+(bx+a)^2=2a^2+2abx(x+2)$

8. a) $(x-7)^2=9$ b) $(x+2\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$ c) $(x+2)^2=2$

d) $(0{,}5x-1{,}5)^2=2{,}25$ e) $(x-3)^2=-3$ f) $(3-x)^2=3$

g) $(x-a)^2=b^2$ h) $(x+a)^2=(2x+a)^2$

9. a) $\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x+a}=2\frac{2}{3}$ b) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)}$

10. Multipliziert man $\frac{7}{50}$ einer Zahl mit $\frac{11}{18}$ derselben Zahl, dann ergibt sich 40733. Wie heißt die Zahl?

11. Länge und Breite eines Rechtecks verhalten sich wie 7 : 5, der Flächeninhalt ist 2240. Wie breit ist das Rechteck?

12. Zerlege die Zahl 11532 in zwei Faktoren, die sich wie 3 zu 4 verhalten.

13. Zerlege die Zahl z in zwei Faktoren, die sich wie $a:b$ verhalten. $(a, b, z \neq 0)$

14. *Aufgabe 6* aus dem *Papyrus Moskau* (18. Jh. v. Chr. nach einer Vorlage des 19. Jh.s v. Chr.): Ein Rechteck hat den Flächeninhalt 12. Für die Breite nimm $\frac{1}{2}$ der Länge $+\frac{1}{4}$ der Länge. Bestimme seine Seiten.

15. AL-CHARIZMI (um 780–nach 847) löste in seiner *Algebra* folgende Aufgaben:

a) *Das zweite der 6 Probleme* (siehe Seite 87): Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Multipliziere ich den ersten Teil mit sich selbst und das Erhaltene mit $2\frac{7}{9}$, dann ergibt sich dasselbe, wie wenn ich 10 mit sich selbst multipliziere. Wie groß sind die Teile?

b) Multipliziere eine Zahl mit sich selbst, nimm das Vierfache, und du hast 20. Wie groß ist die Zahl?

c) *Das dritte der 6 Probleme:* Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Dann habe ich den einen durch den anderen dividiert und 4 erhalten. Wie groß sind die Teile?

Zu den Aufgaben 16 bis 19: Leonhard EULER (1707–1783) veröffentlichte 1770 in Petersburg seine *Vollständige Anleitung zur Algebra* (bereits 1768 auf russisch erschienen), der wir die folgenden Aufgaben entnommen haben.*

16. Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte, mit ihrem Drittel multipliziert, 24 gibt.

17. Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, dass, wenn man zu derselben 5 addiert und ebenso von ihr auch 5 subtrahiert, jene Summe mit dieser Differenz multipliziert 96 beträgt.

•**18.** Von 3 Personen besitzt die erste so oft 7 Reichstaler wie die zweite 3 Reichstaler hat; und so oft die zweite 17 Reichstaler besitzt, hat die dritte 5 Reichstaler. Wenn man aber das Geld der ersten mit dem Gelde der zweiten und das Geld der zweiten mit dem Gelde der dritten und endlich das Geld der dritten mit dem Gelde der ersten multipliziert, hierauf diese drei Produkte addiert, so ist die Summe $3830\frac{2}{3}$. Wie viel Geld hat nun jede gehabt?

19. Einige Kaufleute bestellen einen Faktor [= Leiter einer Handelsniederlassung] und schicken ihn nach Archangel, um daselbst einen Handel abzuschließen. Jeder von ihnen hat zehnmal so viel Reichstaler eingelegt, wie es Personen sind. Nun gewinnt der Faktor an je 100 Reichstalern zweimal so viel, wie die Anzahl der Personen ist. Wenn man dann den 100. Teil des ganzen Gewinns mit $2\frac{2}{9}$ multipliziert, so kommt die Zahl der Gesellschafter heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

* 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 5, Aufgaben I, II, IV und V

3.2.2 Die Konstante ist null

Ist die Konstante null, d. h., gilt $c = 0$, dann hat die quadratische Gleichung die Gestalt $ax^2 + bx = 0$.
Man löst sie durch Faktorisieren:

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$
$$x = 0 \vee ax + b = 0$$
$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \qquad (a \neq 0).$$

Wir erhalten also zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Für $b = 0$ ergibt sich 0 als einzige Lösung.
Beim Gleichungstyp $ax^2 + bx = 0$ ist also 0 immer eine Lösung.
Diese Lösung ginge verloren, wenn jemand glaubte, er könne die Gleichung $ax^2 + bx = 0$ dadurch vereinfachen, dass er durch die Variable x dividiert und nur noch $ax + b = 0$ löst.

Merke: Durch einen Term darf man nur dividieren, wenn er nicht null ist.

Aufgaben

1. **a)** $x^2 - 5x = 0$ **b)** $3x^2 + 8x = 0$ **c)** $15x^2 = 18x$
d) $14x^2 + 3\frac{1}{2}x = 0$ **e)** $x^2 = x$ **f)** $x^2 = -x$

2. **a)** $0{,}12x^2 + 2x = 3{,}08x$ **b)** $\sqrt{2}x + 5x^2 = 0$
c) $3x^2 - \sqrt{3}x = x - \sqrt{3}x^2$ **d)** $\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x = -\frac{1}{2}\sqrt{5}x^2 + \frac{1}{3}\sqrt{6}x$
e) $\sqrt{10}x^2 + \sqrt{5}x = 0$ **f)** $-\frac{\sqrt{15}}{15}x = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{5}}x^2$

3. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):
a) $x(x + \sqrt{10}) = 9x^2$ **b)** $x(x + \sqrt{10}) = 9x$

4. *Das erste der 6 Probleme* des AL-CHARIZMI aus seiner *Algebra* (siehe Seite 87): Ich habe 10 in zwei Teile geteilt und den einen mit dem anderen multipliziert. Multipliziere ich aber den einen Teil mit sich selbst, dann erhalte ich viermal so viel wie zuvor. Wie groß sind die Teile?

5. Al-Charizmi behandelt weitere Beispiele quadratischer Gleichungen. In moderner Schreibweise lauten sie:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{1}{7}x$ **b)** $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{4}{5}x$

c) $\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x = x$ **d)** $\frac{x^2 - 4x}{3} = 4x$

Bestimme die Lösungen.

6. a) $x^2 - 2ax = 0$ **b)** $x^2 + \frac{a-b}{2}x = 0$

c) $ax^2 = \frac{a+b}{2}x$ **d)** $a^2x^2 - 2bx = 4b^2x^2 - ax$

3.3 Die quadratische Ergänzung

Quadratische Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$ und $ax^2 + bx = 0$ können wir schon lösen. Was aber machen wir bei einer allgemeinen quadratischen Gleichung? Gelingt es, die linke Seite durch Probieren zu faktorisieren, dann ist das Problem gelöst. Dazu

Beispiel 1:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$(x+5)(x-1) = 0$$
$$x + 5 = 0 \vee x - 1 = 0$$
$$x = -5 \vee x = 1.$$

Beispiel 2:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$
$$(2x-3)(x-1) = 0$$
$$2x - 3 = 0 \vee x - 1 = 0$$
$$x = \tfrac{3}{2} \vee x = 1.$$

Leider wird dieses Probier-Verfahren nur in den seltensten Fällen zum Ziel führen. Wenn es gelingt, dann ist es aber auch das schnellste Verfahren. Wir brauchen jedoch eine Methode, die immer zum Ziel führt.
Dazu formen wir die Gleichung schrittweise so um, dass eine rein quadratische Gleichung entsteht, die wir schon lösen können. Wir zeigen es dir anhand einer Gleichung, die Al-Charizmi (um 780–nach 847) in seinem *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* – »Handbuch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen« – behandelt, und verfolgen seinen Lösungsweg.

Beispiel 3: $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$

1. Schritt: Herstellen der Normalform

$x^2 + 10x - 56 = 0$

2. Schritt: Ergänzen zum Quadrat

Wir fassen den Term $x^2 + 10x$ als Anfang der linken Seite der 1. binomischen Formel $x^2 + 2ux + u^2 = (x+u)^2$ auf. Der Koeffizient von x muss dann $2u$ sein. Es gilt also $2u = 10$ und damit $u = 5$. Wir ergänzen nun das fehlende u^2, d.h. 5^2, und ziehen es gleich wieder ab, um die Konstante nicht zu verändern:

$x^2 + 10x + 5^2 - 25 - 56 = 0$.

Die ersten drei Glieder ergeben ein Quadrat:

$(x^2 + 10x + 5^2) - 81 = 0$

$(x + 5)^2 - 81 = 0$.

Das ist eine rein quadratische Gleichung für $(x + 5)$.

3. Schritt: Lösen der rein quadratischen Gleichung

durch Faktorisieren	oder	durch Radizieren
$(x + 5)^2 - 9^2 = 0$		$(x + 5)^2 = 81 \quad \| \sqrt{}$
$[(x + 5) + 9][(x + 5) - 9] = 0$		$\|x + 5\| = 9$
$(x + 14)(x - 4) = 0$		$x + 5 = -9 \vee x + 5 = 9$
$x = -14 \vee x = 4$.		$x = -14 \vee x = 4$.

Das vorgeführte Lösungsverfahren heißt Lösen durch **quadratische Ergänzung**.

Als »quadratische Ergänzung« bezeichnet man aber nicht nur das Lösungsverfahren, sondern auch den Term u^2, mit dem man ergänzt.

Merke: Man halbiert den Koeffizienten des linearen Glieds, quadriert und ergänzt.

Wie du schon weißt, hat die rein quadratische Gleichung zwei, eine oder gar keine Lösung. Dasselbe gilt natürlich dann auch für jede quadratische Gleichung, wenn wir sie in eine äquivalente rein quadratische Gleichung umformen können.

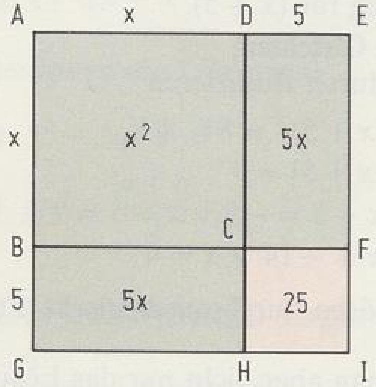
AL-CHARIZMI zeigt seinen Lesern mittels eines geometrischen Beweises (vgl. Abbildung 82.1) – er hatte ja noch keine Buchstabenrechnung –, dass die Methode der quadratischen Ergänzung richtig ist. Vielleicht helfen dir seine Gedanken auch zu einem besseren Verständnis dieses Verfahrens. Er schreibt:*

Wir gehen aus vom Quadrat ABCD, dessen Flächeninhalt gleich der gesuchten Quadratzahl x^2 ist. Unser nächstes Anliegen ist es, ihm eine Fläche vom Inhalt 10-mal der gesuchten Zahl, also $10x$, hinzuzufügen. Zu diesem Zweck halbieren wir die 10, das ergibt 5, und konstruieren an zwei Seiten des Quadrats ABCD zwei Rechtecke, nämlich CBGH und DCFE, und zwar so, dass jeweils die Längsseite 5 misst – das ist die Hälfte des Koeffizienten 10 von x –, wohingegen die Breite jeweils gleich der Quadratseite x ist. Dabei entsteht an der Ecke C ein Quadrat, nämlich FCHI. Dessen Inhalt ist 5 mit sich multipliziert: Diese 5 ist die Hälfte des Koeffizienten der Unbekannten x, die wir an jeder Seite des Ausgangsquadrats als Strecken [BG] und [DE] angefügt haben. Jetzt können wir sagen, dass das erste Quadrat mit dem Inhalt x^2 und die zwei Rechtecke an seinen Seiten, die zusammen $10x$ haben, insgesamt 56 ausmachen. Um nun zum großen Quadrat AGIE vervollständigen zu können, fehlt uns nur mehr die Qua-

* Wir haben den Text nur wenig modernisieren und dem Beispiel 3 anpassen müssen. Natürlich gibt es bei AL-CHARIZMI noch keinen Buchstaben x; auch »Koeffizient« drückt er umständlicher aus. Quadrate und Rechtecke werden nur durch die Diagonalecken – wie bei EUKLID – bezeichnet; das Quadrat ABCD heißt also nur AC usw. Seine Figur stimmt übrigens genau mit der EUKLIDS aus Buch II der *Elemente* überein; nur der mathematische Inhalt dazu wird anders formuliert. So lautet der zugehörige Satz 4 bei EUKLID: »Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist ihr Quadrat gleich der Summe der Quadrate der beiden Teilstrecken, vermehrt um ihr doppeltes Rechteck.« Teilen wir also [AE] in D, so gilt

$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DE}$.

dratzahl, die aus 5 mit sich multipliziert entsteht, also 25. Diese addieren wir zu 56 und haben damit zum großen Quadrat AGIE ergänzt. Als Summe erhalten wir 81. Wir ziehen die Wurzel, das ergibt 9, und das ist die Seite des großen Quadrats. Ziehen wir davon dasselbe ab, was wir vorher hinzugezählt haben, nämlich 5, dann erhalten wir als Rest 4. Dies ist die Seite des Quadrats ABCD, die man gesucht hat.



$$x^2 + 10x = 56$$
$$x^2 + 2 \cdot \tfrac{10}{2}x = 56$$
$$x^2 + 2 \cdot (5x) = 56$$
$$x^2 + 2 \cdot (5x) + 5^2 = 56 + 25$$
$$(x+5)^2 = 81$$

Abb. 82.1 Die Zeichnung des AL-CHARIZMI zum Beweis der quadratischen Ergänzung

Aufgaben

1. Löse durch Faktorisieren.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **b)** $z^2 + 6z + 8 = 0$
c) $y^2 + y - 20 = 0$ **d)** $\mu^2 - 5\mu - 24 - 0$

2. Ergänze zum Quadrat.

a) $x^2 + 4x$ **b)** $x^2 - 8x$ **c)** $x^2 - 24x$
d) $x^2 - 0{,}6x$ **e)** $x^2 + 1{,}8x$ **f)** $x^2 - 0{,}5x$
g) $x^2 + 1{,}3x$ **h)** $x^2 + \frac{5}{8}x$ **i)** $x^2 - \frac{9}{4}x$

3. Ergänze zum Quadrat.

a) $x^2 + 3\frac{1}{2}x$ **b)** $x^2 - 3\frac{1}{4}x$ **c)** $x^2 + 2\frac{1}{5}x$
d) $x^2 - 3ax$ **e)** $x^2 + \dfrac{a+b}{2}x$ **f)** $x^2 - 3 \cdot \dfrac{2a-3b}{2}x$
g) $x^2 + 10\sqrt{7}x$ **h)** $x^2 - 7\sqrt{10}x$ **i)** $x^2 - \frac{4}{5}\sqrt{15}x$

4. a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ **b)** $x^2 - 2x - 3 = 0$
c) $x^2 + 11x + 28 = 0$ **d)** $x^2 + 12x + 36 = 0$
e)* $x(x + \sqrt{10}) = 20$ **f)*** $x^2 - (20 + \sqrt{10})x + 100 = 0$

5. a) $x^2 + 10x + 30 = 0$ **b)** $y^2 + 4y = 1$
c) $u^2 + 7 = 8u$ **d)** $v^2 = 3 - 2v$

* aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240)

6. a) $2x^2 - 28x + 98 = 0$ **b)** $-3z^2 + 12z + 63 = 0$
c) $-5u^2 + 120u - 730 = 0$ **d)** $8x^2 + 80x + 72 = 0$

7. a) $3x^2 + x - 2 = 0$ **b)** $\frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{3}z - 1 = 0$
c) $2u^2 - 3u + 4 = 0$ **d)** $1{,}5y^2 + 2y - 7{,}5 = 0$

8. a) $x^2 + 4kx - 5k^2 = 0$ **b)** $x^2 + 4ax + a^2 = 0$
c) $x^2 - 2nx = 6mn + 9m^2$ **d)** $rx^2 - 2r^2x = rs - r^3$

3.4 Diskriminante und Lösungsformel

Wenn ein Mathematiker immer wieder gleichartige Aufgaben lösen muss, dann wird er dessen bald müde und er beginnt zu überlegen, ob sich nicht eine Formel finden lässt, mit der er ein für alle Mal alle Aufgaben dieses Typs lösen kann. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung entwickeln wir nun eine solche Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung.

$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

1. Schritt: Herstellen der Normalform

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2. Schritt: Ergänzen zum Quadrat

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

3. Schritt: Lösen der rein quadratischen Gleichung durch Faktorisieren
Die Faktorisierung lässt sich nur durchführen, wenn der Term $b^2 - 4ac$ nicht negativ ist. Ist er negativ, dann gibt es keine Lösung.

Ist er null, dann ist $x = -\dfrac{b}{2a}$ die einzige Lösung.

Ist er positiv, dann gibt es zwei Lösungen, die wir durch Faktorisieren finden, da man in diesem Fall $b^2 - 4ac$ als $(\sqrt{b^2 - 4ac})^2$ schreiben kann. Es gilt dann also

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0$$

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$x = -\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Für diese Oder-Aussageform schreibt man oft kurz unter Verwendung des 1631 von William OUGHTRED (1574–1660) in seinem *Clavis mathematicae* – »Schlüssel der Mathematik« – eingeführten Zeichens $\pm$, gelesen »plus oder minus«

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Damit haben wir einen formelmäßigen Ausdruck für die beiden Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung, nämlich

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

oder kurz

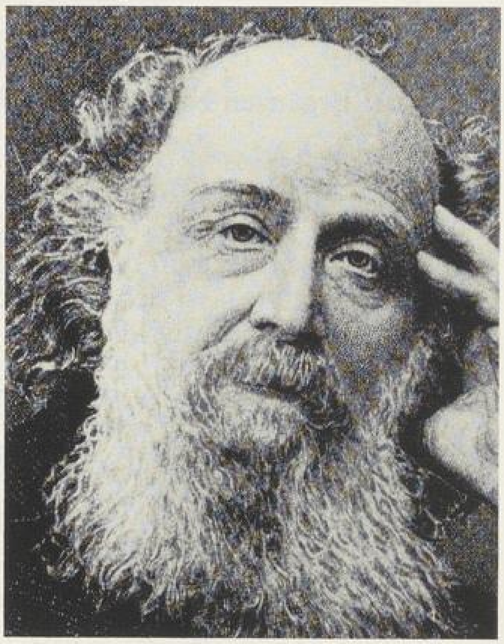
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Über die Existenz von Lösungen und über ihre Anzahl entscheidet, wie wir oben gesehen haben, der Term

$$b^2 - 4ac.$$

Der englische Mathematiker James Joseph SYLVESTER (1814–1897) gab ihm deshalb 1851 den Namen Diskriminante*. Wir kürzen diesen Ausdruck mit D ab. Wegen seiner Bedeutung merken wir uns

Definition 84.1: $D := b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante** der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.



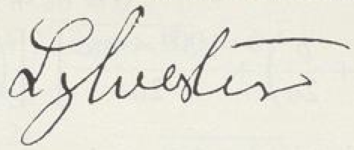


Abb. 84.1 James Joseph SYLVESTER (3.9.1814 London–15.3.1897 ebd.)

* discriminare (lat.) = trennen, unterscheiden. Diskriminante ist eine der vielen Wortschöpfungen SYLVESTERS.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in

Satz 85.1: Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ hat

für $D > 0$ die Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

für $D = 0$ die Lösung $x = -\dfrac{b}{2a}$

für $D < 0$ keine Lösung.

Praktisches Vorgehen bei der Anwendung der Lösungsformel:

1) Treten in den Koeffizienten der Gleichung Nenner auf, so beseitigt man diese durch Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner.
2) Ist der Koeffizient des quadratischen Glieds negativ, dann multipliziert man die Gleichung mit -1.
3) Da D die entscheidende Rolle spielt, berechnet man nun D.
   Ist $D < 0$, so ist man fertig.
   Ist $D = 0$, so ist $x = -\dfrac{b}{2a}$ die einzige Lösung.
   Ist $D > 0$, so erhält man die Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Beispiel 1:

$$-5x^2 + 8x + 21 = 0 \quad \| \cdot (-1)$$
$$5x^2 - 8x - 21 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-21) = \\ &= 64 + 420 = \\ &= 484; \\ \sqrt{D} &= 22. \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm 22}{2 \cdot 5}$$
$$x_1 = -\tfrac{7}{5}, \quad x_2 = 3.$$

Beispiel 2:

$$\tfrac{5}{6}x^2 + \tfrac{10}{9}x + \tfrac{10}{27} = 0 \quad \| \cdot \tfrac{54}{5}$$
$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = \\ &= 144 - 144 = 0; \\ \sqrt{D} &= 0. \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 0}{2 \cdot 9}$$
$$x = -\tfrac{2}{3}.$$

Beispiel 3:

$$x^2+x+1=0 \qquad D=1^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3.$$

Keine Lösung.

**Zur Geschichte der Lösungsformel

Der Wunsch nach einer Lösungsformel für eine quadratische Gleichung ist so alt wie die Gleichung selbst. Solange man aber nicht über eine algebraische Formelsprache verfügte, konnte man den Lösungsweg nur in Worten angeben. Anhand der Aufgabe 1 der Keilschrifttafel BM 13901 (20. Jh. v. Chr.) zeigen wir dir dieses Vorgehen. Wir stellen links den babylonischen Text, rechts die moderne algebraische Form unter Verwendung allgemeiner positiver Koeffizienten B und C dar.

Die Fläche und die Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{3}{4}$ ist es.	$x^2+x=\frac{3}{4}$
1, den Koeffizienten, nimmst du.	$1=B$
Die Hälfte von 1 brichst du ab, es ist $\frac{1}{2}$.	$\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ multiplizierst du, es ist $\frac{1}{4}$.	$\left(\frac{B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ fügst du hinzu, es ist 1.	$\left(\frac{B}{2}\right)^2+C=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$
1 hat als Quadratwurzel 1.	$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2+C}=1$
$\frac{1}{2}$, das du mit sich multipliziert hast, von 1 subtrahierst du, es ist $\frac{1}{2}$;	$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2+C}-\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$
und das ist die Quadratseite.	$x=\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2+C}-\frac{B}{2}$

Die gegebene Gleichung hat die Normalform $x^2+x+(-\frac{3}{4})=0$, d.h., $a=1$, $b=1=B$ und $c=-\frac{3}{4}=-C$. Mit unserer Formel erhalten wir als positive Lösung

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-B+\sqrt{B^2+4\cdot 1\cdot C}}{2\cdot 1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-B+2\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2+C}\right)=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2+C}-\frac{B}{2},$$

also das Ergebnis der Babylonier.

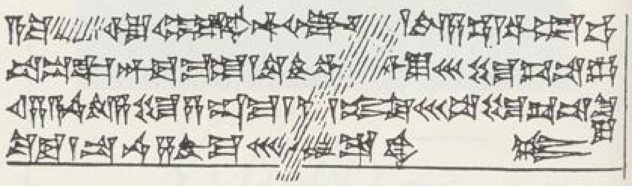


Abb. 86.1 Autographie der Aufgabe 1 der Keilschrifttafel BM 13901, aufbewahrt im **B**ritish **M**useum zu London

Nun gab es lange Zeit keine Null und erst recht keine negativen Zahlen, sodass diese auch nicht als Koeffizienten auftreten konnten. Daher gab es auch nicht *eine* quadratische Gleichung, sondern 5 verschiedene Typen. Und für jeden Typ musste ein eigenes Lösungsverfahren angegeben werden (siehe unten). Wir können fast sicher sein, dass DIOPHANT (um 250 n. Chr.) über all diese Verfahren verfügte, wenn wir auch keinen Beleg dafür haben; denn jedes Mal, wenn bei ihm eine quadratische Gleichung vorkommt, gibt er die Lösung richtig an.
Seine *Arithmetik* soll 13 Bücher umfasst haben, von denen uns nur 6 auf Griechisch überliefert wurden. Vor wenigen Jahren fand man eine um 900 angefertigte arabische Übersetzung von 4 weiteren Büchern. In den nun bekannten 10 Büchern findet man keine Theorie der quadratischen Gleichungen. Wir können nur hoffen, dass sich die letzten 3 Bücher auch noch finden!
Durch die Einführung der negativen Zahlen und auch der Null als Koeffizienten war es den Indern möglich, alle Gleichungen auf eine Standardform zu bringen und zu lösen. So verlangt BRAHMAGUPTA (598 – nach 665), jede quadratische Gleichung – in unserer Schreibweise – auf die Form $ax^2 + bx = d$ zu bringen und dann gemäß $x = \frac{\sqrt{4ad + b^2} - b}{2a}$ zu lösen. Mit unserem $c = -d$ ist dies fast schon unsere Lösungsformel. Es fehlt nur noch das $\pm$. Wir müssen sogar annehmen, dass bereits sein Vorgänger ARYABHATA I (um 476–?) auf diese Art quadratische Gleichungen löste (siehe Aufgabe 101/**27**).
Leider übernahmen die Araber von den Indern nicht die negativen Zahlen – ein algebraischer Rückschritt! –, sodass es bei ihnen auch keine Standardform mit Lösungsformel gibt. Einen Überblick über alle möglichen Formen bringt AL-CHARIZMI (um 780 – nach 847) gleich zu Beginn seines *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* – »Handbuch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen«. Wir müssen uns dabei erinnern (vgl. Abbildung 68.1), dass er darin drei Begriffe verwendet:
- die Wurzel; darunter versteht man alles, was mit sich multipliziert werden kann;
- das Vermögen; darunter versteht man alles, was sich durch Multiplizieren der Wurzel mit sich selbst ergibt;
- die (reine) Zahl; darunter versteht man alles, was ausgesprochen werden kann ohne Beziehung zu Wurzel und Vermögen.

Und nun sagt AL-CHARIZMI, dass zunächst je zwei von diesen dreien (oder Vielfache davon) untereinander gleich sein können, dass man aber auch jeweils zwei addieren und der 3. Art gleichsetzen könne. Dadurch entstehen 6 Typen von Gleichungen, die zur Grundlage der abendländischen Gleichungslehre wurden. Deutet man »Wurzel« als Unbekannte x, so wird »Vermögen« zu x^2, und es entstehen quadratische Gleichungen.* Mit positiven A, B und C können wir den arabischen Text modern umschreiben:

(A1)	Vermögen sind Wurzeln gleich.	$Ax^2 = Bx$
(A2)	Vermögen sind einer Zahl gleich.	$Ax^2 = C$
(A3)	Wurzeln sind einer Zahl gleich.	$Bx = C$
(B1)	Vermögen und Wurzeln sind einer Zahl gleich.	$Ax^2 + Bx = C$
(B2)	Vermögen und Zahl sind Wurzeln gleich.	$Ax^2 + C = Bx$
(B3)	Wurzeln und Zahl sind Vermögen gleich.	$Bx + C = Ax^2$

Jede dieser 6 Typen führt AL-CHARIZMI an einem Problem vor. Dabei bereiten die

* Natürlich kann man auch »Vermögen« als Unbekannte x wählen, was in vielen Aufgaben zweckmäßig ist. Weil dies in den Übersetzungen aber fast nie getan wurde, entstanden viele Ungereimtheiten und Missverständnisse. Siehe z. B. Aufgabe 94/**11i**.

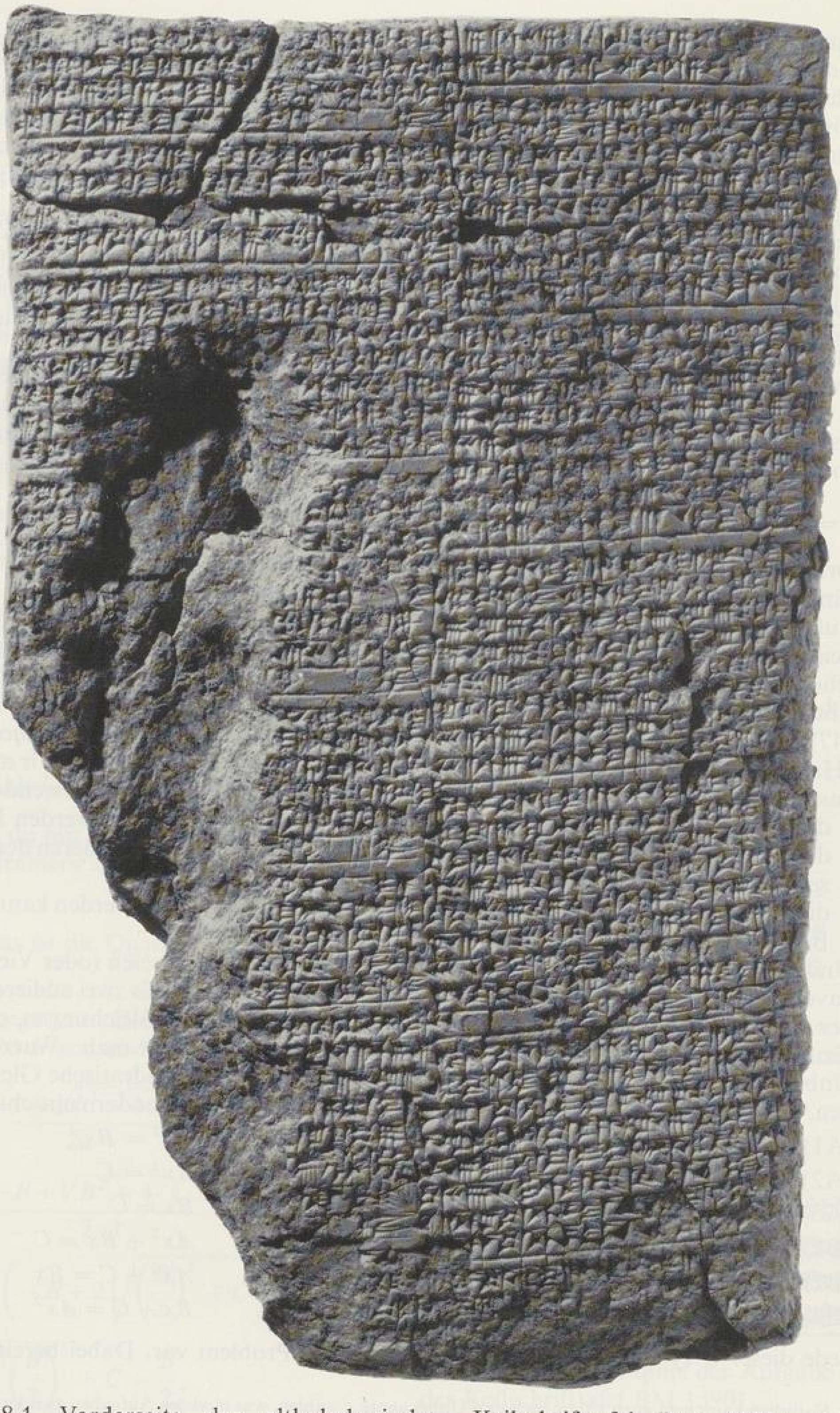


Abb. 88.1 Vorderseite der altbabylonischen Keilschrifttafel BM 13901, ca. 12 cm × 20 cm groß

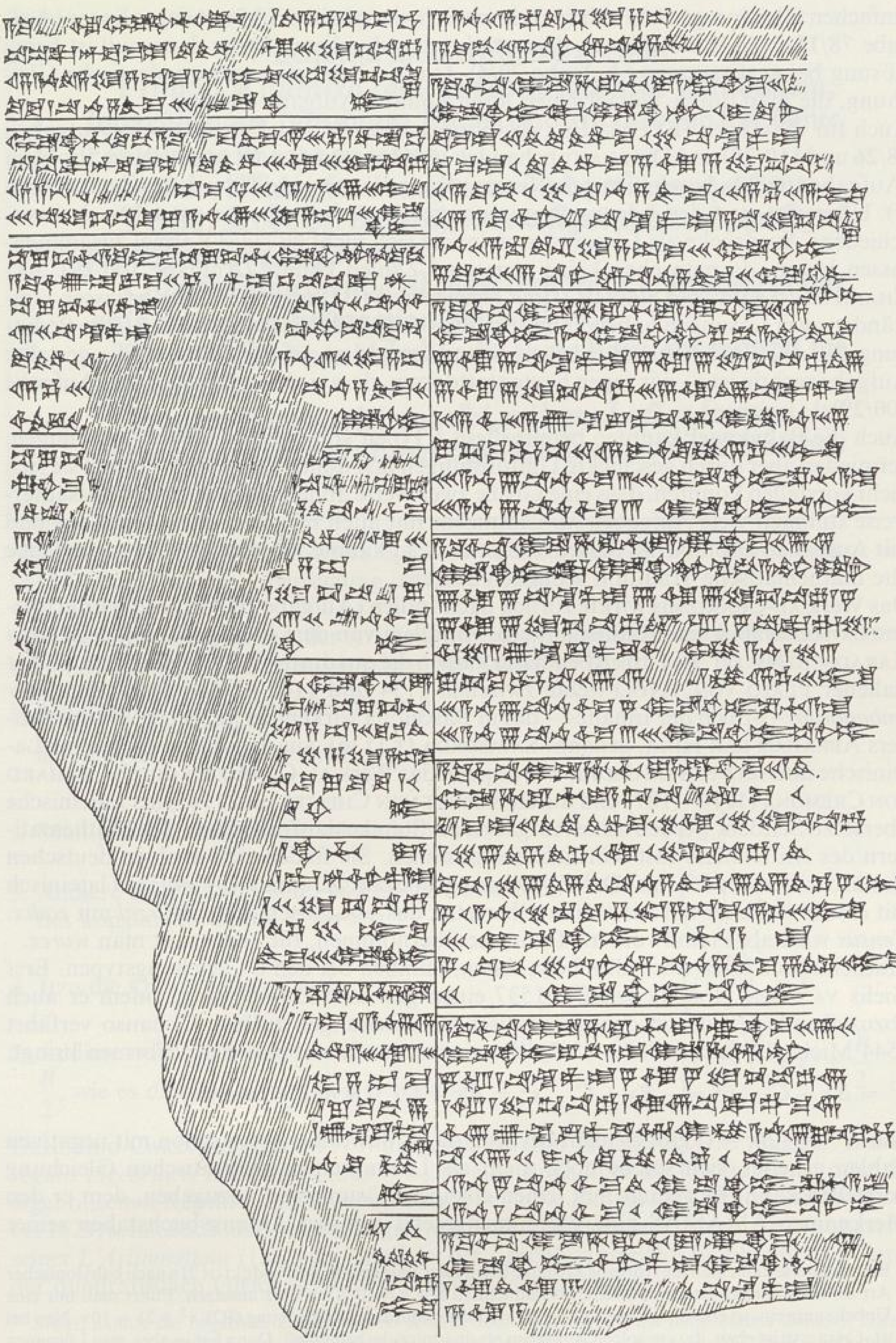


Abb. 89.1 Autographie der in Abbildung 88.1 wiedergegebenen altbabylonischen Keilschrifttafel BM 13901

einfachen Gleichungen (A1) bis (A3) keine Schwierigkeiten. (A3) ist sogar linear (Aufgabe 78/**15c**). (A1) wird linear, da man durch x dividieren kann; denn null ist keine Lösung bei AL-CHARIZMI (Aufgabe 79/**4**). Und (A2) ist eine rein quadratische Gleichung, die man durch Wurzelziehen lösen konnte (Aufgabe 78/**15a**).
Auch für die Typen (B1) bis (B3), die übrigens bereits von EUKLID (siehe Aufgaben 98/**26** und 110/**25**) und DIOPHANT behandelt worden waren, stellt er jeweils ein Problem (Aufgabe 100/**28**), beschreibt den Lösungsweg in Worten und beweist ihn geometrisch (!). Übersetzt man den Lösungsweg in unsere Formelsprache, so entstehen drei verschiedene Ausdrücke als Lösungsformeln, die sich nicht zu *einer* Formel zusammenfassen lassen, da man eben keine negativen Zahlen kannte (Aufgabe 100/**29**). AL-CHARIZMI erkennt aber, dass (B2) im Gegensatz zu (B1) und (B3) unter gewissen Umständen zwei Lösungen haben kann. Er gibt – natürlich wieder in Worten – die Bedingung für zwei und für eine einzige Lösung an und sogar dafür, dass »die gestellte Aufgabe nichtig ist« – wir sagen heute stattdessen, dass sie keine Lösung hat (Aufgabe 100/**29**).
Auch die Babylonier kannten bereits diese 3 Typen von quadratischen Gleichungen, vermieden aber durch geschickte Umformungen fast immer den Typ (B2), weil sie sich nicht vorstellen konnten, dass eine Größe zwei Werte annehmen sollte.* Interessanterweise stimmen viele Aufgaben AL-CHARIZMIS mit alten babylonischen Aufgaben und mit Aufgaben DIOPHANTS, dessen Werke er nicht kannte, überein, sodass wir auf eine alte mathematische Tradition schließen dürfen.
Das Werk AL-CHARIZMIS wirkte zurück nach Indien (Aufgabe 100/**30**) und wurde fortgesetzt von arabischen Mathematikern, vor allem von dem in Bagdad wirkenden AL-KARADSCHI (10./11. Jh.). Ins Abendland kamen die quadratischen Gleichungen, als der Italiener PLATO VON TIVOLI (lebte zwischen 1134 und 1145 in Barcelona) den *liber embadorum* – »Buch der Inhalte« – des in Barcelona wirkenden jüdischen Mathematikers ABRAHAM BAR HIJJA, genannt SAVASORDA († 1136), aus dem Hebräischen ins Lateinische übersetzte. Bald darauf wurde auch das Werk AL-CHARIZMIS durch GERHARD VON CREMONA (1114–1187) und durch ROBERT VON CHESTER (um 1145) ins Lateinische übersetzt. Seitdem werden seine Aufgaben als Standardaufgaben von den Mathematikern des Mittelalters fast wörtlich übernommen. Sie finden sich auch in deutschen Handschriften des 15. Jh.s. Dabei wird das arabische مال (māl) = *Vermögen* lateinisch mit *census* (seltener mit *substantia*) übersetzt, das جذر (dschidr) = *Wurzel* mit *radix*. *Census* wird als Fremdwort ins Deutsche übernommen, für *radix* sagt man *wurcz*.
Mathematisch blieb aber alles beim Alten, nämlich bei den 6 Gleichungstypen. Erst Gielis VAN DEN HOECKE schaffte 1537 einen gewissen Durchbruch, indem er auch abzuziehende Glieder in den quadratischen Gleichungen zulässt. Genauso verfährt 1544 Michael STIFEL (1487?–1567), der sie damit alle auf eine der 3 Formen bringt:

$$x^2 = Bx + C, \quad x^2 = -Bx + C, \quad x^2 = Bx - C. \quad (B \text{ und } C \text{ positiv})$$

Nur $x^2 = -Bx - C$ gibt es nicht bei ihm, da er, obwohl er sonst schon mit negativen Zahlen arbeitet, sich solche noch nicht als Lösung einer quadratischen Gleichung vorstellen kann. Es gelingt ihm, einen einzigen Lösungsweg anzugeben, dem er den Merknamen AMASIAS gibt, zusammengesetzt aus den Anfangsbuchstaben seiner

* Beispielsweise kann man die Aufgabe »10 habe ich in zwei Teile geteilt, ihr Produkt ist 21« nach babylonischer Art als Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zu $x + y = 10 \wedge xy = 21$ ansetzen. Führt man nur eine Unbekannte ein, so erhält man aus $x(10 - x) = 21$ die quadratische Gleichung (B2) $x^2 + 21 = 10x$. Neu bei AL-CHARIZMI ist eben, dass er solche Aufgaben als quadratische behandelt. Dann hat er aber zwei Lösungen für x, nämlich 3 und 7, was für die Babylonier unverständlich ist. Sie bekommen auch keine zwei! Denn sie benützen die Identität $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$ und rechnen $(x - y)^2 = 100 - 4 \cdot 21 = 16$, was, da es nur positive Zahlen gibt, sofort auf $x - y = 4$ führt. Mit $x + y = 10$ ergibt sich $x = 7$ und $y = 3$.

¶ Sequitur modus iste extrahendi.
Primo. A numeró radicum incipe, eumq́ dimidiatum,
loco eiũs pōne dimidium illius, quod in loco suo stet, donec
consumata sit tota operatio.
Secũdo. Multiplica, dimidium illud positum, quadrate.
Tertio. Adde vel Subtrahe iuxta signi additorũ, aut signi
subtractorum, exigentiam.
Quarto. Inuenienda est radix quadrata, ex summa additi
onis tuæ, vel ex subtractionis tuæ relicto.
Quinto. Adde aut Subtrahe iuxta signi aut exempli tui
exigentiam.
Modum extrahendi hunc tibi, mi bone Lector, formaui, ita
ut memoriæ tenaciter hærere possit adminiculo dictionis hu-
ius AMASIAS.

Abb. 91.1 Die AMASIAS-Merkregel aus Michael Stifels *Arithmetica integra* von 1544 (folium 240 v) – Übersetzung im Lösungsheft

lateinischen Merkregel aus der *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – von 1544 (Abbildung 91.1). Etwas modernisiert lautet sie für $x^2 = \pm Bx \pm C$:

1. **A**nfange mit der Anzahl der Wurzeln, B
   halbiere sie und lass sie stehn. $\frac{B}{2}$
2. **M**ultipliziere diese Hälfte mit sich. $\left(\frac{B}{2}\right)^2$
3. **A**ddiere oder **S**ubtrahiere, wie es das Vorzeichen des konstanten Glieds C fordert. $\left(\frac{B}{2}\right)^2 \pm C$
4. **I**tzo die Quadratwurzel zieh. $\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 \pm C}$
5. **A**ddiere oder **S**ubtrahiere das zur Seite gestellte $\frac{B}{2}$, wie es das Vorzeichen von B verlangt. $\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 \pm C} \pm \frac{B}{2}$

Geronimo Cardano (1501–1576) hingegen erkennt in seinem *Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus* (1545) – »Das eine Buch über die Große Kunst oder die algebraischen Regeln« – als Lösungen auch negative Zahlen an.* Simon Stevin (1548 bis 1620) schließlich lässt sowohl negative Koeffizienten wie auch negative Lösungen in seiner *L'Arithmetique* (1585) zu. Damit ist der Abschluss erreicht: Es gibt nur eine Form der quadratischen Gleichung und nur eine Lösungsformel.

* Stifel nannte die negativen Zahlen *numeri absurdi* oder auch *numeri ficti* (eingebildete Zahlen). Diesen Ausdruck benützt auch Cardano. Wenngleich dieser in Kapitel I seiner *Ars magna* von wahren und eingebildeten Lösungen einer quadratischen Gleichung spricht ($x^2 + 4x = 21$ hat die wahre Lösung 3 und die eingebildete -7), so führt er bei den in Kapitel V vorgerechneten Beispielen immer nur die wahre, d. h. die positive Lösung auf.

Aufgaben

1. a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ b) $5x^2 + 16x - 16 = 0$
c) $3x^2 - 7x - 6 = 0$ d) $40x^2 - 89x + 40 = 0$
e) $4x^2 - 12x + 11 = 0$ f) $4x^2 - 12x + 5 = 0$
g) $16x^2 - 48x + 36 = 0$ h) $14x^2 + 45x - 14 = 0$

2. Aus der *Arithmetica integra* (1544) des Michael STIFEL (1487?–1567):
a) $x^2 + 6x = 72$ b) $x^2 = 6x + 72$
c) $x^2 = 725 - 4x$ d) $x^2 = x + 35156$
e) $x^2 + 8x - 12 = 72$ f) $x^2 + 3x + 18 = 72$
g) $x^2 - 2x + 24 = 6x + 72$ h) $x^2 = 12x - 36$
i) $x^2 = 8x + 38$ j) $x^2 = 8x - 38$
k) $x^2 = 12x - 18$ l) $x^2 = 72 - 3x$
m) $x^2 = 3x + 72$ n) $x^2 = 6x + 36$

3. Aus dem *Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):
a) $x^2 + 4x = 21$ b) $x^2 = 4x + 21$ c) $x^2 + 12 = 7x$
d) $x^2 = 10x + 144$ e) $144 = 10x + x^2$ f) $x^2 = 10x + 6$
g) $6 = 10x + x^2$ h) $10x = x^2 + 6$ i) $x^2 = \sqrt{12}x + 22$
j) $x^2 = \sqrt{12}x + 20$ k) $x^2 = \sqrt{12}x + 9$ l) $x^2 = \frac{2}{3}x + 11$
m) $x^2 + 16 = 10x$

4. a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^2 - 2x - 1 = 0$
c) $4x^2 + 8x + 1 = 0$ d) $6x^2 - 2x - 1 = 0$
e) $5x^2 - 5x + 1 = 0$ f) $12x^2 + 48x + 47 = 0$

5. a) $0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$ b) $0{,}5x^2 + 3{,}25x + 1{,}5 = 0$
c) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 2 = 0$ d) $0{,}1x^2 + \frac{43}{30}x - 1 = 0$
e) $2{,}25x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$ f) $\frac{3}{7}x^2 - \frac{29}{28}x + 0{,}5 = 0$
g) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{10}{9} = 0$ h) $0{,}36x^2 + 0{,}4x - \frac{10}{9} = 0$

6. Runde die erhaltenen Lösungen auf Tausendstel.
a) $x^2 - 37 = 0$ b) $x^2 - 6x - 11 = 0$
c) $x^2 + 11x + 8 = 0$ d) $16x^2 - 112x + 63 = 0$
e) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$ f) $2\sqrt{3}x^2 - 12x + 5\sqrt{3} = 0$
g) $\sqrt{3}x^2 - 6x + 4\sqrt{3} = 0$ h) $\sqrt{2}x^2 - \dfrac{3}{2\sqrt{2}}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$
i) $x^2 - (4 + 2\sqrt{2})x + 6 + 4\sqrt{2} = 0$ j) $2x^2 + x(1 - 3\sqrt{3}) + 3 - \sqrt{3} = 0$
k) $\sqrt{8}x^2 - 4\sqrt{3}x + 2\sqrt{2} = 0$ l) $x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{5}x - \sqrt{15} = 0$


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Abb. 93.1 Titelseite der *Ars magna* des Geronimo, auch Girolamo CARDANO (24.9.1501 Pavia–20.9.1576 Rom), erschienen 1545 in Nürnberg:

Des HIERONYMUS CARDANUS, des außerordentlichsten Mathematikers, Philosophen und Arztes, eine Buch der Großen Kunst oder über die algebraischen Regeln, das auch der Reihe nach das zehnte des gesamten Werks über die Arithmetik ist, dem er den Titel VOLLKOMMENES WERK gab.*

Die Umschrift um sein Bildnis lautet

τὸ μέλλον ὅτι γενήσεται εἰς τὸ φέρτερον τίθει

Halte das Zukünftige, das sich entwickeln wird, für das Bessere!

7. Gib vierstellige Näherungen für die Lösungen an, d. h., berechne die Lösungen auf vier geltende Ziffern genau (führende Nullen zählen nicht!).

a) $x^2 - 7{,}9771x + 7{,}0802 = 0$ **b)** $x^2 + 0{,}1010x - 0{,}2411 = 0$

c) $x^2 + \pi x - \pi^2 = 0$ **d)** $x^2 - \sqrt{3{,}14}\,x + 1 - \sqrt{5} = 0$

e) $3{,}14x^2 + 2{,}01x + 0{,}301 = 0$ **f)** $1509x^2 + 1998x - 7487 = 0$

g) $1{,}23 \cdot 10^4 x^2 - 2{,}34 \cdot 10^5 x - 1 = 0$

h) $\sqrt{2}x^2 + (2 - 2\sqrt{2})x + \dfrac{3}{\sqrt{2}} - 2 = 0$

8. a) $(x+5)(2x-7) = 9$ **b)** $(1-3x)(5x+2) = 0$

c) $(4x-1)^2 + 2x = 0$ **d)** $(2x+3)(3-2x) + 6x + 1 = 0$

e) $(11x-7)^2 = (10-10x)^2$ **f)** $4x^2 - x(5+3x) = (6-2x)^2 - 36$

g) $(3x+2)^2 - (2x+1)(2x-1) + x = 11$

* Text unter dem Bildnis:
Du findest in diesem Buch, lernbegieriger Leser, die algebraischen Regeln (die Italiener nennen sie die der Coß), die vom Verfasser durch neue Hinzuerfindungen und Beweise so bereichert wurden, dass an Stelle der recht wenigen vorher allgemein geläufigen schon siebzig herausgekommen sind. Und sie erklären nicht nur das Problem, bei dem eine Zahl einer zweiten oder zwei einer, sondern auch das, bei dem zwei zweien oder drei einer gleich gewesen sind. – Es erschien aber angebracht, dieses Buch deshalb gesondert herauszugeben, damit, wenn dieser sehr versteckte und völlig ungehobene Schatz der ganzen Arithmetik ans Licht gebracht und wie in einem Theater allen zum Anschauen vor Augen geführt wird, die Leser angespornt werden, die übrigen Bücher des »Vollkommenen Werks«, die bandweise erscheinen werden, umso begieriger aufzunehmen und mit geringerem Widerwillen durchzuarbeiten.

h) $(3+5x)^2-(3x-2)^2-(5-2x)(5+2x)=0$

i) Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170 bis nach 1240): $(1+\frac{2}{3}x)(1+\frac{3}{4}x)=73$

9. a) $(4x+1)(6x-5)(5x+2)=(3x+4)(10x-17)(4x+3)-246$

b) $(8x-7)(9x-16)(7x-6)=(14x-13)(12x-11)(3x-5)-5$

c) $x(x-2)(x+5)+(x-3)(x-2)(8-3x)=2x^2(3-x)+208$

d) $(x-4)^3+(x+1)^3=(x-1)(x-2)(2x+3)+61$

e) $(2x+3)^3+(4x-3)^3=(2x+1)(4x+3)(9x-25)+853$

f) $(3x-4)^3-(6x-7)^3=(9x+6)(7x-12)(7-3x)+620$

g) $(5x-9)^3-(7x-5)^3=4x(14x-25x^2)-2x(59x^2-45)$

10. a) $x+\dfrac{6}{x}=5$ **b)** $x-\dfrac{18}{x}=3$

c) $3x-\dfrac{16}{x}=8$ **d)** $9x+\dfrac{45}{x}=86$

e) $\dfrac{6}{2x+5}+\dfrac{5}{4x-4}=1$ **f)** $\dfrac{8}{6x+1}-\dfrac{4}{3x-4{,}5}=5$

g) $\dfrac{3}{2x-7}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2x-6}$ **h)** $1+\dfrac{1}{x-12}=\dfrac{25}{4x+1}$

i) $9-\dfrac{13}{5x+1}+\dfrac{40}{5x-8}=0$ **j)** $\dfrac{3}{6x-2}+\dfrac{7}{3x+1}=\dfrac{5}{2}$

k) Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA:

$$\frac{60}{x+2}=5+\frac{20}{x}$$

l) Aus dem *Codex latinus monacensis 14908* (um 1460):

$$\frac{15}{x}+\frac{17}{x+3}=7$$

11. Zur Vertiefung rechnet AL-CHARIZMI in seinem *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* u. a. die folgenden Aufgaben vor. Löse die in moderner Schreibweise wiedergegebenen Gleichungen. Warum sind nicht alle von dir gefundenen Lösungen auch Lösungen bei AL-CHARIZMI?

a) $(10-x)^2-x^2=40$ **b)** $(10-x)^2+x^2+(10-x)-x=54$

c) $\dfrac{10-x}{x}+\dfrac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$ **d)** $\dfrac{5x}{2(10-x)}+5x=50$

e) $(10-x)^2=81x$ **f)** $\dfrac{x(10-x)}{10-2x}=5\frac{1}{4}$

g) $(x-(\frac{1}{3}x+3))^2=x$ h) $\dfrac{1{,}5}{1+x}=2x$

i)* $(x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x-4)^2=x+12$ j) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{6}$

•12. a) $\dfrac{7}{x+5}-\dfrac{8}{x-6}=\dfrac{3}{x-1}$ b) $\dfrac{5}{x-4}+\dfrac{6}{x-3}=\dfrac{6}{x-6}$

c) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{6}{7-x}$ d) $\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{9}{x+5}=\dfrac{40}{x+1}$

e) $\dfrac{6}{3x-4}-\dfrac{5}{4x-3}=\dfrac{18}{2x+5}$ f) $\dfrac{11}{4x-1}+\dfrac{18}{7x-3}=\dfrac{26}{3x+4}$

g) $\dfrac{18}{2x+1}-\dfrac{14}{3x+2}=\dfrac{19}{4x+3}$ h) $\dfrac{7}{2x-3}+\dfrac{26}{3x-2}=\dfrac{57}{4x-1}$

••i) $\dfrac{8x+7}{6x^2-13x-5}+\dfrac{10x-1}{3x^2+10x+3}=\dfrac{7x+2}{2x^2+x-15}$

•13. a) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-1}{x+4}=\dfrac{x-1}{x-4}+1$ b) $\dfrac{x+11}{x+2}+\dfrac{x+13}{x+3}=\dfrac{4}{x-5}+2$

c) $\dfrac{x+5}{x-3}+\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{5}{x-4}+2$ d) $\dfrac{x+5}{x+2}+\dfrac{x+7}{x+3}=\dfrac{x+2}{x}+1$

•14. a) $x^2+4ax+3a^2=0$ b) $m^2x^2-5mnx+4n^2=0,\ m\neq 0$

c) $x^2+(p-q)x-pq=0$ d) $x^2+(1-2a^2)x-2a^2=0$

e) $4u^2x^2-4(u^2+uv)x+(u+v)^2=0,\ u\neq 0$

••f) $2c^2x^2-2c^2x-cdx-3cd-6d^2=0,\ c\neq 0$

••g) $4x^2-4(r+s)x+r^2+2rs-1=0$

••h) $x^2+ax-2bx-2ab-2(a+2b)-4=0$

••i) $(x+2a)(x+b)(x-a+b)=(x-b)^3+b(x-a-b)^2+a(6bx-a^2)$

••j) $(x+a)^3-(x-a)^3=a(2x+a)(2x-b)+2a^3+5a^2b+4ab^2$

* Der Text AL-CHARIZMIS lautet: »Ein Vermögen, du nimmst ein Drittel davon weg und ein Viertel und 4 Dirhem [siehe Fußnote auf Seite 67]. Dann multiplizierst du den Rest mit sich selbst und das Vermögen ist wiedergewonnen, vermehrt um 12 Dirhem.«
Setzt man Vermögen $=x$, so erhält man die obige Gleichung.
CARDANO bringt diese Aufgabe als Quaestio I in Kapitel V seiner *Ars magna* (1545) und verweist auf AL-CHARIZMI als Autor: »Est numerus, à cuius quadrato si abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsius quadrati, atque insuper 4. residuum autem in se duxeris, fiet productum aequale quadrato illius numeri, & etiam 12.«
Würde man *numerus* $=x$ setzen, so erhielte man $(x^2-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^2-4)^2=x^2+12$, eine unnötig schwere Gleichung.
Diese Aufgabe ist ein schönes Beispiel dafür, dass *māl = Vermögen* nicht immer als Quadrat einer Zahl gedeutet werden muss. Übrigens gibt sich CARDANO mit der Lösung für das Quadrat der Zahl zufrieden, gibt also die angeblich gesuchte Zahl gar nicht an.

15. Führe beim Lösen der folgenden Gleichungen die erforderlichen Fallunterscheidungen durch!

a) $x^2 + 2ax + 1 = 0$ • **b)** $x^2 - 4ax + 4a = 0$

:c) $x^2 + abx + a^2b = 0$ **d)** $x^2 + (2a + 4b)x + 5a^2 + 5b^2 = 0$

e) $mx^2 - 2x - \frac{1-m}{m^2} = 0$ •**f)** $ax^2 + \frac{ax}{a+2} - \frac{1}{a^2-4} = 2x^2 + x$

g) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-2a}{x+a} = 2\frac{1}{4}$ •**h)** $\frac{1}{ax+b} + \frac{1}{ax-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}$

16. Wie muss man bei den folgenden Gleichungen k wählen um die angegebene Zahl von Lösungen zu erhalten?

a) $2x^2 + 6x + k = 0$ 2 Lösungen
b) $3x^2 + kx + 27 = 0$ keine Lösung
c) $6x^2 - 5kx - k^2 = 0$ 1 Lösung
d) $x^2 - kx + 4 = 0$ 2 Lösungen
e) $2x^2 + kx - 4k^2x - 2k^3 = 0$ 1 Lösung
f) $x^2 - k(2k + 0{,}5)x - k^3 = 0$ 1 Lösung

17. a) Beweise:

1) Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat im Falle $q < 0$ stets zwei verschiedene Lösungen.

2) Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ besitzt, falls a und c entgegengesetzte Vorzeichen haben, stets zwei verschiedene Lösungen.

b) Gilt von diesen Aussagen auch die Umkehrung?

18. Die Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $d \neq 0$ stellt bekanntlich eine Äquivalenzumformung dar. Zeige für den Fall der quadratischen Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel, dass dabei die Lösungen tatsächlich gleich bleiben.

19. Wähle in den folgenden Gleichungen k so, dass die Differenz der Lösungen den angegebenen Wert d hat.

a) $2x^2 - 5x + k = 0,$ $d = 1{,}5$
b) $6x^2 + 13x + k = 0,$ $d = \frac{5}{6}$
c) $x^2 + kx - 11 = 0,$ $d = 12$
d) $9x^2 + k^2x + 2 = 0,$ $d = \frac{17}{9}$
e) $kx^2 + 15x + 12 = 0,$ $d = 3$
f) $kx^2 - 24x - 1 = 0,$ $d = 1{,}04$

20. Für welche Werte von k haben die folgenden Gleichungen ganzzahlige Lösungen?

a) $x^2 + 2x + k^2 = 0$
b) $kx^2 - 20x + 15 = 0,\ k \in \mathbb{N}$
c) $k(x^2 + 10x) + 48 = 0,\ k \in \mathbb{Z}$

21. In der Gleichung $x^2 - 8x + n = 0$ soll die natürliche Zahl n so gewählt werden, dass eine durch 3 teilbare ganzzahlige Lösung auftritt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

22. a) Begründe: Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit rationalen Koeffizienten die irrationale Lösung $r + s\sqrt{t}$, wobei r und s rational sind, dann hat sie auch die Lösung $r - s\sqrt{t}$.

b) Eine quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten habe die Lösung $3 - 2\sqrt{17}$. Wie lautet ihre Normalform?

c) Die Gleichung $2x^2 - 7x + c = 0$, c rational, soll eine Lösung mit dem irrationalen Bestandteil $3\sqrt{5}$ haben. Bestimme c.

23. Gilt der Satz aus Aufgabe **22. a)** auch für rationale Lösungen? Bearbeite dazu:

a) Bestätige, dass $1 + \sqrt{4}$ Lösung der Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$ ist. Ist dann auch $1 - \sqrt{4}$ Lösung?

b) Bestätige, dass $3{,}5 + \sqrt{\frac{1}{4}}$ Lösung der Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$ ist. Ist auch $3{,}5 - \sqrt{\frac{1}{4}}$ Lösung?

24. Im Britischen Museum zu London wird unter der Signatur BM 13901 eine der ältesten babylonischen Keilschrifttafeln (ca. 1900 v. Chr.) aufbewahrt. Sie enthält 24 Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen mit einer (Nr. 1–7, 16 und 23), mit zwei oder mehr Unbekannten führen. Offensichtlich handelt es sich bei dieser Tafel um Übungsmaterial für den Mathematikunterricht; denn die Aufgaben sind alle vorgerechnet (siehe Seite 86). Bestimmt wurde bei den folgenden Aufgaben jeweils die Seite eines Quadrats. Suche sie!

1) Die Fläche und die Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{3}{4}$ ist es.*

2) Die Seite meines Quadrats von der Fläche habe ich subtrahiert, und 870 ist es.

3) Ein Drittel der Fläche habe ich abgezogen, ein Drittel der Seite meines Quadrats habe ich zur Fläche hinzugefügt, und $\frac{20}{60}$ ist es.

4) Ein Drittel der Fläche habe ich subtrahiert, und die Fläche und die Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $286\frac{2}{3}$ ist es.

5) Die Fläche und die Seite meines Quadrats und den dritten Teil der Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{55}{60}$ ist es.

6) Die Fläche und zweimal den dritten Teil der Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{35}{60}$ ist es.

7) Elf Flächen und sieben Seiten meines Quadrats habe ich addiert, und $6\frac{1}{4}$ ist es.

* Natürlich kann man Flächen und Seiten nicht addieren. Die Babylonier benützen zwar noch die geometrischen Ausdrücke, meinen damit aber immer nur die Maßzahlen der Fläche und der Seite.

16) Ein Drittel der Seite meines Quadrats von der Fläche habe ich abgezogen, und $\frac{1}{12}$ ist es.

23) Eine Fläche. Die vier Seiten und die Fläche habe ich addiert, und $\frac{25}{36}$ ist es.

25. Aus dem Buch IX des *Chiu Chang Suan Shu* (2. Jh. v. Chr.):

a) *Aufgabe 12:* Jetzt habe man eine Tür, deren Höhe und Breite man nicht kennt. Beide sind kürzer als die unbekannte Länge einer Bambusstange. Hält man diese horizontal, dann kommt man nicht hindurch; denn 4 Fuß ist sie zu lang. Hält man sie vertikal, dann kommt man um 2 Fuß nicht hindurch. Hält man sie aber schräg, dann kommt man gerade hindurch. Frage: Wie groß sind Höhe, Breite und Diagonale? [1 Fuß $\approx$ 23 cm]

b) *Aufgabe 20:* Jetzt hat man eine Stadt mit quadratischem Grundriss. Die Seitenlänge kennt man nicht. In der Mitte jeder Seite ist ein offenes Tor. Geht man aus dem Nordtor 20 Schritt hinaus, dann kommt man an einen Baum. Geht man aus dem Südtor 14 Schritt hinaus, biegt ab und geht dann nach Westen 1775 Schritt, dann erblickt man von dort den Baum. Frage: Wie groß ist die Quadratseite der Stadt? [1 Schritt = 6 Fuß $\approx 1\frac{1}{3}$ m]

26. a) EUKLID (um 300 v. Chr.) behandelt in Buch II, Satz 11 seiner *Elemente* folgendes Problem: Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt gleich ist dem Quadrat über dem anderen Abschnitt.

1) Berechne die Länge x desjenigen Teils der Strecke a, über dem das Quadrat errichtet wird.*

2) Zeige, dass stets $x > \frac{1}{2}a$ ist.

b) Zeige durch Berechnen von $\overline{AD} = x$, dass die von EUKLID angegebene Konstruktion richtig ist (Abbildung 98.1).

c) **Die stetige Teilung oder der goldene Schnitt.** EUKLID nennt in Buch VI (Definition 3) seiner *Elemente* eine Strecke stetig geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt genauso verhält wie der größere Abschnitt zum kleineren. Zeige, dass die Aufgabe, eine Strecke a stetig zu teilen, auf dieselbe

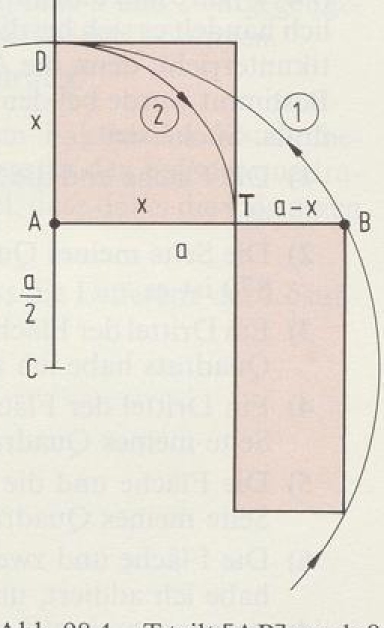


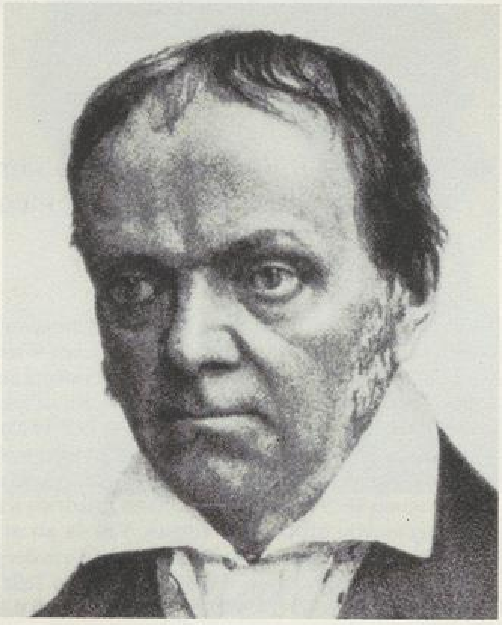
Abb. 98.1 T teilt [AB] so, daß $x^2 = a(a-x)$.
$k(C; \overline{CB})$ liefert D, $k(A; \overline{AD})$ liefert T.

* Die quadratische Gleichung für x ist vom Typ (B1). (Siehe Seite 87)

Gleichung führt wie die, mit der das Problem von EUKLIDS Satz II/11 aus Aufgabe **a** gelöst wird.*

d) Die stetige Teilung hat folgende interessante Eigenschaft: Trägt man den kleineren Abschnitt auf dem größeren Abschnitt ab, so wird dieser wieder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wobei der frühere kleinere Abschnitt die Rolle des größeren Abschnitts übernimmt. Man kann so immer weiter fortfahren. Beweise die Behauptung.

* Wenn für 3 Größen a, b, c bzw. für 4 Größen a, b, c, d usw. zutrifft, dass $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = c : d$ usw. gilt, dann sagten ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) und auch EUKLID z. B. in Buch VIII seiner *Elemente*, es bestehe eine συνεχὴς ἀναλογία (synechés analogía), eine *zusammenhängende, fortlaufende, beständige Verhältnisgleichung*. Wörtlich übersetzte dies ins Lateinische BOETHIUS (um 480–524/5) mit *proportionalitas continua*, ins Deutsche der Bamberger Rechenmeister Wolffgang SCHMID 1539 in seinem *Das erst buch der Geometria* mit *ein stäte unzertrente auffeinander volgende proportz*. Der Augsburger Wilhelm HOLTZMANN (1532–1576), der seinen Namen zu XYLANDER gräzisierte, sprach 1562 in seiner Euklidübersetzung (Buch V, Definition 10) von einer *stetigen Proportion*.
Offensichtlich stehen nach EUKLIDS Definition 3 von Buch VI die ganze Strecke, der größere und der kleinere Abschnitt in stetiger Proportion zueinander. Es nimmt daher wunder, dass EUKLID für diese Teilung einer Strecke nicht den oben angegebenen Fachausdruck benützte; stattdessen sagt er, eine Strecke *ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν* (ákron kai méson lógon temeīn), was unter Umstellung der Adjektiva mit *media et extrema ratione secare* im Mittelalter latinisiert und mit *nach dem äußeren und mittleren Verhältnis schneiden* in die deutschen Lehrbücher des 18. Jh.s einging. Immerhin nennt XYLANDER die Strecke schon recht kurz *Proportzlich zertailt*. Erst Johann Friedrich LORENZ übersetzt 1781 EUKLIDS Wendung mit *nach stetiger Proportion geschnitten*. Wann daraus die Kurzform *stetig geteilt* wurde, konnten wir nicht ermitteln.
Man darf annehmen, dass bereits die PYTHAGOREER Kenntnis von dieser Teilung hatten, die ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Konstruktion der regulären Körper war. Luca PACIOLI (um 1445–1517) beschäftigte sich mit diesen Körpern und gab wegen der Wichtigkeit dieser Teilung seiner 1498 verfassten und 1509 gedruckten diesbezüglichen Schrift, für die sein Freund LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519) die Zeichnungen anfertigte, den Titel *Divina Proportione* – »Göttliches Verhältnis«. Dieser Titel mag zur späteren Mystifizierung beigetragen haben. PACIOLI selbst gibt fünf Gründe an, warum er dieses Verhältnis göttlich nennt. Einer davon ist, dass es sich genauso wenig durch rationale Größen ausdrücken läßt wie Gott durch Wörter. Ein anderer nimmt Bezug auf PLATON (438–348 v. Chr.), der in *Timaios* (55c) das Dodekaeder, das sich ja ohne dieses Verhältnis nicht konstruieren lässt, dem Äther, der quinta essentia, d. h. in christlicher Sicht der göttlichen Kraft zuordnet. Und wie PACIOLI sieht auch 1569 der französische Mathematiker, Humanist und Philosoph Petrus RAMUS (1515–1572) die bei dieser Teilung auftretenden 3 Teile als Sinnbild der Dreifaltigkeit, da sie eine »geeinte Dreiheit und eine dreiartige Einheit« bilden. Johannes KEPLER (1571–1630) spricht in einem Brief vom 12. 5. 1608 mit Hochachtung von dieser *proportio divina*. Er sieht darin eine Idee des Schöpfers, die er wegen der in Aufgabe **d** angesprochenen Eigenschaft selbst für ein Sinnbild des Ewigen hält. Die Teilung nennt er *sectio proportionalis*. Der Ausdruck *sectio divina*, d. h. göttlicher Schnitt, stammt nicht von ihm, wie oft behauptet wird. 1619 schreibt er jedoch in seiner *Harmonice mundi* – »Weltharmonik« –, dass »die heutigen [Mathematiker] sowohl den Schnitt wie auch die Proportion göttlich nennen wegen ihrer wunderbaren Natur und ihrer vielfältigen Besonderheiten«. KEPLER sagt uns aber nicht, wer diesen Ausdruck geprägt



um 1850

Dr Martin Ohm

Abb. 99.1 Martin OHM
(6.5.1792 Erlangen – 1.4.1872 Berlin)

27. Der Inder ARYABHATA I (um 476–? n. Chr.) stellt in Vers 25 des *Ganitapada* – »Abschnitt über die Rechenkunst« – seines Werks *Aryabhatiya* die folgende Aufgabe: Eine Summe A ist für einen Monat ausgeliehen und erbringt dabei den Zins x. Dieser wird anschließend zum gleichen Zinsfuß p für t Monate ausgeliehen. Der gesamte Zinsertrag hat den Wert B.

a) Wie groß ist der Zins x? Hinweis: Drücke p durch A und x aus.

b) Welchen Wert erhält man für x, wenn man die von einem späteren Kommentator hinzugefügten Werte $A = 100$, $t = 16$ und $B = 16$ einsetzt?

28. AL-CHARIZMI behandelt als Beispiele für die Gleichungstypen (B1) bis (B3) (siehe Seite 87) die folgenden Probleme:

a) *4. Problem:* Ich habe $\frac{1}{3}$ einer Sache, vermehrt um 1 Dirhem, mit $\frac{1}{4}$ der Sache, vermehrt um 1 Dirhem, multipliziert. Das Produkt ist 20 Dirhem. Wie groß ist die Sache?

b) *5. Problem:* Ich habe 10 in zwei Teile geteilt, dann jeden Teil mit sich multipliziert. Nachdem ich die entstandenen Produkte addiert hatte, ergaben sich 58 Dirhem. Wie groß sind die Teile?

c) *6. Problem:* Ich habe $\frac{1}{3}$ einer Sache mit $\frac{1}{4}$ der Sache multipliziert, das Produkt ist gleich der Sache und 24 Dirhem dazu. Wie groß ist die Sache?

29. Für die Normalform $x^2 + px + q = 0$ wird als Sonderfall von Satz 85.1 die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ angegeben. Zeige, dass sie richtig ist.*

30. Aus dem *Bidscha-ganita* – »Samen der Rechenkunst« – des indischen Mathematikers und Astronomen BHASKARA II (1115–nach 1178):

hat. Ebenso offen bleibt diese Frage bei Christian VON WOLFF (1679–1754), der die Bildung *sectio divina* in seinen *Anfangsgründen Aller Mathematischen Wissenschaften* von 1710 (Band IV, Anmerkung 155) wie folgt erklärt: »Man pfleget es auch divinam sectionem zu nennen/weil (wie aus dem Euclide zu sehen) man viel aus dieser Section demonstriret hat.« Im 18. Jh. ist *sectio divina* dann zum stehenden Fachausdruck geworden. 1835 schreibt schließlich Martin OHM (1792–1872) in der 2. Auflage seiner *Die reine Elementar-Mathematik* recht vage: »Diese Zerteilung [...] nennt man wohl auch den goldenen Schnitt.« Wer ist »man«? Vielleicht vermischten sich bei OHM *sectio divina* mit *regula aurea*, wie die Regel vom Dreisatz früher genannt wurde. Aber schon 1839 findet sich in Johann Friedrich KROLLS *Grundriß der Mathematik für Gymnasien* die Latinisierung »sectio divina oder aurea«. Von da ab ist diese Wortschöpfung nicht mehr aufzuhalten.
Die Vorstellung, dass der goldene Schnitt ein in der ganzen Natur waltendes Ordnungsprinzip sei, demzufolge zwei in einem derartigen Verhältnis stehende Teile ein besonders wohlgefälliges Ganzes ergäben, setzte erst 1854 Adolf ZEISING (24.9.1810 Ballenstedt–27.4.1876 München), ein anhaltischer Gymnasialprofessor, in die Welt, und zwar in seinem Werk *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, aus einem bisher unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt.* Es gibt nämlich in der gesamten Antike bis herauf ins 19. Jh. keine einzige Quelle, die der stetigen Teilung irgendeine ästhetische Bedeutung zuerkennen würde.

* Da AL-CHARIZMI immer $A = 1$ setzte, kannst du mit Hilfe dieser Formel die Lösungsformeln angeben, die er – natürlich in Worten – für die drei Gleichungstypen (B1) bis (B3) aufstellte, ebenso seine Bedingung dafür, dass (B2) genau eine bzw. keine Lösung hat.

a) § 139: Der achte Teil einer Herde Affen, quadriert, sprang lustig in einem Walde herum, die 12 restlichen waren auf einem Hügel zu sehen, wo sie vergnügt schnatterten. Wie viele waren es im Ganzen?

b) § 140: Der fünfte Teil einer Herde weniger drei, quadriert, ging in eine Höhle; ein Affe war noch zu sehen. Wie viele waren es? – Warum verwirft BHĀSKARA II eine Lösung?

31. Aus Kapitel V der *Ars magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501 bis 1576):

a) *Aufgabe II:* Es waren einmal zwei Heerführer, von denen jeder 48 Dukaten an seine Soldaten austeilte. Einer hatte 2 Soldaten mehr als der andere. Der, der weniger Soldaten hatte, gab jedem seiner Soldaten 4 Dukaten mehr, als der andere seinen Soldaten gab. Wie viele Soldaten hatte jeder?

b) *Aufgabe III:* Zwei Vereine, von denen einer 3 Mitglieder mehr als der andere hatte, verteilten gleich viele Goldstücke an ihre Mitglieder, nämlich 93 und dazu noch so viele, wie beide Vereine Mitglieder hatten. Auf jedes Mitglied des kleineren Vereins entfielen 6 Goldstücke mehr als auf jedes Mitglied des größeren Vereins. Wie viele Mitglieder hatte jeder Verein?

Die Aufgaben 32 bis 39 stammen aus der *Vollständigen Anleitung zur Algebra* von Leonhard EULER (1707 bis 1783) aus dem Jahre 1770.*

32. Ich habe zwei Zahlen, die eine ist um 6 größer als die andere, und ihr Produkt macht 91. Welches sind diese Zahlen?

33. Suche eine Zahl, dass, wenn ich von ihrem Quadrat 9 subtrahiere, so viel über 100 bleiben, als die gesuchte Zahl weniger ist als 23; welche Zahl ist es?

34. Suche zwei Zahlen, von denen eine doppelt so groß ist als die andere, die so beschaffen sind, dass, wenn ich ihre Summe zu ihrem Produkt addiere, 90 herauskommt.

1780

Abb. 101.1 Leonhard EULER (15.4.1707 Basel–18.9.1783 St. Petersburg) – Kupferstich von Samuel Gottlob KÜTNER (1747–1828) nach dem Gemälde von Joseph Friedrich August DARBES (1747–1810)

* Aufgaben I, II, IV, V, VII–X aus 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 6. – Siehe auch Seite 78.

35. Jemand kauft ein Pferd für einige Reichstaler, verkauft es wieder für 119 Reichstaler und gewinnt daran so viel Prozent, wie das Pferd gekostet hat. Nun ist die Frage, wie teuer dasselbe eingekauft worden ist.

36. Jemand kauft einige Tücher für 180 Reichstaler. Wären der Tücher für dasselbe Geld 3 Stück mehr gewesen, so wäre ihm das Stück um 3 Reichstaler wohlfeiler gekommen. Wie viel Tücher sind es gewesen?

37. Zwei Gesellschafter legen in ihr Geschäft zusammen 100 Reichstaler ein. Der erste lässt sein Geld 3 Monate lang, der zweite aber 2 Monate lang stehen, und es zieht jeder mit Kapital und Gewinn 99 Reichstaler ein. Wie viel hat jeder eingelegt?

38. Zwei Bäuerinnen tragen zusammen 100 Eier auf den Markt, die eine mehr als die andere, und lösen doch beide gleich viel Geld. Nun sagt die erste zu der andern: »Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer* gelöst.« Darauf antwortete die andere: »Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöst.« Wie viele hat jede gehabt?

39. Zwei Schnittwarenhändler verkaufen etliche Ellen Zeug**, der zweite 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Reichstaler. Der erste sagt zum zweiten: »Aus deinem Zeuge würde ich gelöst haben 24 Reichstaler«, und es antwortet der zweite: »Ich aber hätte aus deinem $12\frac{1}{2}$ Reichstaler gelöst.« Wie viele Ellen hat jeder gehabt?

3.5 Der Satz von VIETA

Wendet man für $D > 0$ die Lösungsformel von Satz 85.1 auf $x^2 + px + q = 0$ an, dann ergibt sich

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Addiert man bzw. multipliziert man diese Lösungen, dann gibt es eine Überraschung:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q} - p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p - \sqrt{p^2 - 4q})(-p + \sqrt{p^2 - 4q})}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{2} = \frac{4q}{4} = q.$$

* Ursprünglich eine ab 1271 in Tirol geprägte Silbermünze mit einem charakteristischen Doppelkreuz, ab dem 17./18. Jh. auch als Kupfermünze weit verbreitet, 1871 aus dem Verkehr gezogen.

** Zeug, aus dem althochdeutschen giziugi, bedeutet Stoff. Elle, altes Längenmaß, in Bayern 58,4 cm, in Russland 71 cm.

Ist $D=0$, dann hat nach Satz 85.1 die einzige Lösung den Wert $-\frac{1}{2}p$. Diesen Wert erhält man aber auch formal sowohl für x_1 wie auch für x_2, wenn man in $x_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{D}}{2}$ für D null setzt. Wegen dieses formal doppelten Auftretens von $-\frac{1}{2}p$ spricht man auch von einer **Doppellösung** der quadratischen Gleichung. Mit $x_1=x_2=-\frac{1}{2}p$ ergibt sich auch hier

$$x_1+x_2=(-\tfrac{1}{2}p)+(-\tfrac{1}{2}p)=-p$$
$$x_1\cdot x_2=(-\tfrac{1}{2}p)(-\tfrac{1}{2}p)=\tfrac{1}{4}p^2=q \text{ wegen } D=p^2-4q=0.$$

Damit haben wir für $D\geqq 0$ einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer in Normalform geschriebenen quadratischen Gleichung und ihren Lösungen gefunden. Wir merken uns:

Satz 103.1: Sind x_1 und x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung in Normalform $x^2+px+q=0$, dann gilt
$x_1+x_2=-p$ und $x_1\cdot x_2=q$.

Bemerkung: Für die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ mit den Lösungen x_1 und x_2 gilt dann:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad\text{und}\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Von François VIÈTE (1540–1603) stammt die 1615 postum veröffentlichte* Umkehrung dieses Satzes:

Satz 103.2: Gelten für die Zahlen p, q, x_1 und x_2 die Beziehungen $p=-(x_1+x_2)$ und $q=x_1\cdot x_2$, dann hat die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ die Zahlen x_1 und x_2 als Lösungen.

* Der Bedeutung des Satzes wegen und um dir den Stil VIÈTES zu zeigen, bringen wir den Originaltext mit einer Übersetzung und einer modernen Umschrift. Auf Seite 71 findest du ein Faksimile des Originals.

Text VIÈTES	Übersetzung	moderne Umschrift
Propositio I.	Satz I.	Satz I.
Si $B+D$ in $A-A$ quad. aequetur B in D. A explicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D.	Wenn $(B+D)\cdot A-A^2=B\cdot D$ ist, dann kann A jedes der beiden B oder D sein.	Wenn $(B+D)\cdot x-x^2=B\cdot D$, d.h., wenn $x^2-(B+D)\cdot x+B\cdot D=0$ ist, dann gilt $x=B\vee x=D$.
[Beispiel] 3N.–1Q. *aequetur* 2. *fit* 1N 1. *vel* 2.	3N–1Q = 2 bewirkt 1N 1 oder 2.	$3x-x^2=2$, d.h., $x^2-3x+2=0$ hat zur Folge $x=1\vee x=2$.

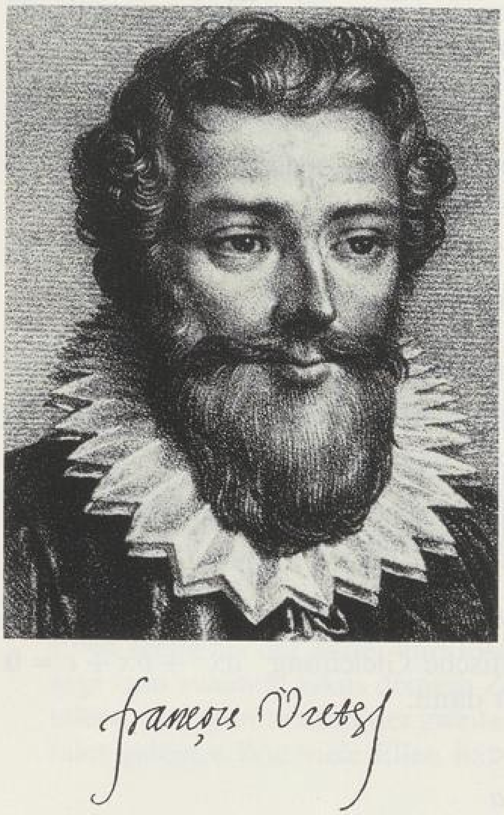
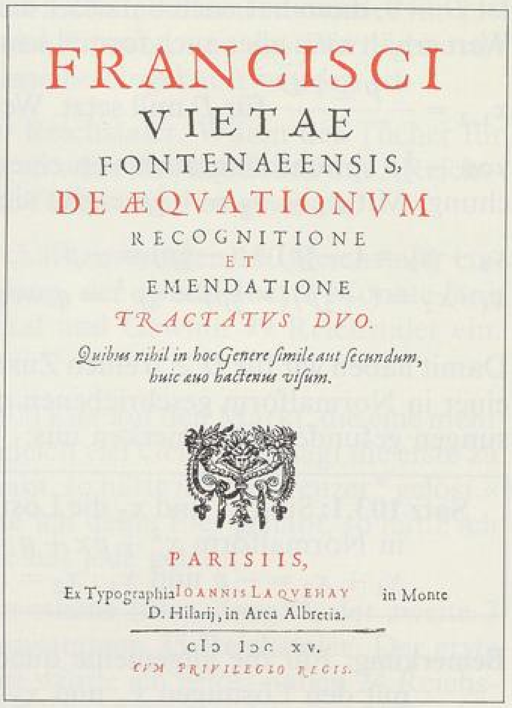


Abb. 104.1 François VIÈTE, latinisiert zu VIETA (1540 Fontenay-le-Comte/Vendée–1603 Paris)



FRANCISCI
VIETAE
FONTENAEENSIS,
DE ÆQVATIONVM
RECOGNITIONE
ET
EMENDATIONE
TRACTATVS DVO.
Quibus nihil in hoc Genere simile aut secundum, huic æuo hactenus visum.

PARISIIS,
Ex Typographia IOANNIS LAQVEHAY in Monte D. Hilarij, in Area Albretia.
CIↃ IↃC XV.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Abb. 104.2 Titelblatt der »Zwei Abhandlungen des François VIÈTE aus Fontenay über die Prüfung und Vervollkommnung von Gleichungen, worüber nichts in dieser Art Ähnliches oder Besseres diesem von Ewigkeit her bis jetzt zu Gesicht gekommen.«

Beweis: Setzt man $x_2 = -x_1 - p$ in $x_1 x_2 = q$ ein, so erhält man
$x_1(-x_1 - p) = q \Leftrightarrow -x_1^2 - px_1 = q \Leftrightarrow x_1^2 + px_1 + q = 0$;
d.h. aber, dass x_1 Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist. Ebenso weist man nach, dass x_2 diese Gleichung löst.

Bemerkung 1: Mit Hilfe dieses Satzes kann man zu zwei gegebenen Zahlen x_1 und x_2 sofort eine quadratische Gleichung in Normalform angeben, die genau diese beiden Zahlen als Lösungen hat, nämlich $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.
Bemerkung 2: Die Methode, Lösungen einer quadratischen Gleichung in Normalform mit ganzzahligen Koeffizienten durch Probieren zu finden, lässt sich mit den Beziehungen von VIÈTE vereinfachen. Als ganzzahlige Lösungen kommen wegen $x_1 \cdot x_2 = q$ nur Teiler des konstanten Glieds q in Frage.

Auf Grund des einfachen Beweises von Satz 103.2 erscheint VIÈTES Erkenntnis als nicht sehr tief schürfend. Dem muss entgegengehalten werden, dass VIÈTE einen analogen Sachverhalt auch für Gleichungen höheren Grades entdeckt hat, sodass unser Satz 103.2 nur ein Sonderfall eines allgemeineren Satzes ist. Zu Ehren VIÈTES werden daher die beiden letzten Sätze zusammengefasst zum

Satz 105.1: Satz von VIETA.
Bei einer quadratischen Gleichung in Normalform mit $D \geqq 0$ gilt: Die Summe der beiden Lösungen ist die Gegenzahl des Koeffizienten des linearen Glieds, und das Produkt der beiden Lösungen ist das konstante Glied.
Umgekehrt gilt:
Nimmt man die Gegenzahl der Summe zweier Zahlen als Koeffizienten des linearen Glieds und das Produkt dieser Zahlen als konstantes Glied einer quadratischen Gleichung in Normalform, dann sind diese Zahlen die Lösungen dieser Gleichung.

Beispiele:

1) Wie lautet eine quadratische Gleichung, deren Lösungen -3 und 5 sind?
Nach VIETA ergeben sich die Koeffizienten der Normalform zu $p = -(-3+5) = -2$ und $q = (-3) \cdot 5 = -15$. Die zugehörige Gleichung lautet also $x^2 - 2x - 15 = 0$.

2) Wie lautet eine quadratische Gleichung, deren Lösungen $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ sind?
Nach VIETA ergeben sich die Koeffizienten der Normalform zu

$$p = -\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) = -1 \quad \text{und}$$
$$q = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{5}{4} = -1.$$

Die zugehörige Gleichung lautet also $x^2 - x - 1 = 0$.

3) Mit Hilfe des Satzes von VIETA sollen die Lösungen der Gleichung $x^2 - 18x + 17 = 0$ erraten werden.
Nach VIETA muss das Produkt der beiden Lösungen 17 sein. Falls es ganzzahlige Lösungen gibt, kommen nur $x_1 = -1$ und $x_2 = -17$ oder $x_1 = 1$ und $x_2 = 17$ in Frage. Die Summe der beiden Lösungen ergibt dann -18 bzw. 18. Nun ist die Gegenzahl des Koeffizienten des linearen Glieds 18, also gleich dem Wert der zweiten Summe. Somit besitzt die Gleichung $x^2 - 18x + 17 = 0$ die ganzzahligen Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 17$.

4) Mit Hilfe des Satzes von VIETA sollen die Lösungen der Gleichung $3x^2 + 3x - 18 = 0$ erraten werden.
Um den Satz von VIETA anwenden zu können benötigen wir die Normalform der gegebenen Gleichung. Wir dividieren durch 3 und erhalten $x^2 + x - 6 = 0$. Das Produkt der beiden Lösungen muss also -6 sein. Dafür gibt es nur die folgenden ganzzahligen Möglichkeiten:

$$(-1) \cdot 6, \quad 1 \cdot (-6), \quad (-2) \cdot 3 \quad \text{und} \quad 2 \cdot (-3).$$

Die entsprechenden Summen sind 5, -5, 1 und -1.
Weil die Gegenzahl des Koeffizienten des linearen Gliedes -1 ist, sind $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$ die Lösungen der Gleichung $3x^2 + 3x - 18 = 0$.

Eine einfache Folgerung des Satzes von VIETA ist

Satz 106.2: Der Faktorisierungssatz.
Sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, dann gilt

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Bemerkung: Weil $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ linear sind, sagt man auch, der quadratische Term $ax^2 + bx + c$ ist in **Linearfaktoren** zerlegt.

Beweis: Nach VIETA gilt: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ und $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, also ist

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = \\ &= ax^2 - a\left(-\frac{b}{a}\right)x + a \cdot \frac{c}{a} = ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Für eine Doppellösung x_0 gilt

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0) = a(x - x_0)^2.$$

Der Faktor $(x - x_0)$ tritt also doppelt auf, was erneut die Bezeichnung Doppellösung rechtfertigt.

Beispiele:

1) Der Term $3x^2 + 5x - 2$ soll in Linearfaktoren zerlegt werden. Dazu lösen wir die zugehörige quadratische Gleichung $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Ihre Diskriminante ergibt sich zu $D = 25 + 24 = 49$. Somit ist $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{6}$, d.h. $x_1 = -2$ und $x_2 = \frac{1}{3}$. Nach dem Faktorisierungssatz erhält man also

$$3x^2 + 5x - 2 = 3(x + 2)(x - \tfrac{1}{3}) = (x + 2)(3x - 1).$$

2) Der Term $\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3}$ soll in Linearfaktoren zerlegt werden. Dazu lösen wir die zugehörige quadratische Gleichung $\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} = 0$. Ihre Diskriminante ergibt sich zu $D = 36 - 36 = 0$.

Das ergibt die Doppellösung $x_0 = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Nach dem Faktorisierungssatz erhält man also

$$\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})^2.$$

Aufgaben

1. Wie lautet die Normalform einer quadratischen Gleichung mit folgenden Lösungen?

a) $x_1 = -2;\ x_2 = 3$ **b)** $x_1 = 0;\ x_2 = 5$
c) $x_1 = -8;\ x_2 = -1$ **d)** $x_1 = -3;\ x_2 = -3$
e) $x_1 = 1;\ x_2 = 2{,}5$ **f)** $x_1 = -3{,}1;\ x_2 = 7$
g) $x_1 = -4{,}3;\ x_2 = -4{,}2$ **h)** $x_1 = -\frac{1}{7};\ x_2 = \frac{2}{7}$
i) $x_1 = \frac{5}{6};\ x_2 = \frac{5}{3}$

2. Welche quadratische Gleichung in Normalform hat folgende Lösungen?

a) $x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = 4$ **b)** $x_1 = 1{,}5;\ x_2 = 2\sqrt{3}$
c) $x_1 = -2{,}3;\ x_2 = 1 + \sqrt{7}$ **d)** $x_1 = 2 - \sqrt{2};\ x_2 = 1 + \sqrt{2}$
e) $x_1 = 3 + \sqrt{5};\ x_2 = \sqrt{3} + 5$ **f)** $x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

3. Bestimme den fehlenden Koeffizienten und die zweite Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, wenn gegeben ist:

a) $p = 3;\ x_1 = 2$ **b)** $p = -5;\ x_1 = 5$ **c)** $p = 2{,}5;\ x_1 = -4$
d) $p = 9;\ x_1 = -4{,}5$ **e)** $p = 0;\ x_1 = 2{,}37$ **f)** $q = 6;\ x_1 = 4$
g) $q = 3{,}5;\ x_1 = -7$ **h)** $q = 6{,}25;\ x_1 = -2{,}5$ **i)** $q = 0;\ x_1 = 17$

4. Berechne mit Hilfe der gegebenen Lösung den unbekannten Koeffizienten und die zweite Lösung der Gleichung.

a) $2x^2 - 4x + c = 0;\ x_1 = 1$ **b)** $5x^2 + 4x + c = 0;\ x_1 = 0{,}2$
c) $0{,}1x^2 - x + c = 0;\ x_1 = -7$ **d)** $3x^2 + bx + 6 = 0;\ x_1 = 2$
e) $12x^2 + bx - 27 = 0;\ x_1 = 1{,}5$ **f)** $\frac{1}{7}x^2 + bx - \frac{1}{2} = 0;\ x_1 = -\frac{3}{2}$
g) $ax^2 + 7x - 14 = 0;\ x_1 = -2$ **h)** $ax^2 - 1{,}8x - 0{,}12 = 0;\ x_1 = -0{,}6$

5. Bestimme zu dem gegebenen Koeffizienten der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die beiden fehlenden so, dass die vorgeschriebenen Lösungen auftreten.

a) $a = 2;\ x_1 = -2;\ x_2 = 5$ **b)** $a = \frac{3}{2};\ x_1 = -7;\ x_2 = -4$
c) $b = 3;\ x_1 = -4;\ x_2 = 5$ **d)** $b = 31;\ x_1 = 1{,}7;\ x_2 = 4{,}5$
e) $c = 2;\ x_1 = -2;\ x_2 = 2$ **f)** $c = -8;\ x_1 = -2{,}8;\ x_2 = \frac{4}{7}$

6. Versuche mit Hilfe des Satzes von VIETA, die Lösungen der Gleichung zu erraten.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 15 = 0$ **c)** $x^2 - 2x - 15 = 0$
d) $x^2 + 8x + 15 = 0$ **e)** $x^2 + 10x - 11 = 0$ **f)** $x^2 - 9x + 14 = 0$
g) $2x^2 + 26x + 44 = 0$ **h)** $\frac{1}{2}x^2 - x - 12 = 0$ **i)** $\frac{1}{4}x^2 + 3x - 16 = 0$

7. Zerlege die folgenden Polynome zweiten Grades in Linearfaktoren.
a) x^2-4 **b)** x^2-3x+2 **c)** $x^2-3x-40$
d) $x^2+3{,}5x-15$ **e)** $x^2-16{,}7x+67$ **f)** x^2-2x-6
g) $5x^2-12x-81$ **h)** $30x^2+73x+33$ **i)** $25x^2-10\sqrt{11}x+3$

8. Bestimme zwei Zahlen mit der Summe u und dem Produkt v.
a) $u=3;\ v=-18$ **b)** $u=-6;\ v=5$ **c)** $u=14;\ v=49$
d) $u=13{,}4;\ v=-24$ **e)** $u=8;\ v=15{,}75$ **f)** $u=6;\ v=6$

9. Gib, ohne die Lösungen selbst zu berechnen, folgende Mittelwerte an:
a) das arithmetische Mittel der Lösungen von $2x^2+13x-143=0$;
b) das geometrische Mittel der Lösungen von $8x^2-29x+18=0$;
c) das harmonische Mittel der Lösungen von $9x^2-24x+10=0$;
d) das arithmetische Mittel der Lösungen von $x^2+x+1=0$ (!).

10. Berechne das arithmetische Mittel*
a) aus den Lösungen der Gleichung $x^2+9x+0{,}91=0$ und der Zahl 12;
b) aus den Lösungen der Gleichung $6x^2-45x+53=0$ und den Zahlen $\frac{4}{3}$, 5 und $\frac{7}{6}$;
c) aus den Lösungen der Gleichungen $x^2-7x-13=0$ und $3x^2+x-7=0$.

11. Bestimme k so, dass das arithmetische Mittel*
a) aus 7 und den Lösungen der Gleichung $10x^2+kx+10=0$ den Wert 3 hat;
b) aus der kleinsten und der größten zweistelligen Zahl und den Lösungen der Gleichung $kx^2-2{,}75x-1{,}5=0$ gleich 30 ist;
c) aus den Lösungen der Gleichungen $kx^2-63x+104=0$ und $3x^2-kx-30=0$ den Wert 2,5 hat.

•**12. a)** Kann man in der Gleichung $x^2+bx+9=0$ den Koeffizienten b so wählen, dass zwei Lösungen mit vorgeschriebenem arithmetischem Mittelwert m vorhanden sind? Gib die Menge aller Mittelwerte an, für welche die Aufgabe lösbar ist.
b) Wie ist die in **a** gestellte Frage bei der Gleichung $x^2+bx-9=0$ zu beantworten?

13. Welcher quadratischen Gleichung in Normalform genügen die beiden Zahlen, deren arithmetisches Mittel 4,5 und deren harmonisches Mittel 4 ist? Um welche Zahlen handelt es sich?

14. Berechne mit Hilfe einer quadratischen Gleichung die beiden Zahlen, deren arithmetisches Mittel 10,5 und deren geometrisches Mittel $6\sqrt{3}$ ist.

* Das arithmetische Mittel von n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist definiert zu $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$.

15. Berechne die unbekannten Koeffizienten, wenn gelten soll:

a) Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 5x + q = 0$ sollen sich um 3 unterscheiden.

b) Die Lösungen von $x^2 + px + 96 = 0$ sollen sich wie $2:3$ verhalten.

c) Die Lösungen von $0{,}2x^2 + bx + 3 = 0$ sollen auch die Gleichung $x_1 + 2x_2 = 11$ erfüllen.

16. Bestimme diejenige quadratische Gleichung in Normalform, deren Lösungen folgende Bedingungen erfüllen:

a) $x_1 + x_2 = 17$ und $x_2 - x_1 = 8$

b) $x_1 + x_2 = 24$ und $x_2 : x_1 = 5:3$

c) $x_2 - x_1 = 2$ und $x_1 : x_2 = 2:3$

17. Welche Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ erfüllt die Bedingung

a) $p = 2q$ und hat als eine Lösung -1;

b) $2p = q$ und hat als eine Lösung 2;

c) $3p = 2q - 5$ und hat als eine Lösung 1?

18. Wie lautet diejenige quadratische Gleichung in Normalform, deren Lösungen

a) die Kehrwerte der Lösungen von $6x^2 + x - 2 = 0$ sind,

b) die Quadrate der Lösungen von $2x^2 - 7x - 30 = 0$ sind,

c) jeweils um 4 größer sind als das Sechsfache der entsprechenden Lösungen von $3x^2 - 4x - 15 = 0$?

19. a) Was für eine Beziehung besteht zwischen den Lösungen einer Gleichung der Form $x^2 + px + 1 = 0$?

b) Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind reziprok zueinander. Was kann man über die Koeffizienten a und c dieser Gleichung sagen?

•20. Bestimme zur Gleichung $x^2 + 5x + 2 = 0$ ohne Berechnung der Lösungen eine zweite quadratische Gleichung $y^2 + py + q = 0$ so, dass zwischen entsprechenden Lösungen der beiden Gleichungen folgender Zusammenhang besteht:

a) $y = x - 1$ **b)** $y = x^2 + 3$ **c)** $y = x^3 - 1$

d) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **e)** $y = \dfrac{x}{x+1}$ **•f)** $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$

21. Bestimme bei den folgenden Gleichungen k so, dass zwei Lösungen vorhanden sind, die das angegebene Verhältnis besitzen.

a) $x^2 + 14x + k = 0,\quad 3:4$ **b)** $kx^2 - 6x - 21 = 0,\quad 7:(-5)$

c) $x^2 + kx + 18 = 0,\quad 2:1$ **d)** $x^2 + kx + 45k = 0,\quad (-2):3$

22. Wie lautet die Normalform einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die folgende irrationale Lösung hat? Beachte Aufgabe 97/**22a**.

a) $\sqrt{2}$ **b)** $1-\sqrt{3}$ **c)** $3{,}5+\sqrt{17}$ **d)** $-3-2\sqrt{5}$

e) $0{,}6-\sqrt{0{,}7}$ **f)** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$ •**g)** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ •**h)** $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$

23. Bestimme in den folgenden Gleichungen den rationalen Koeffizienten k so, dass eine Lösung der angegebenen Art existiert (r sei eine rationale Zahl). Beachte Aufgabe 97/**22a**.

a) $x^2+6x+k=0;\ r+\sqrt{7}$ **b)** $x^2-22x+k=0;\ r-4\sqrt{11}$

c) $x^2+kx-16=0;\ r+2\sqrt{5}$ **d)** $x^2+kx-0{,}25=0;\ r+\sqrt{0{,}5}$

e) $kx^2-10x-10=0;\ r-\sqrt{3}$ **f)** $kx^2+16x+120=0;\ r+6\sqrt{6}$

24. Eine quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten habe als eine Lösung $5-3\sqrt{2}$. Bestimme unter Beachtung von Aufgabe 97/**22a** eine Gleichung $y^2+py+q=0$, für deren Lösungen gilt:

a) $y_1=x_1+x_2$ und $y_2=x_1\cdot x_2$

b) $y_1=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ und $y_2=x_1^2+x_2^2$

25. Das **Anlegen von Flächen** – Παραβαλεῖν τῶν χωρίων (parabaleīn tōn choríon) – geht auf die PYTHAGOREER zurück. Im Wesentlichen handelt es sich darum, die beiden Seiten eines Rechtecks zu bestimmen, dessen Flächeninhalt einer bestimmten Forderung unterworfen wird. Die Grundaufgabe behandelt EUKLID (um 300 v. Chr.) im 1. Buch der *Elemente* als Satz 44. Sie besteht darin, an eine gegebene Strecke b ein Rechteck so anzulegen, dass sein Flächeninhalt einem vorgegebenen Wert c gleich wird. Sie heißt daher Anlegen mit *Gleichheit* (παραβολή [parabolē], lateinisch *aequalitas*, zu Deutsch *Parabel*) und führt auf die Gleichung $bx=c$, die sich leicht durch Flächenverwandlung geometrisch lösen lässt, wie du im Geometrieunterricht lernst; dabei denkt man sich c durch die Fläche eines Quadrats dargestellt.*
Weitaus schwieriger hingegen sind die folgenden beiden Aufgaben, die EUKLID im 6. Buch als Satz 28 und 29 behandelt.** Mit diesen beiden Sätzen konnte man dann auf geometrische Weise die quadratischen Gleichungen vom Typ (B1) bis (B3) (siehe Seite 87) lösen.

a) Anlegen mit *Fehlen* (ἔλλειψις [élleipsis], lateinisch *defectus*, zu Deutsch *Ellipse*; Abbildung 111.1): An eine gegebene Strecke b ist ein Rechteck gegebenen Flächeninhalts c so anzulegen, dass ein Quadrat

* Mehr darüber noch im Abschnitt **5.2**.
** EUKLID löst die Aufgabe weitaus allgemeiner; er spricht nur von Parallelogrammen.

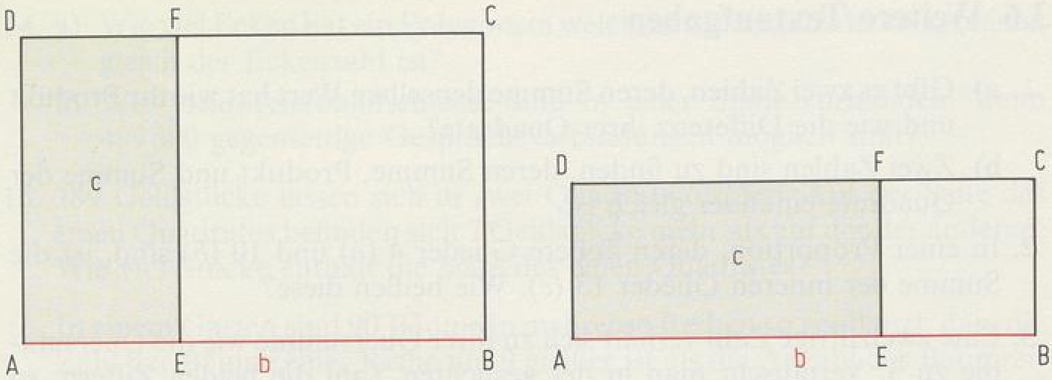


Abb. 111.1 Flächenanlegung eines Rechtecks AEFD mit Inhalt c an [AB] mit Fehlen: Das Quadrat EBCF fehlt zum Rechteck ABCD.

zum Rechteck gleicher Breite über ganz b fehlt. Zeige, dass die einer Rechtecksseite gleiche Quadratseite und die andere Rechtecksseite die Lösungen einer Gleichung vom Typ (B2) sind.

b) Konstruiere die Quadratseite, für die es nach Abbildung 111.1 zwei Möglichkeiten gibt. Wähle $b = 10\,\text{cm}$ und $c = 11\,\text{cm}^2$.

c) Anlegen mit *Überschuss* (ὑπερβολή [hyperbolē], lateinisch *excessus*, zu Deutsch *Hyperbel*; Abbildung 111.2): An eine gegebene Strecke b ist ein Rechteck gegebenen Flächeninhalts c so anzulegen, dass als überschießendes Stück ein Quadrat entsteht. Zeige, dass

1) die einer Rechtecksseite gleiche Quadratseite und die negativ genommene andere Rechtecksseite die Lösungen einer quadratischen Gleichung vom Typ (B1) sind;

2) eine Rechtecksseite und die negativ genommene Quadratseite, die der anderen Rechtecksseite gleich ist, die Lösungen einer Gleichung vom Typ (B3) sind.

d) Konstruiere für $b = 10\,\text{cm}$ und $c = 11\,\text{cm}^2$

1) die Quadratseite gemäß **c 1**,

2) die Rechtecksseite gemäß **c 2**.

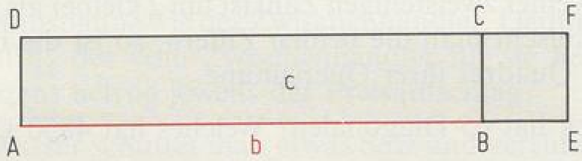


Abb. 111.2 Flächenanlegung eines Rechtecks AEFD mit Inhalt c an [AB] mit Überschuss: Das Quadrat BEFC schießt über das Rechteck ABCD hinaus.

3.6 Weitere Textaufgaben

1. a) Gibt es zwei Zahlen, deren Summe denselben Wert hat wie ihr Produkt und wie die Differenz ihrer Quadrate?
   b) Zwei Zahlen sind zu finden, deren Summe, Produkt und Summe der Quadrate einander gleich ist.
2. In einer Proportion, deren äußere Glieder 4 (a) und 10 (b) sind, ist die Summe der inneren Glieder 13 (c). Wie heißen diese?
3. Eine zweiziffrige Zahl verhält sich zu ihrer Quersumme wie die Quersumme zu 3. Vertauscht man in der gesuchten Zahl die beiden Ziffern, so entsteht eine um 45 größere Zahl.
4. Aus einer gewissen zweistelligen Zahl wird durch Umstellen ihrer Ziffern eine neue Zahl gebildet. Die Summe der beiden Zahlen hat den Wert 165, ihr Produkt den Wert 6786.
5. Welche Zahl muss man von a subtrahieren und zu a addieren, sodass die Summe der Quadrate der beiden Ergebnisse wieder a ergibt? Für welche a gibt es Lösungen? Wann gibt es nur eine Lösung und wie heißt sie? Welche Lösungen gibt es für $a = 0{,}01$?
6. Man addiert zu einer Zahl 42 und man subtrahiert von derselben Zahl 42. Der Quotient Summe durch Differenz ergibt 12,5 % der Zahl. Wie heißt sie?
7. Bestimme zu a eine Zahl x so, dass das arithmetische Mittel der Zahlen $a+x$, $a-x$, ax und $\frac{a}{x}$ wieder a ist.
8. Aus einer dreistelligen Zahl (erste Zahl) bildet man eine zweite Zahl, indem man die Einerziffer wegnimmt und vor die beiden anderen Ziffern setzt. Vor die drei Ziffern der zweiten Zahl schreiben wir noch eine 1 und erhalten so eine dritte Zahl. Wie heißen die drei Zahlen, wenn das Produkt aus der ersten und zweiten den Wert 655 371 hat und die dritte Zahl um 946 größer als die erste ist?
9. Die Wurzel aus einer zweistelligen Zahl ist um 2 kleiner als die Quersumme der Zahl. Vertauscht man die beiden Ziffern, so ist die neue Zahl um 3 größer als das Quadrat ihrer Quersumme.
10. Welches Vieleck hat 65 Diagonalen? Welches hat 4850 Diagonalen?
11. Bei einem Schachturnier spielt jeder gegen jeden. Wie viele Spieler nahmen teil, wenn 253 Partien gespielt wurden?
12. Auf einem Blatt mit vielen Geraden zählt man 153 Schnittpunkte. Wie viele Gerade sind es mindestens?
13. Auf einem Blatt sind eine Vielzahl von Punkten markiert. Man zeichnet 990 Gerade, die je zwei Punkte verbinden. Wie viele Punkte sind es mindestens?

14. **a)** Wie viel Ecken hat ein Polygon, in welchem die Anzahl der Diagonalen gleich der Eckenzahl ist?

b) Wie viele Telefonanschlüsse sind in einer Stadt vorhanden, wenn 499 500 gegenseitige Gesprächsverbindungen möglich sind?

15. 289 Geldstücke lassen sich in zwei Quadrate ordnen. Auf der Seite des einen Quadrates befinden sich 7 Geldstücke mehr als auf der des anderen. Wie viel Stücke enthält die Seite des einen Quadrates?

16. In einem Garten sind 90 Bäume in mehreren Reihen so gepflanzt, dass die Zahl der Bäume einer Reihe um 9 größer ist als die Anzahl der Baumreihen. Wie viel Reihen sind es, und wie viel Bäume stehen in einer Reihe?

17. In einer Familie ist der Sohn um 5 Jahre älter als die Tochter. Das Alter des Vaters verhält sich zu dem des Sohnes wie das Alter des Sohnes zu demjenigen der Tochter. In drei Jahren wird der Vater dreimal so alt sein wie Sohn und Tochter zusammen. Wie alt sind Vater, Sohn und Tochter heute?

18. Auf einem Konto lagen zu Beginn eines Jahres 800 €. Am Jahresende wurden die Zinsen nicht abgehoben. Im darauf folgenden Jahr gewährte die Bank einen um $\frac{1}{2}$% höheren Zinssatz. Beim Jahresabschluss ergab sich mit den Zinsen ein Kontostand von 861,12 €. Wie hoch war demnach der Zinsfuß im 1. bzw. 2. Jahr?

19. Jemand nimmt ein Darlehen von 3000 € zu 6 % auf und verpflichtet sich es durch regelmäßig zu zahlende Raten von 120 € wiederzuerstatten. Mit einer Rate wird jeweils zunächst der seit der letzten Zahlung angefallene Zins beglichen; der Rest dient zur Tilgung. Nach dem Einzahlen der 2. Rate berechnet sich die Restschuld zu 2878,80 €.
Wie viel Monate beträgt demnach die Zeit zwischen 2 aufeinander folgenden Ratenzahlungen?

20. Ein Zwischenhändler bezieht eine Ware direkt von der Fabrik und gibt sie an den Einzelhandel weiter. Dabei verlangt er einen Preis, der um einen bestimmten Prozentsatz über seinem eigenen Einkaufspreis liegt. Der Einzelhändler veranschlagt bei der Berechnung des Endpreises eine doppelt so hohe Gewinnspanne wie der Zwischenhändler. Dadurch steigt der Preis der Ware auf $\frac{33}{25}$ des vom Zwischenhändler für sie bezahlten Betrages. Wie viel Prozent betrug jeweils der Preisaufschlag?

21. In 600 cm³ Wasser schüttet man etwas Salz und verrührt. Da die Lösung noch zu schwach ist, gibt man noch einmal 15 g Salz dazu. Dadurch steigt die Konzentration der Lösung um $2\frac{1}{4}$%. Wie viel Gramm Salz wurden zuerst in das Wasser geschüttet?

22. In einem Glas Wasser löst man einen Esslöffel voll Zucker. Durch die Zugabe von weiteren 20 g Zucker erhöht sich die Konzentration der Lösung um 5 %. Da die Lösung nun aber zu konzentriert ist, verdünnt man wieder mit 95 cm³ Wasser. Nun beträgt der Zuckergehalt 8 %. Wie viel

Wasser befand sich anfangs im Glas und wie viel Zucker wurde mit dem Löffel dazugegeben?
(*Anmerkung:* Sind x Gramm und y Gramm die gesuchten Größen, so empfiehlt sich eine Vereinfachung des Gleichungssystems durch die Substitution $z = x + y$.)

23. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen kürzeste und längste Seite sich um 8 cm unterscheiden, beträgt 3 dm. Berechne die Dreiecksseiten.

24. In einem rechtwinkligen Dreieck von 36 mm Höhe ist die Hypotenuse 78 mm lang. In welchem Verhältnis wird letztere durch den Höhenfußpunkt geteilt?

25. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt der Längenunterschied der Katheten 5 cm und derjenige der Hypotenusenabschnitte 7 cm. Berechne die Seiten.

26. In welchen rechtwinkligen Dreiecken ist die Höhe um 5 mm länger als das Doppelte des kleinen Hypotenusenabschnittes und um 30 mm kürzer als der größere Hypotenusenabschnitt?

27. Ein rechtwinkliges Dreieck mit 14 cm Umfang hat 7 cm^2 Inhalt. Berechne die Seiten.

28. In einem Drachenviereck mit 2 rechten Winkeln sind die Diagonalen 48 mm und 60 mm lang. In welche Abschnitte wird die längere durch den Diagonalenschnittpunkt zerlegt?

29. Welche Rechtecke haben folgende Eigenschaft:
Wird die erste Seite um die Hälfte der zweiten verlängert und die zweite um die Hälfte der ersten verkürzt, so nimmt der Umfang um 8 cm und die Fläche um 67 cm^2 zu.

30. In einer Ecke eines eingezäunten rechteckigen Grundstücks wurde ein rechteckiger Gemüsegarten von 120 m^2 angelegt. Zu seiner Abgrenzung wurden noch einmal 23,5 m Maschendraht benötigt. Berechne Länge und Breite.

31. Zum Einzäunen eines rechteckigen Gartens von 540 m^2 Fläche, der auf einer Seite von einer Hauswand begrenzt ist, waren 30 Pfosten notwendig. Die Pfosten wurden in Abständen von je 3 m aufgestellt; der erste und der letzte Pfosten standen unmittelbar an der Hauswand. Berechne Länge und Breite des Gartens.

32. In einen Kreis vom Radius r wird eine Sehne der Länge $\frac{5}{6}r$ eingezeichnet. In welche Abschnitte zerlegt sie den zu ihr senkrechten Durchmesser?

33. In einem Kreis mit $r = 7$ cm ist durch einen Punkt P, der vom Mittelpunkt 4,2 cm entfernt ist, eine Sehne von 13 cm Länge gezogen. In welche Abschnitte wird die Sehne durch P zerlegt?

34. Durch zwei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 13$ mm und $r_2 = 37$ mm soll eine Gerade so gelegt werden, dass die Kreise auf ihr Sehnen ausschneiden, deren Längenunterschied 6 cm beträgt. Welchen Abstand vom Mittelpunkt muss die Gerade haben?

35. Um die Punkte M_1 und M_2, deren Abstand 1 cm beträgt, sind Kreise mit den Radien $r_1 = 2$ cm und $r_2 = 1$ cm geschlagen. Senkrecht zur Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte verläuft eine Sekante so, dass die vom 1. Kreis auf ihr ausgeschnittene Sehne durch die Schnittpunkte mit dem 2. Kreis in 3 gleiche Teile zerlegt wird. Welche Abstände hat die Sekante von M_1 und M_2? Wie lang sind die ausgeschnittenen Sehnen?

36. 2 Punkte A und B haben einen Abstand von 7 cm. Um A wird ein Kreis mit $r = 5$ cm geschlagen und durch B eine Sekante gezogen, auf welcher der Kreis eine Sehne der Länge r ausschneidet. Welche Abstände haben die Endpunkte der Sehne von B?

37. Um welche Strecke x muss man den Durchmesser eines Kreises mit Radius r verlängern, damit die vom Endpunkt aus an den Kreis gezogene Tangentenstrecke die Länge **a)** x, **b)** nx, **c)** r, **d)** nr hat?

38. Eine Strecke der Länge 10 wird so geteilt, dass sich das kleinere Stück zum größeren so verhält wie dieses zur ganzen Strecke. Wie lang ist das größere Stück? (Goldener Schnitt)

39. Einem Kreis ist ein Drachenviereck so einbeschrieben, dass die Diagonalen die Längen 15 und 17 haben. Wie groß ist der Radius? In welche Teilstücke zerlegt der Diagonalenschnittpunkt die Diagonalen?

40. Von einem Würfel schneidet man parallel zu einer Seitenfläche zuerst eine Scheibe von 2 cm Dicke ab und darauf durch einen senkrecht zum ersten verlaufenden zweiten Schnitt noch einmal eine Scheibe von 1 cm Dicke. Es ergibt sich ein Restkörper von 412 cm^2 Oberfläche. Um wie viel cm^3 wurde der Rauminhalt verkleinert?

41. Die Entfernung München–Köln beträgt in Luftlinie 460 km. Von München fliegt ein Flugzeug nach Köln. Es legt in 1 Stunde 540 km zurück. Ihm begegnet ein Flugzeug, das zur gleichen Zeit in Köln startete. Wäre jedes der beiden Flugzeuge um 20 km/h schneller geflogen, so hätte die Begegnung $1\frac{1}{4}$ Minuten früher stattgefunden. Welche Geschwindigkeit hat das zweite Flugzeug, und nach welcher Flugzeit erfolgte die Begegnung?

42. Zwei Verkehrsflugzeuge, die im Gegenverkehr auf der Strecke Frankfurt–London eingesetzt sind, starten gleichzeitig und fliegen normalerweise mit gleicher Geschwindigkeit. An einem gewissen Tag wird jedoch von London aus eine Maschine eingesetzt, die eine um 60 km/h höhere Reisegeschwindigkeit entwickelt, während das in Frankfurt startende Flugzeug wegen Gegenwind seine Normalgeschwindigkeit um 30 km/h unterschreitet. Die Flugzeuge begegnen sich 1 Minute früher als sonst und an einem Ort, der vom gewöhnlichen Treffpunkt 26,25 km entfernt ist. Berechne die

Geschwindigkeiten der Flugzeuge und den Luftweg von Frankfurt nach London.

43. Ein Flugzeug konnte seine Flugzeit für eine 960 km lange Strecke um 10 Minuten verringern, indem es seine Geschwindigkeit um 24 km/h steigerte. Wie groß war dann die Geschwindigkeit, und wie lange dauerte der Flug?

44. Ein die 24 km lange Seestrecke von A nach B fahrendes Schiff sollte laut Fahrplan um 16.30 Uhr in B eintreffen. Da sich die Abfahrt in A um 15 Minuten verzögerte, erhöhte das Schiff seine Geschwindigkeit um 4 km/h. Es traf um 16.33 Uhr in B ein. Wie groß war seine Geschwindigkeit? Wann hätte es nach dem Fahrplan in A abfahren sollen?

45. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Körper mit gleicher konstanter Geschwindigkeit vom Scheitel weg. Der erste startet im Scheitel, der zweite 10 s später im Abstand 10 m vom Scheitel. 20 s nach dem Start des ersten Körpers haben die beiden Körper eine Entfernung von 20 m. Welche Geschwindigkeit haben sie?

46. Zwei Schiffe, A und B, fahren Kurs NO bzw. NW mit konstanten Geschwindigkeiten. A ist 2 kn schneller als B. 1 sm (= 1,852 km) hinter A kreuzt B die Bahn von A. Eine halbe Stunde später beträgt ihre Entfernung 10 sm. Wie viele kn (1 kn = 1 sm/h) betragen ihre Geschwindigkeiten?

47. Auf einer Strecke von 450 m macht das Vorderrad eines Wagens 120 Umdrehungen mehr als das Hinterrad; das Vorderrad eines anderen Wagens, dessen Räder je 0,5 m mehr Umfang haben, macht auf derselben Strecke 75 Umdrehungen mehr als sein Hinterrad. Welchen Umfang haben die Räder des ersten Wagens?

48. In einer Gasmenge, deren Volumen konstant gehalten wurde, stieg der Druck um 160 hPa, während sich die Temperatur um 60 K erhöhte. Als danach das Gas in Eiswasser auf 0 °C abgekühlt wurde, ging der Druck wieder um 232 hPa zurück. Wie groß waren am Anfang Druck und Temperatur?

49. Ein 1 m langes Glasrohr (innerer Durchmesser etwa 3 mm) wird 52 cm tief senkrecht in Petroleum ($\varrho = 0{,}8$ g/cm^3) getaucht. Dann wird die obere Öffnung luftdicht verschlossen und das Rohr aus der Flüssigkeit gehoben. Welche Höhe hat die im Rohr zurückbleibende Flüssigkeitssäule, wenn der äußere Luftdruck 1000 hPa beträgt?

50. Bei einem Luftdruck von 960 hPa wird ein einseitig verschlossenes Rohr von 50 cm Länge (innen!) mit der Öffnung nach unten senkrecht in Wasser getaucht. Die Rohröffnung befindet sich im Endzustand 2,5 m unter dem Wasserspiegel. Wie weit ist dann das Wasser von unten her in das Rohr eingedrungen? (Luft- und Wassertemperatur sollen als gleich angenommen werden).

3.7 Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Es gibt Gleichungen, die sich durch geeignete Umformungen auf quadratische zurückführen lassen. Einige der wichtigsten Typen wollen wir im Folgenden betrachten.

3.7.1 Wurzelgleichungen

Wie in **2.5** gezeigt, kann man Wurzelgleichungen durch das Verfahren »Isolieren – Quadrieren« lösen. In der Definitionsmenge der Wurzelgleichung ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, wenn beide Seiten gleiches Vorzeichen haben; andernfalls muss man die Probe machen, weil womöglich die Lösungsmenge vergrößert wurde. Kennt man die Definitionsmenge nicht, dann muss man die Probe auf alle Fälle machen.

Beispiel 1:

$$5\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2x+5} = \sqrt{3x-5}; \qquad D = [\tfrac{5}{3}; +\infty[$$

$$\Rightarrow\ 25(x-1) + 4(2x+5) - 20\sqrt{(x-1)(2x+5)} = 3x-5$$

$$-20\sqrt{2x^2+3x-5} = -30x$$

$2\sqrt{2x^2+3x-5} = 3x.$ Wir erkennen, x kann nicht negativ sein.

$$4(2x^2+3x-5) = 9x^2$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$x_1 = 10;\ x_2 = 2$$

Probe:

$x_1 = 10$:

$$\left.\begin{aligned} \text{LS} &= 5\sqrt{10-1} - 2\sqrt{2\cdot 10+5} = 5\cdot 3 - 2\cdot 5 = 5 \\ \text{RS} &= \sqrt{3\cdot 10-5} = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{10 ist Lösung.}$$

$x_2 = 2$:

$$\left.\begin{aligned} \text{LS} &= 5\sqrt{2-1} - 2\sqrt{2\cdot 2+5} = 5\cdot 1 - 2\cdot 3 = -1 \\ \text{RS} &= \sqrt{3\cdot 2-5} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{2 ist keine Lösung.}$$

Lösungsmenge $L = \{10\}$

Beispiel 2:

Aufgabe IX aus Kapitel V der *Ars Magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):

Zerlege die Zahl 10 so in zwei Teile, dass der größere, vermindert um das Doppelte seiner Wurzel, gleich ist dem kleineren, vermehrt um das Doppelte seiner Wurzel.

Bezeichnen wir den größeren Teil mit x, dann muss gelten:

$$x - 2\sqrt{x} = (10 - x) + 2\sqrt{10 - x}; \quad D = [0; 10]$$

$$\sqrt{10 - x} = (x - 5) - \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 10 - x = (x - 5)^2 - 2(x - 5)\sqrt{x} + x$$

$$2(x - 5)\sqrt{x} = (x - 5)^2 + 2x - 10$$

$$(x - 5)(2\sqrt{x} - (x - 5) - 2) = 0$$

$$(x - 5)(2\sqrt{x} - x + 3) = 0$$

$\underline{x = 5} \vee 2\sqrt{x} = x - 3.$ Für $x \geqq 3$ gilt weiter:

$$4x = x^2 - 6x + 9$$
$$x^2 - 10x + 9 = 0$$
$$(x - 9)(x - 1) = 0$$
$$\underline{x = 9}$$

Beachte: $x - 1$ kann nicht null werden, da $x \geqq 3$ gilt.

Probe:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = 5:\ \mathrm{LS} &= 5 - 2\sqrt{5} \\ \mathrm{RS} &= (10 - 5) + 2\sqrt{10 - 5} = 5 + 2\sqrt{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{5 ist keine Lösung.}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 = 9:\ \mathrm{LS} &= 9 - 2\sqrt{9} = 9 - 6 = 3 \\ \mathrm{RS} &= (10 - 9) + 2\sqrt{10 - 9} = 1 + 2 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{9 ist Lösung.}$$

Die gesuchte Zerlegung lautet also: $10 = 9 + 1$.

Beispiel 3:

$\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x} = 2\sqrt{a - b}$; $D = [0; a]$ für $a \geqq 0$; für $a < 0$ ist die Gleichung unsinnig. Wegen $a - b \geqq 0$ muss $b \leqq a$ sein. Für $x \in D$ sind beide Seiten nicht negativ und wir ändern die Lösungsmenge beim Quadrieren nicht:

$$a + x + a - x - 2\sqrt{a^2 - x^2} = 4(a - b)$$

$$2b - a = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Für $a > 2b$ gibt es keine Lösung. Für $0 \leqq b \leqq a \leqq 2b$ erhält man durch Quadrieren der letzten Gleichung (Äquivalenzumformung!):

$$4b^2 + a^2 - 4ab = a^2 - x^2$$
$$x^2 = 4b(a - b)$$

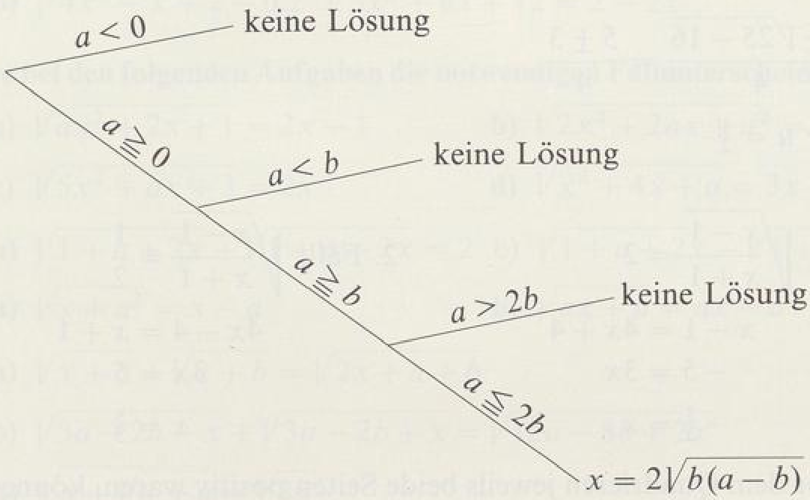
Die rechte Seite ist unter unseren Voraussetzungen sicher nicht negativ, also ergibt sich

$$|x| = 2\sqrt{b(a-b)}$$

Wegen $x \in D$ ist $x \geqq 0$, und es gilt schließlich

$$x = 2\sqrt{b(a-b)}.$$

Einen Überblick über die betrachteten Fälle gibt der Lösungsbaum:



Manchmal ist es von Vorteil, eine Wurzel durch eine neue Variable zu ersetzen und die Gleichung mit der neuen Variablen zu lösen. Eine solche Ersetzung heißt **Substitution***.

Beispiel 4:

$$2x - 5\sqrt{x} - 12 = 0 \qquad \text{Substitution:} \quad u := \sqrt{x}$$

$$2u^2 - 5u - 12 = 0$$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

$$u = 4 \vee u = -\tfrac{3}{2}.$$

Um x zu erhalten machen wir die Substitution rückgängig. Die letzte Zeile liefert die beiden Gleichungen

$$\sqrt{x} = 4 \vee \sqrt{x} = -\tfrac{3}{2}.$$

Die zweite ist widersprüchlich, die erste liefert $x = 16$.
Also: $L = \{16\}$

* substituere (lat.) = an die Stelle einer Person oder Sache setzen

Beispiel 5:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\frac{5}{2}=0 \qquad \text{Substitution: } u := \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$u+\frac{1}{u}-\frac{5}{2}=0$$

$$2u^2-5u+2=0$$

$$u=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

$$u=2 \vee u=\tfrac{1}{2}$$

1\. Fall: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=2$

$$x-1=4x+4$$
$$-5=3x$$
$$-\tfrac{5}{3}=x$$

2\. Fall: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{1}{2}$

$$4x-4=x+1$$
$$3x=5$$
$$x=\tfrac{5}{3}$$

Weil vor dem Quadrieren jeweils beide Seiten positiv waren, können wir auf die Probe verzichten; es gilt also $L=\{\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\}$.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{11-5x}=3-x$ **b)** $\sqrt{3x+7}+x=7$

2. a) $\sqrt{4x-15}=3-x$ **b)** $\sqrt{2x+3}=x+1$

3. a) $\sqrt{2x+9}+x+3=2\sqrt{2x+9}$ **b)** $3\cdot\sqrt{3x+1}-2x=6-\sqrt{3x+1}$

4. a) $\sqrt{4x+3}-3=3x-2\sqrt{3+4x}$

b) $2\sqrt{19+5x}-2x+4\sqrt{5x+19}=\sqrt{5x+19}+22$

5. a) $\sqrt{5x^2+2x+6}=x+4$ •**b)** $\sqrt{x^2-3x+3}=4x+7$

6. a) $\sqrt{12x^2+20x+3}=4x+2$ **b)** $\sqrt{3x^2-16x+3}=3x-2$

7. a) $\sqrt{2x+1}+2=2\sqrt{x+9}-3$ **b)** $\sqrt{2x+1}+2=3-2\sqrt{x+9}$

8. a) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{5-4x}=4$ **b)** $2-3\sqrt{x+2}=2\sqrt{2x+3}-3$

9. a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+10}$ **b)** $\sqrt{5x-1}-2\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1}$

10. a) $\sqrt{x+2}+2\sqrt{x}-\sqrt{13x+3}=0$ b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-5}-2\sqrt{2-x}=0$

11. a) $\sqrt{x+4+\sqrt{3x-5}}=3$ b) $\sqrt{\sqrt{x-15}+1-x}=4$

12. a) $\sqrt{7{,}5+x-\sqrt{5+4x}}=2{,}5$ b) $\sqrt{3+\sqrt{3-2x}+x}=2$

13. a) $\sqrt{2x+5+\sqrt{x^2+3x+3}}=2$ b) $\sqrt{\sqrt{3x^2+5x-1}-1-0{,}5x}=0{,}5$

14. a) $\sqrt{x^2+2+\sqrt{7-6x}}+x=1$

b) $\sqrt{4x^2-x+2-0{,}2\cdot\sqrt{5x^2+8x+12}}=2-2x$

Führe bei den folgenden Aufgaben die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

•**15.** a) $\sqrt{ax^2+2x+1}=2x-1$ b) $\sqrt{2x^2+2ax+a^2}=x+2a$

c) $\sqrt{5x^2+ax+3}=2x$ d) $\sqrt{x^2+4x+a}=3x+2$

•**16.** a) $\sqrt{1+a+2x}+\sqrt{1+a-2x}=2$ b) $\sqrt{1+a+2x-\sqrt{1+a-2x}}=2$

⁚**17.** a) $\sqrt{x+a^2}=x-a$ b) $\sqrt{ax+a}=ax-a$

•**18.** a) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{2x+a+b}$

b) $\sqrt{3a-2b-x}+\sqrt{3a-2b+x}=\sqrt{12a-8b+2x}$

•**19.** a) $\sqrt{x+\sqrt{x+a}}=\sqrt{2x}$

⁚b) $\sqrt{\sqrt{a^2x^2+abx+b^2}-ax}=\sqrt{ax+b}$

20. Angeregt durch die *Practica Arithmeticae et Mensurandi singularis* – »Einzigartige Handhabung der Arithmetik und des Messens« – des Geronimo CARDANO (1501–1576) aus dem Jahre 1539 stellte Michael STIFEL (1487? bis 1567) in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – 1544 folgende Aufgabe:
Ein Spieler gewinnt am 1. Tag so viel, wie er hatte, am 2. Tag die Quadratwurzel aus dem Ganzen und dazu noch 2 Gulden, am 3. Tag das Quadrat dessen, was er am 2. Tag hatte, sodass er schließlich 5550 Gulden besaß. Wie viel hatte er anfangs?

21. Aufgabe IV aus Kapitel V der *Ars Magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):
Addiert man zu einer Zahl das Doppelte ihrer Wurzel und dazu die doppelte Wurzel dieser Summe, dann erhält man 15. Wie heißt diese Zahl?*

22. a) $x-2\sqrt{x}+1=0$ b) $x+5\sqrt{x}=14$ c) $3\sqrt{x}=-2-x$

23. a) $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}=3$ b) $\sqrt{\dfrac{7x^2+2x}{2-x^2}}=2+3\sqrt{\dfrac{2-x^2}{7x^2+2x}}$

* In der Originalaufgabe von CARDANO steht 10 statt 15. Wer Mut hat, rechne die Aufgabe mit diesem Wert.

24. a) $2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+5=3\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ **b)** $\dfrac{7\sqrt{\frac{x+1}{x}}+5}{7\sqrt{\frac{x}{x+1}}-5}=6$

25. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):

a) $x-(\frac{7}{12}x+4)=\sqrt{x}$ **b)** $3x+4\sqrt{x^2-3x}=20$

c) $3x+4\sqrt{x^2-3x}=x^2+4$ **d)** $x^2=\sqrt{6x}\sqrt{5x}+10x+20$

26. Aus *Lilavati* – »Die Schöne« – von BHĀSKARA II (1115–nach 1178):

a) § 67: Ardschuna, Prithas Sohn, im Kampf gereizt, schoss einen Köcher Pfeile um Karna zu töten. Mit der Hälfte seiner Pfeile parierte er die seines Gegners, mit dem Vierfachen der Wurzel seines Köcherinhalts tötete er dessen Pferde, mit 6 Pfeilen Salya, und mit 3 Pfeilen zerstörte er Schirm, Standarte und Bogen, mit einem schließlich trennte er den Kopf seines Feindes vom Rumpf. Wie viele Pfeile ließ Ardschuna fliegen?

b) § 68: Die Wurzel aus der Hälfte eines Bienenschwarms flog zu einem Jasminbusch. $\frac{8}{9}$ des Schwarms blieben im Stock. Ein Weibchen schließlich umschwirrte eine Lotosblume, in der ein Männchen gefangen saß, das vom Duft zur Nachtzeit angelockt worden war*. Sag mir, wunderschöne Frau, die Anzahl der Bienen!

c) § 69: Eine Zahl, vermehrt um ihr Drittel und um das 18fache ihrer Wurzel, ergibt 1200. Wie heißt die Zahl?

3.7.2 Die biquadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form $ax^4+bx^2+c=0$ mit $a \neq 0$ lässt sich durch die Substitution $u := x^2$ auf eine quadratische Gleichung der Form $au^2+bu+c=0$ zurückführen. Weil $u^2=(x^2)^2$ ist, nennen wir und auch andere Autoren eine solche Gleichung **biquadratisch****. Gleichungen dieser Art lösten bereits die Babylonier im Zusammenhang mit Gleichungssystemen (siehe **3.8**). Die folgenden zwei Beispiele stammen aus Kapitel I der *Ars magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576).

* Der Lotos öffnet sich nachts und schließt sich bei Tage.

** *bis* (lat.) = *zweimal, auf doppelte Weise.* – Bei DESCARTES (1596–1650) findet man 1628/29 *biquadratum* an Stelle von *quadratumquadratum* zur Bezeichnung der 4. Potenz, bei Christian VON WOLFF (1679 bis 1754) in seinen *Die Anfangsgründe Aller Mathematischen Wissenschaften* 1710 den Ausdruck *biquadratische Aequation* als Bezeichnung für eine allgemeine Gleichung 4. Grades, also eine Gleichung der Form $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, wie es auch heute noch bei manchen Autoren üblich ist. In der 2. Auflage erfolgte dann die Eindeutschung *biquadratische Gleichung*.

Beispiel 1:

$x^4 + 12 = 7x^2$ Substitution: $u := x^2$

$u^2 - 7u + 12 = 0$

$u = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(7 \pm 1)$

$u = 3 \vee u = 4.$

Somit muss gelten

$x^2 = 3 \vee x^2 = 4$

$|x| = \sqrt{3} \vee |x| = 2$

$x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} \vee x = -2 \vee x = 2.$

Wir erhalten eine 4-elementige Lösungsmenge: $\{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$.

Beispiel 2:

$x^4 + 3x^2 = 28$ Substitution: $u := x^2$

$u^2 + 3u - 28 = 0$

$u = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{121}) = \frac{1}{2}(-3 \pm 11)$

$u = -7 \vee u = 4.$

Somit muss gelten

$x^2 = -7 \vee x^2 = 4$

$x^2 = -7 \vee |x| = 2.$

Da die erste Gleichung widersprüchlich ist, erhalten wir eine 2-elementige Lösungsmenge, nämlich $L = \{\} \cup \{-2; 2\} = \{-2; 2\}$.

Mit einiger Übung kann man sich die Schreibarbeit der Substitution ersparen, wenn man gleich x^2 als neue Variable nimmt. Dann schreibt sich Beispiel 1 wie folgt:

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

$(x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{1})$

$x^2 = 3 \vee x^2 = 4,$ woraus man wie oben erhält

$|x| = \sqrt{3} \vee |x| = 2,$ also $L = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}.$

Manchmal lassen sich auch Gleichungen höheren Grades durch eine geeignete Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Auch hierzu wieder ein Beispiel von Geronimo CARDANO, diesmal aus Kapitel VI seiner *Ars magna*.

Beispiel 3:

$x^8 + x^4 = 12$ Substitution: $u := x^4$

$u^2 + u - 12 = 0$

$u = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{49}) = \frac{1}{2}(-1 \pm 7)$

$u = -4 \vee u = 3$.

Somit muss gelten

$x^4 = -4 \vee x^4 = 3$ || radizieren

$x^2 = \sqrt{3}$ || radizieren

$|x| = \sqrt{\sqrt{3}}$

$x = -\sqrt{\sqrt{3}} \vee x = \sqrt{\sqrt{3}}$.

Da $x^4 = -4$ eine widersprüchliche Gleichung ist, erhält man als Lösungsmenge $\{-\sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{3}}\}$.

Aufgaben

1. Aus der *Arithmetica integra* (1544) des Michael STIFEL (1487?–1567):
a) $2x^4 = 1450 - 8x^2$ **b)** $x^4 = 18x^2 + 648$ **c)** $x^4 - 4x^2 = 2205$
d) $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 2538$ **e)** $x^8 = 214\,651\,701 - 20x^4$
f) $x^8 = 2000x^4 + 185\,076\,881$ **g)** $x^8 = 20\,000x^4 - 78\,461\,119$

2. Aus Kapitel I, VI und XXIV der *Ars magna* (1545) das Geronimo CARDANO (1501–1576):
a) $x^4 + 12 = 7x^2$ **b)** $x^4 + 12 = 6x^2$ **c)** $x^4 = 2x^2 + 8$
d) $x^4 + x^2 = 12$ **e)** $x^4 + 2x^2 = 10$

3. a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ **c)** $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$
d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **e)** $x^4 - 20x^2 = 125$ **f)** $12x^4 - 81x^2 - 21 = 0$

4. a) $3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ **b)** $9x^4 + 64x^2 = -7$ **c)** $2x^4 - 11x^2 + 16 = 0$

5. a) $2x^5 - 39x^3 - 245x = 0$ **b)** $32x^4 - 82x^2 - 405 = 0$

6. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):
$(\frac{1}{3}x^2 + 1)(\frac{1}{4}x^2 + 2) = x^2 + 13$

•**7. a)** $\dfrac{9x^4 - 325x^2 + 36}{3x^2 + 17x - 6} = 0$ **b)** $\dfrac{x^6 - 16x^2}{5x^4 - 19x^2 - 4} = 0$

8. a) Beweise: Wenn die drei Koeffizienten einer biquadratischen Gleichung dasselbe Vorzeichen haben, dann ist $L = \{\}$.

b) Ist der vorausgehende Satz über biquadratische Gleichungen umkehrbar? (Vgl. Aufgabe **2a** und **4c**.)

**3.7.3 Kubische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a \neq 0$ heißt **kubische Gleichung*** oder **Gleichung 3. Grades**. Wenn man eine Lösung einer kubischen Gleichung schon kennt oder errät, dann lässt sich die kubische Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Zum Nachweis folgen wir einem Gedankengang, den Geronimo Cardano (1501–1576) in Regel 6 von Kapitel XXV seiner *Ars magna* 1545 anspricht und den François Viète (1540–1603) in seinem *Tractatus de emendatione aequationum* (erschienen 1615) erweitert. Sei x_0 eine Lösung der Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dann gilt
$ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0$.
Dies verwenden wir nun um das auf der linken Seite der kubischen Gleichung stehende Polynom 3. Grades umzuformen:

$$\begin{aligned}
&ax^3 + bx^2 + cx + d = \\
&= ax^3 + bx^2 + cx + d - 0 = \\
&= ax^3 + bx^2 + cx + d - ax_0^3 - bx_0^2 - cx_0 - d = \\
&= a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0).
\end{aligned}$$

Nun ist aber $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$, sodass wir im zuletzt erhaltenen Ausdruck $x - x_0$ ausklammern können. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&(x - x_0)[a(x^2 + xx_0 + x_0^2) + b(x + x_0) + c] = \\
&= (x - x_0)[ax^2 + (ax_0 + b)x + (ax_0^2 + bx_0) + c] = \\
&= (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) \quad \text{mit} \quad A := a \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad B := ax_0 + b \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad C := ax_0^2 + bx_0 + c.
\end{aligned}$$

Man erkennt, wie man, ausgehend von a, schrittweise A, B und C aufbauen kann:
$A = a, \quad B = Ax_0 + b, \quad C = Bx_0 + c.$
Wir halten das Ergebnis dieser Umformung fest in

Satz 125.1: Ist x_0 eine Lösung der kubischen Gleichung $ax^3 + bx^2 + {}$ $+ cx + d = 0$, so lässt sich die linke Seite faktorisieren zu

$$\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C)}$$

mit $A = a$, $B = Ax_0 + b$, $C = Bx_0 + c$.

* Eine Zahl der Form a^3 heißt bei Euklid (um 300 v. Chr.) κύβος (kýbos) = Würfel, was wohl auf die Pythagoreer zurückgeht. Heron von Alexandria – von seinen Lebensdaten wissen wir nur, dass er eine Mondfinsternis des Jahres 62 n. Chr. beschreibt – bezeichnet mit κύβος die 3. Potenz. Bei Diophant (um 250 n. Chr.) gewinnt κύβος dann auch die Bedeutung »3. Potenz der Unbekannten«, wofür die Araber كعب (kaaba) sagen, was wieder nichts anderes als Würfel bedeutet. (So heißt heute noch das seit 703 unveränderte quaderförmige Gebäude [12 m × 10 m × 15 m] in Mekka, das Ziel der muslimischen Pilgerfahrten.) Als im 12. Jh. die arabischen mathematischen Schriften ins Lateinische übertragen wurden, übersetzte man *kaaba* wortgetreu mit *cubus*. Im *Mathematischen Lexicon* von 1716 des Christian von Wolff (1679–1754) erscheint der Fachausdruck **kubische Gleichung**, der 1710 in den *Anfangsgründen* noch *kubische Aequation* lautete.

Aus Satz 125.1 ergibt sich als wichtige

Folgerung: Eventuelle weitere Lösungen der kubischen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ müssen Lösungen der quadratischen Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ sein.
Dazu

Beispiel 1: $3x^3 - 2x^2 - 23x + 30 = 0$

Durch Probieren mit den Werten 0, ± 1, ± 2 usw. findet man, dass die Zahl 2 eine Lösung ist. Also gilt $A = 3$, $B = 3 \cdot 2 - 2 = 4$ und $C = = 4 \cdot 2 - 23 = -15$. Eventuelle weitere Lösungen der Gleichung $3x^3 - 2x^2 - 23x + 30 = 0$ müssen also Lösungen der quadratischen Gleichung $3x^2 + 4x - 15 = 0$ sein. Wir erhalten

$$x = \tfrac{1}{6}(-4 \pm \sqrt{196}) = \tfrac{1}{6}(-4 \pm 14)$$

$$x = -3 \vee x = \tfrac{5}{3}.$$

Wer sich nicht die Ausdrücke für A, B und C merken will, erhält den quadratischen Faktor $Ax^2 + Bx + C$ des kubischen Terms $ax^3 + bx^2 + cx + d$, indem er letzteren durch $x - x_0$ dividiert. Da der kubische Term ein Polynom und auch $x - x_0$ ein Polynom in x ist, nennt man eine solche Division **Polynomdivision**. Wie sie praktisch abläuft, zeigen wir am Polynom von Beispiel 1; dabei ist $x_0 = 2$.

Beispiel 2: Die Polynomdivision

$(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) : (x - 2)$

Wir beginnen mit der Division bei den Termen mit den höchsten Potenzen von x, also mit $3x^3 : x = 3x^2$.

Das Ergebnis $3x^2$ schreiben wir rechts vom Gleichheitszeichen als ersten Summanden an und multiplizieren damit den Divisor $x - 2$. Das erhaltene Produkt $3x^3 - 6x^2$ ziehen wir vom Dividendenpolynom ab. Dieses Verfahren setzen wir mit dem Restpolynom so lange fort, bis sich als Rest null ergibt:

$$\begin{array}{l}
(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) : (x - 2) = 3x^2 + 4x - 15 \\
\underline{-(3x^3 - 6x^2)} \\
\qquad\qquad 4x^2 - 23x + 30 \\
\qquad\quad \underline{-(4x^2 - 8x)} \\
\qquad\qquad\qquad -15x + 30 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-15x + 30)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Beachte: Ergibt sich nicht 0 als Rest, so hast du entweder beim Probieren einen Fehler gemacht und dein x_0 ist gar keine Lösung, oder du hast dich beim Dividieren verrechnet.

Man kommt ohne Polynomdivision schneller zum quadratischen Faktor, wenn man vorher ein wenig kopfrechnet. Setzt man nämlich auf Grund der obigen Überlegungen an

$(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) = (x-2)(Ax^2 + Bx + C)$

und multipliziert in Gedanken aus, so erkennt man sofort, dass $A = 3$ und $C = -15$ sein müssen. Also kann man stattdessen gleich mit dem Ansatz

$(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) = (x-2)(3x^2 + Bx - 15)$

beginnen. Vergleicht man die Koeffizienten der quadratischen Glieder auf beiden Seiten – rechts muss man in Gedanken ausmultiplizieren –, so ergibt sich $-2 = -6 - 2B$, also $B = 4$,

und damit der quadratische Faktor wie oben zu $3x^2 + 4x - 15$.

Aufgaben

1. Zur Polynomdivision

a) Fehlen bei den Polynomen Glieder, so rät Michael STIFEL (1487? bis 1567) in seiner *Arithmetica integra* (1544), die fehlenden Potenzen mit dem Koeffizienten null zu versehen und sie im Polynom mitzuführen, also die Division $(x^3+1):(x+1)$ in der Form $(x^3 + 0x^2 + 0x + 1):(x+1)$ auszuführen. Mach es und verfahre ebenso bei den folgenden Aufgaben.

b) $(x^3 - 1):(x-1)$ **c)** $(x^3 + 8):(x+2)$

d) $(8x^3 + 125):(2x+5)$ **e)** $(16x^4 - 81):(2x-3)$

2. Auf einer babylonischen Keilschrifttafel, deren einer Teil in London (BM 85200) und deren anderer in Berlin (VAT 6599) liegt, finden sich mehrere kubische Gleichungen:

a) Aufgabe 5: $z^3 + z^2 = 252$ **b)** Aufgabe 20: $z^3 + 7z^2 = 8$

3. Bei den Griechen findet sich die erste nicht geometrisch gelöste kubische Gleichung bei DIOPHANT (um 250 n. Chr.) in Buch VI seiner *Ἀριθμητικῶν βιβλία* bei der Behandlung des folgenden Problems (Nr. 17):
Eine Quadratseite ist um 2 Längeneinheiten größer als die Kante eines Würfels, dessen Volumenmaßzahl aber um 2 größer ist als die Flächenmaßzahl des Quadrats. Wie groß sind Quadratseite und Würfelkante? – DIOPHANT bezeichnete die Würfelkantenlänge mit $x - 1$. Verfahre ebenso!

4. Bei BHĀSKARA II (1115–nach 1178) findet sich im *Bidscha-ganita* (§ 137) die Gleichung $12x + x^3 = 6x^2 + 35$.

5. Christoff RUDOLFF (um 1500 Jauer/Schlesien – vor 1543 Wien?) hat 1525 in seiner *Behend und Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coß genennt werden* einige kubische Gleichungen gelöst ohne den Lösungsweg anzugeben.

a) $63 + x^3 = 10x^2$ **b)** $605 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3$ **c)** $x^3 + 75x^2 + 1875x = 27250$

Zu den Aufgaben 6 bis 10. Die größte Leistung auf dem Gebiet der kubischen Gleichungen vollbrachte Geronimo CARDANO (1501–1576), der für sie eine allgemeine Lösungsformel beweisen konnte (Näheres in *Algebra 10*). Viele Kapitel seiner *Ars magna* (1545), der mit Ausnahme von **8h** die folgenden Aufgaben entnommen sind, beschäftigen sich mit kubischen Gleichungen. Wie damals üblich schreibt CARDANO noch keine negativen Koeffizienten, sodass er den Lösungsgang für die dadurch verschiedenen möglichen Typen vorführen muss. CARDANO erkennt aber, dass eine, zwei oder drei Lösungen auftreten können, wofür er auch Fallunterscheidungen angibt.

6. a) $x^3 + 6x = 20$ **b)** $x^3 + 16 = 12x$ **c)** $x^3 = 19x + 30$

7. a) $x^3 + 22\frac{1}{2}x^2 = 98$ **b)** $x^3 + 48 = 10x^2$ **c)** $x^3 = 3x^2 + 16$

8. a) $x^3 = 3x^2 + 20x + 6$ **b)** $x^3 + 6x^2 = 20x + 56$
c) $x^3 + 21x = 9x^2 + 5$ **d)** $x^3 + 9 = 6x^2 + 24x$
e) $x^3 + 6x^2 + x = 14$ **f)** $x^3 + 6x^2 + 12 = 31x$
g) $x^3 + 3x + 18 = 6x^2$ **h)*** $25 + 4x^2 + 2x^3 = 16x + 55$

9. a) $x^6 + 3x^4 = 20$ **b)** $x^6 + 3x^4 + 10 = 15x^2$

10. Bei den Gleichungen vom Typ $x^3 = px + q$ und $x^3 + q = px$ versagte gerade dann die von CARDANO bewiesene Formel, wenn – wie wir heute wissen – es 3 Lösungen gibt. Das ist der Fall, wie CARDANO entdeckte, wenn $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$ ist. Man nannte diesen Fall später **casus irreducibilis**, d. h. unzurückführbarer Fall. Im Kapitel XXV seiner *Ars magna*, das er mit *De Capitulis imperfectis et specialibus* – »Über die unvollkommenen und nur in Sonderfällen brauchbaren Regeln« – überschreibt, gibt er daher besondere Verfahren zur Lösung solcher Gleichungen an. Ihm entnehmen wir mit Ausnahme von **a)** die folgenden Gleichungen**.
a) $x^3 = 9x + 10$ **b)** $x^3 = 32x + 24$ **c)** $x^3 = 16x + 21$
d) $x^3 + 12 = 34x$ **e)** $x^3 + 18 = 19x$ **f)** $x^3 + 8 = 18x$

11. Von François VIÈTE (1540–1603) stammen aus dem
a) *Responsum ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit* ADRIANUS ROMANUS von 1595***: $3x - x^3 = \sqrt{2}$
b) *Tractatus de aequationum recognitione* (1615 gedruckt):
1) $8x - x^3 = 7$ **2)** $9x^2 - x^3 = 8$

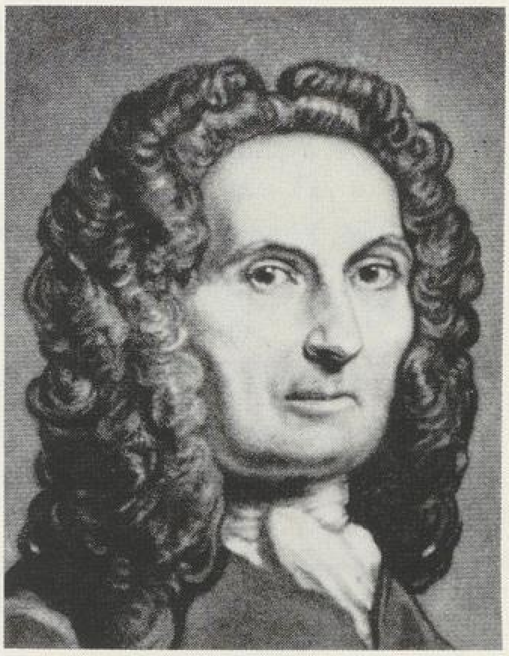
* Michael STIFEL bringt diese Aufgabe in seiner *Arithmetica integra* 1544 auf Blatt 317. Er hat sie CARDANOS *Practica Arithmeticae* von 1539 entnommen, in der sich jener auch schon mit kubischen Gleichungen beschäftigt hatte. STIFEL empfiehlt dieses Buch seinen Lesern wärmstens, rät ihnen aber, statt der umständlichen Bezeichnungen CARDANOS seine viel bequemeren zu verwenden.

** Mit der in **a** wiedergegebenen Gleichung teilte CARDANO seine Entdeckung des casus irreducibilis TARTAGLIA in einem Brief mit, den dieser am 4. 8. 1539 erhalten hat.

*** »Antwort auf das Problem, das ADRIAEN VAN ROOMEN [1561–1615] allen Mathematikern des ganzen Erdkreises [1593] zur Lösung stellte«. VIÈTE konnte die gestellte Gleichung 45. Grades lösen.

**3.7.4 Reziproke Gleichungen

Abraham DE MOIVRE (1667–1754) stieß bei seinen Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einen besonderen Typ von Gleichungen, den er 1711 in seiner Abhandlung *De mensura sortis* – »Über ein Maß des Zufalls« – beschrieb und für den er 1730 in seinen *Miscellanea Analytica* – »Allerlei zur Analysis« – wichtige Sätze herleitete. 1733 beschäftigte sich Leonhard EULER (1707–1783) mit diesen Gleichungen und nannte sie wegen einer wichtigen Eigenschaft, die wir gleich beweisen wollen, reziproke Gleichungen. Da sie einer Verallgemeinerung fähig sind, fügt man heute noch »1. Art« bei. Unter Benützung der von DE MOIVRE gegebenen Beschreibung legen wir also fest



1736

A. DeMoivre

Abb. 129.1 Abraham DE MOIVRE (26.5.1667 Vitry-le-François bis 27.11.1754 London) – Gemälde von Joseph HIGHMORE (1692–1780)

> **Definition 139.1:** Eine Gleichung heißt **reziproke Gleichung 1. Art**, wenn die vom Anfang und vom Ende des Gleichungspolynoms gleich weit entfernten Koeffizienten jeweils gleich sind.

Beispiele:

1) $3x^2 + 5x + 3 = 0$ Der erste und der letzte Koeffizient sind gleich.

2) $-\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

3) $5x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 0$

Der erste und der letzte Koeffizient sind gleich, ebenso der zweite und der vorletzte.

Offensichtlich kann 0 nicht Lösung einer reziproken Gleichung sein, da der letzte Koeffizient gleich dem ersten Koeffizienten und damit ungleich null ist. Der folgende Satz macht nun den von EULER gegebenen Namen verständlich.

> **Satz 129.1:** Ist r Lösung einer reziproken Gleichung 1. Art, so ist auch der reziproke Wert $\frac{1}{r}$ Lösung dieser Gleichung.

Beweis: Der Beweis sei beispielhaft für eine Gleichung 4. Grades vorgeführt. Der allgemeine Beweis verläuft analog.

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (mit $a \neq 0$) ist eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 4. Wenn r Lösung dieser Gleichung ist, dann gilt

$ar^4 + br^3 + cr^2 + br + a = 0$.

Da $r \neq 0$ ist, können wir r^4 ausklammern und erhalten

$$r^4\left(a + b\left(\frac{1}{r}\right) + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right)^3 + a\left(\frac{1}{r}\right)^4\right) = 0.$$

Da r^4 nicht null werden kann, muss die Klammer null sein. In der Klammer steht aber, von rechts nach links gelesen, der gegebene Gleichungsterm, in den an Stelle von x der Wert $\frac{1}{r}$ eingesetzt wurde. Also ist $\frac{1}{r}$ Lösung, was zu zeigen war.

Wie findet man aber nun die Lösungsmenge einer reziproken Gleichung 1. Art? Auch hier wollen wir das Wesentliche wieder anhand von Beispielen zeigen.

Beispiel 1: Der Grad der reziproken Gleichung 1. Art ist gerade.

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

Da null keine Lösung ist, dürfen wir durch x^2 dividieren und erhalten

$$6x^2 + 5x - 38 + 5 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

Joseph Louis de LAGRANGE (1736–1813) schlug 1770 die Substitution

$x + \frac{1}{x} =: z$ vor.

Durch Quadrieren erhält man $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2$, sodass die letzte Gleichung übergeht in

$6(z^2 - 2) + 5z - 38 = 0$

$6z^2 + 5z - 50 = 0$

$z = -\frac{10}{3} \vee z = \frac{5}{2}$.

Machen wir die Substitution wieder rückgängig, dann erhalten wir

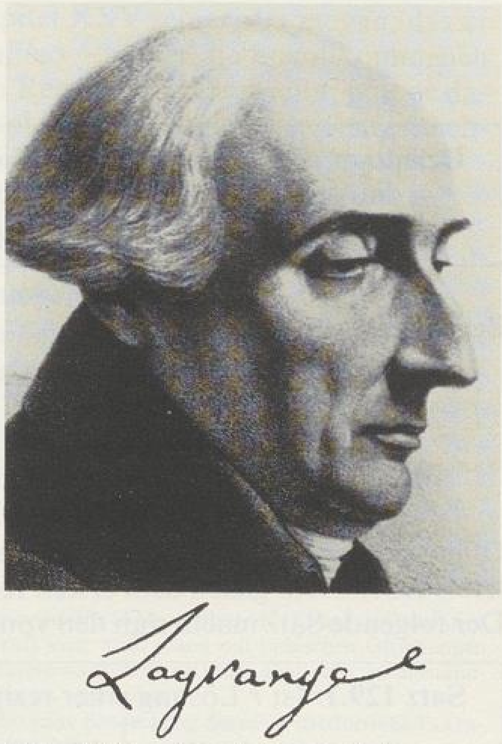


Abb. 130.1 Joseph Louis de LAGRANGE (25.1.1736 Turin–10.4.1813 Paris)

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \vee x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2},$$

was durch Multiplikation mit dem Hauptnenner auf zwei reziproke quadratische Gleichungen führt:

$$3x^2 + 10x + 3 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$x = -3 \vee x = -\tfrac{1}{3} \quad \vee \quad x = \tfrac{1}{2} \vee x = 2.$$

Die gesuchte Lösungsmenge lautet somit $L = \{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$.

Ist der Grad einer reziproken Gleichung 1. Art ungerade, dann gilt

Satz 131.1: Eine reziproke Gleichung 1. Art ungeraden Grades hat stets die Lösung -1.

Beweis: $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ ist eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 3. Setzt man -1 ein, so erhält man $-a + b - b + a = 0$, was zu zeigen war. Der allgemeine Beweis verläuft analog.

In Satz 125.1 haben wir gezeigt, dass man eine kubische Gleichung faktorisieren kann, wenn man eine Lösung kennt. Dieser Satz gilt allgemein, wenn der Gleichungsterm ein Polynom ist.* Damit lässt sich eine reziproke Gleichung 1. Art ungeraden Grades auf eine Gleichung kleineren Grades reduzieren. Dazu

Beispiel 2: $12x^5 + 8x^4 - 45x^3 - 45x^2 + 8x + 12 = 0$

Die Division durch $(x - (-1))$ liefert

$$12x^5 + 8x^4 - 45x^3 - 45x^2 + 8x + 12 =$$
$$= (x+1)(12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12),$$

wie du leicht nachrechnen kannst. Setzen wir den 2. Faktor null, so haben wir in $12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$ wieder eine reziproke Gleichung 1. Art vor uns. Dieser Sachverhalt gilt allgemein, wie man beweisen kann. Wie in Beispiel 1 substituiert man $z := x + \frac{1}{x}$ und erhält

$$12z^2 - 4z - 65 = 0 \Leftrightarrow z = -\tfrac{13}{6} \vee z = \tfrac{5}{2}.$$

Daraus gewinnt man, indem man die Substitution rückgängig macht, schließlich die beiden quadratischen reziproken Gleichungen 1. Art

$$6x^2 + 13x + 6 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

mit $\{-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\}$ bzw. $\{\frac{1}{2}, 2\}$ als Lösungsmengen, sodass man nun die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung 5. Grades angeben kann zu

$$L = \{-\tfrac{3}{2}, -1, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}, 2\}.$$

* Beweis: Dividiert man ein Polynom $P(x)$ durch $(x - x_0)$, so erhält man ein Polynom $Q(x)$ und einen Rest R; es gilt also $P(x) = (x - x_0)Q(x) + R$. Den Rest R kann man aber leicht bestimmen. Setzt man nämlich an Stelle von x den Wert x_0 ein, so erhält man $P(x_0) = (x_0 - x_0)Q(x_0) + R = 0 + R = R$, d.h., R ist der Wert des Polynoms $P(x)$ an der Stelle x_0. Ist nun x_0 eine Nullstelle des Polynoms, dann ist $P(x_0) = 0$, also auch $R = 0$, und es gilt $P(x) = (x - x_0)Q(x)$; das Polynom ist faktorisiert.

Die eingangs angekündigte Erweiterung des Begriffs der reziproken Gleichung liefert

> **Definition 132.1:** Eine Gleichung heißt **reziproke Gleichung 2. Art**, wenn die vom Anfang und vom Ende des Gleichungspolynoms gleich weit entfernten Koeffizienten dem Betrage nach jeweils gleich sind, aber verschiedenes Vorzeichen haben.

Folgerung: Ist der Grad einer reziproken Gleichung 2. Art gerade, z. B. $2k$, so muss für den mittleren Koeffizienten a_k gelten $a_k = -a_k$, d.h., der mittlere Koeffizient muss den Wert null haben.

Beispiele:

1) $3x^2 - 3 = 0$ Der erste und der letzte Koeffizient unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

2) $-\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$

3) $5x^4 - 3x^3 + 3x - 5 = 0$

Der erste und der letzte Koeffizient unterscheiden sich nur im Vorzeichen, ebenso der zweite und der vorletzte.

Satz 129.1 gilt auch für reziproke Gleichungen 2. Art, wie du selbst leicht beweisen kannst (Aufgabe 133/**1**). An Stelle von Satz 131.1 gilt

> **Satz 132.1:** Jede reziproke Gleichung 2. Art hat die Lösung $+1$.

Von der Richtigkeit dieses Satzes kannst du dich durch Einsetzen in die obigen Beispiele überzeugen; der Beweis ist leicht (Aufgabe 133/**2**).

Dividiert man eine reziproke Gleichung 2. Art durch $x - 1$, so erhält man immer, wie man zeigen kann, eine reziproke Gleichung 1. Art. Wir begnügen uns zum Nachweis auch hier mit einem Beispiel, nämlich

Beispiel 3:

$x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$ ist eine reziproke Gleichung 2. Art. Somit lässt sich der links stehende Term durch $x - 1$ dividieren und man erhält die Faktorisierung

$$(x-1)(x^3 - 5x^2 - 5x - 1) = 0.$$

Setzt man die Klammer null, so erhält man eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 3. Diese hat -1 als Lösung. Daher kann man das Polynom in der Klammer durch $x + 1$ dividieren und erhält die Faktorisierung

$$(x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 1) = 0.$$

Setzt man nun den 3. Faktor null, so erhält man eine quadratische Gleichung – sie ist reziprok von 1. Art – mit den Lösungen $3 \pm \sqrt{8}$. Die Ausgangsgleichung $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$ hat also die Lösungsmenge $L = \{3 - \sqrt{8}, -1, 1, 3 + \sqrt{8}\}$.

Aufgaben

1. Beweise die Gültigkeit von Satz 129.1 für eine reziproke Gleichung 2. Art. Unterscheide dabei, ob sie geraden oder ungeraden Grades ist, und führe den Beweis für eine Gleichung 3. und für eine Gleichung 4. Grades.

2. Zeige, dass eine reziproke Gleichung 2. Art stets 1 als Lösung besitzt. Führe den Beweis für eine Gleichung 3. und für eine Gleichung 4. Grades.

3. a) $12x^3 - 13x^2 - 13x + 1 = 0$ **b)** $x^3 - 5x^2 + 5x + 1 = 0$

4. a) $20x^4 + 19x^3 - 402x^2 + 19x + 20 = 0$
b) $20x^4 - 189x^3 + 482x^2 - 189x + 20 = 0$

5. a) $18x^4 + 51x^3 - 334x^2 + 51x + 18 = 0$
b) $36x^4 - 9x^3 - 103x^2 - 9x + 36 = 0$

6. a) $7x^4 + 36x^3 - 86x^2 + 36x + 7 = 0$
b) $10x^4 - 29x^3 + 20x^2 - 29x + 10 = 0$

7. a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$
b) $20x^4 + 16x^3 + 19x^2 + 16x + 20 = 0$

8. a) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 1 = 0$

9. a) $16x^4 - 72x^3 + 113x^2 - 72x + 16 = 0$
b) $2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 9x + 2 = 0$

10. Beweise für reziproke Gleichungen 1. Art vom Grad 4:

a) Die Lösungsmenge einer solchen Gleichung ist genau dann nicht leer, wenn die durch die Substitution $z := x + \frac{1}{x}$ gewonnene Hilfsgleichung mindestens eine Lösung hat, welche die Bedingung $|z| \geqq 2$ erfüllt.

b) Eine Doppellösung tritt genau dann auf, wenn die Hilfsgleichung die Lösung 2 oder -2 hat. Wie heißt die zugehörige Doppellösung?

c) Löst z_1 die Hilfsgleichung, so haben die zugehörigen Lösungen der Ausgangsgleichung stets dasselbe Vorzeichen wie z_1, wenn $|z_1| > 2$ ist.

11. a) $12x^5 + 23x^4 - 135x^3 - 135x^2 + 23x + 12 = 0$
b) $2x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$
c) $2x^6 - 13x^5 + 34x^4 - 46x^3 + 34x^2 - 13x + 2 = 0$

12. a) $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$ **b)** $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

13. a) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ **b)** $x^4 - 10x^3 + 10x - 1 = 0$
c) $x^4 - 1 = 0$

14. a) $12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + 16x - 12 = 0$
b) $5x^5 - 31x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 31x - 5 = 0$ **c)** $x^5 - 1 = 0$

15. a) $x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$
b) $2x^8 - 5x^7 - 4x^6 + 15x^5 - 15x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0$

**3.8 Gleichungssysteme, die auf quadratische Gleichungen führen

Im letzten Jahr hast du lineare Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten kennen gelernt. Dabei kamen die Variablen nur in der 1. Potenz vor und, ohne dass es dir vielleicht aufgefallen ist, auch nicht durch Multiplikation miteinander verbunden. Tritt also ein Term der Form x^2, y^2 oder xy auf, dann handelt es sich um ein quadratisches und nicht mehr um ein lineares Gleichungssystem. Besonders einfach sind solche Systeme, die aus einer linearen und einer quadratischen Gleichung bestehen. Dass die Lösung solcher Systeme erst mit Hilfe von quadratischen Gleichungen möglich ist, zeigt

Beispiel 1:

Auf Seite I des Keilschrifttextes AO 8862, der um 2000 v. Chr. entstanden ist und zu den ältesten babylonischen Texten gehört*, steht:
NISABA [Schutzpatronin der Wissenschaften] Länge, Breite. Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Was die Länge über die Breite hinausgeht, habe ich zur Fläche addiert, und es macht 183. Wiederum Länge und Breite addiert, gibt 27. Länge, Breite und Fläche ist was?
Der Text führt zu Beginn die beiden Unbekannten »Länge« und »Breite« ein; ihr Produkt heißt »Fläche«. Wählen wir x für »Länge« und y für »Breite«, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & xy + (x - y) = 183 \\ \text{II} & x + y = 27 \end{array} \qquad \text{Nebenbedingung: } x > y$$

Hier löst man am besten II z. B. nach y auf und setzt $y = 27 - x$ in I ein.

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & x(27 - x) + (x - 27 + x) = 183 \\ \text{II}' & y = 27 - x \\ \hline \text{I}' & x^2 - 29x + 210 = 0 \\ \text{II}' & y = 27 - x \\ \hline \text{I}' & x = 14 \quad \vee \quad x = 15 \\ \text{II}' & y = 27 - x \end{array}$$

Die Lösungsmenge $L_{\text{I}'}$ kann in einem x-y-Koordinatensystem (Abbildung 134.1) durch ein Parallelenpaar dargestellt werden, $L_{\text{II}'}$ durch eine Gerade. Die Lösungsmenge L des Gleichungssystems ergibt sich als Schnittmenge $L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'}$ zu
$L = \{(14|13), (15|12)\}$.

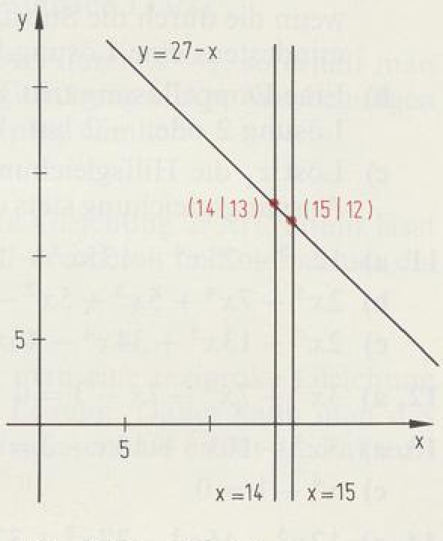


Abb. 134.1 Die Lösungsmenge von Beispiel 1

* gefunden in Larsa, aufbewahrt in Paris im Louvre in der Abteilung Antiquités Orientales. Es handelt sich um ein vierseitiges, auf allen Seiten beschriebenes Prisma der Höhe 16,8 cm und der Basisseite 7,3 cm.

Praktisch geht man so vor, dass man zu jedem aus I′ erhaltenen x-Wert den zugehörigen y-Wert aus II′ errechnet:

$x = 14 \Rightarrow y = 13$ und $x = 15 \Rightarrow y = 12$.

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems besteht also aus 2 Paaren. Wir erhalten somit zwei verschiedene Antworten auf die gestellte Frage:

Lösung 1: Länge = 14, Breite = 13, Fläche = 182,

Lösung 2: Länge = 15, Breite = 12, Fläche = 180.

Die Nebenbedingung ist jedesmal erfüllt. Eine Probe ist nicht nötig, da nur Äquivalenzumformungen vorgenommen wurden. – Auf der Keilschrifttafel ist übrigens nur Lösung 2 angegeben.

Der hier eingeschlagene Lösungsweg führt bei jedem derartigen Gleichungssystem zum Ziel. Die lineare Gleichung wird nach einer der beiden Unbekannten aufgelöst und der gefundene Ausdruck in die quadratische Gleichung eingesetzt. Man hat dann als neues äquivalentes System im Allgemeinen eine quadratische Gleichung mit nur einer Unbekannten und die lineare Gleichung. Je nachdem, ob die quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösung hat, besteht die Lösungsmenge des Systems aus zwei, einem oder keinem Zahlenpaar.
Besteht hingegen das System aus zwei quadratischen Gleichungen, dann kann der Lösungsweg schließlich bis zu einer Gleichung 4. Grades für eine Unbekannte führen, die du unter Umständen nicht lösen kannst. Sehr leicht lassen sich dagegen Systeme lösen, in deren Gleichungen nur die Quadrate der Unbekannten vorkommen. Dazu die folgenden beiden Beispiele.

Beispiel 2:

I $2x^2 - y^2 = -7$
II $6x^2 + 2y^2 = 104$

Durch die Substitution $u := x^2$, $v := y^2$ wird daraus ein lineares System:

I′ $2u - v = -7$
II′ $6u + 2v = 104$

I″ $u = 9$
II″ $v = 25$

Das Ausgangssystem ist also äquivalent mit

I″ $x^2 = 9$
II″ $y^2 = 25$

I‴ $x = -3 \quad \vee \quad x = 3$
II‴ $y = -5 \quad \vee \quad y = 5$.

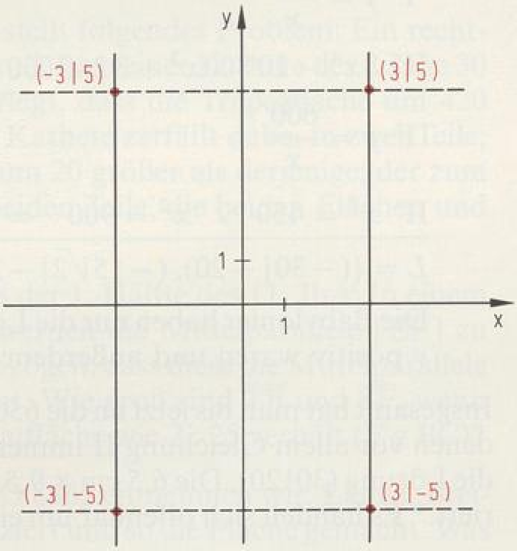


Abb. 135.1 Die Lösungsmenge von Beispiel 2
——— $L_{I''}$ - - - - $L_{II''}$

$L_{I''}$ lässt sich als Parallelenpaar zur y-Achse, $L_{II''}$ als Parallelenpaar zur x-Achse graphisch darstellen (Abbildung 135.1). Für L erhält man
$L = L_{I''} \cap L_{II''} = \{(-3|-5), (-3|5), (3|-5), (3|5)\}$.

Ebenso wie in Beispiel 2 geht man vor in

Beispiel 3:

$$\begin{array}{ll} \text{I } 3x^2 - 5y^2 = 20 & \text{I}' \; x^2 = 5 \\ \text{II } 7x^2 + 9y^2 = 26 & \Leftrightarrow \quad \text{II}' \; y^2 = -1 \end{array}$$

Da $L_{II'} = \{\ \}$, ist auch $L = L_{I'} \cap L_{II'} = \{\ \}$.

Zum Abschluss behandeln wir noch ein Gleichungssystem, das auf eine biquadratische Gleichung führt. Es stammt von der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 8390.

Beispiel 4:

Länge und Breite habe ich multipliziert, 600 ist die Fläche. Die Länge habe ich mit sich selbst multipliziert. Das ergibt eine Fläche, die das 9fache der Fläche ist, die man erhält, wenn man das, was die Länge über die Breite hinausgeht, mit sich selbst multipliziert. Länge und Breite ist was?

Bedeute x die »Länge« und y die »Breite«, dann erhält man

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad xy = 600 \\ \text{II} \quad x^2 = 9(x-y)^2 \\ \hline \text{I}' \quad y = \dfrac{600}{x} \\ \text{II}' \quad 8x^4 - 10\,800x^2 + 3\,240\,000 = 0 \\ \hline \text{I}' \quad y = \dfrac{600}{x} \\ \text{II}' \quad x^2 = 450 \ \vee \ x^2 = 900 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 15\sqrt{2} \ \vee \ x = \pm 30 \\ \hline L = \{(-30|-20), (-15\sqrt{2}|-20\sqrt{2}), (15\sqrt{2}|20\sqrt{2}), (30|20)\}. \end{array}$$

Die Babylonier haben nur die Lösung $(30|20)$ angegeben, da für sie x und y positiv waren und außerdem $x > y$ gelten sollte.

Insgesamt hat man bis jetzt an die 650 Aufgaben von diesem Typ gefunden, bei denen vor allem Gleichung II immer wieder verändert wird. Alle aber haben die Lösung $(30|20)$. Die 6,5 cm × 9,5 cm großen Täfelchen sind durchnummeriert.* Es handelt sich offenbar um einen Satz von Übungsaufgaben, der einst

* Da sie aus Raubgrabungen stammen, lassen sie sich nur schwer datieren. Man vermutet, dass sie mittelbabylonisch sind, d.h. aus der Zeit der KASSITEN stammen (ca. 1530–1160 v. Chr.). Sie enthalten fast keinen Worttext mehr, sondern nur mehr mathematische Zeichen, stellen also eine Art babylonischer Zeichenalgebra dar.

aus mindestens 14 solcher Täfelchen bestand. Wir dürfen daraus wohl schließen, dass bereits die Babylonier erkannt hatten, dass Mathematik nur dadurch gelernt werden kann, dass man viel übt. Für dich folgt daher eine Reihe von

Aufgaben

1. **a)** $x+y=7$, $xy=10$ **b)** $xy=6$, $3x-y=3$ **c)** $x+3=4+y$, $xy=2$

2. **a)** $xy=9+x$, $2x-y=2$ **b)** $2xy-x+2y=1$, $x+2y=0$ **c)** $3x+2y-4xy=-5$, $5x+2y=12$

3. Seite I und Seite III des Keilschrifttextes AO 8862 liefern die Systeme

a) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+xy=15$, $x+y=7$ **b)** $x+y=xy$, $x+y+xy=9$

4. In Susa fand man folgende Keilschrifttexte aus altbabylonischer Zeit:

a)* $\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}y+\frac{1}{7}xy=2$, $x+y=5\frac{5}{6}$ **b)** $xy+x+y=1$, $\frac{1}{17}(3x+4y)+y=\frac{1}{2}$

5. Eine interessante Aufgabe enthält der altbabylonische Keilschrifttext** VAT 7528, der, auf unser Maßsystem umgerechnet, lautet:
Gebaut wurde ein kleiner Kanal von 2160 m Länge und $\frac{3}{4}$ m Tiefe. Sein Querschnitt ist trapezförmig und misst oben 1 m, unten $\frac{1}{2}$ m. Ein Arbeiter konnte täglich 6 m^3 Erde ausheben. Die Anzahl der Arbeiter zu der der Arbeitstage addiert ergibt $29\frac{1}{4}$. Wie viele Leute haben wie viele Tage gearbeitet?

6. VAT 8512, ebenfalls altbabylonisch, stellt folgendes Problem: Ein rechtwinkliges Dreieck wird durch eine Parallele zu einer Kathete der Länge 30 in ein Dreieck und ein Trapez so zerlegt, dass die Trapezfläche um 420 größer ist als die Dreiecksfläche. Die Kathete zerfällt dabei in zwei Teile; der Teil, der zum Dreieck gehört, ist um 20 größer als derjenige, der zum Trapez gehört. Wie groß sind diese beiden Teile, die beiden Flächen und die parallele Strecke?

7. Aus einer arabischen Handschrift aus der 1. Hälfte des 11. Jh.s: In einem Quadrat ABCD der Seitenlänge 10 werden die Mittelparallele [EF] zu [AB] und von A aus eine Gerade so gezogen, dass diese die Mittelparallele in S und die Seite [BC] in T schneidet. Wie groß sind $\overline{TF}$ und $\overline{SF}$, wenn die Fläche von ΔSTF sich zur Quadratfläche wie 2 : 25 verhält (F ∈ BC)?

8. Der Seite II des Keilschriftprismas AO 8862 entnehmen wir: Länge, Breite. Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Was die Länge über die Breite hinausgeht, habe ich mit der Summe aus Länge

* SKT 362, Straßburger Keilschrift-Texte, aufbewahrt in Straßburg, Bibliothèque Nationale et Universitaire.
** aufbewahrt in Berlin, Staatliche Museen: Vorderasiatische Abteilung; Tontafeln.

und Breite multipliziert; dazu habe ich meine Fläche addiert. Es macht 4400. Dann habe ich Länge und Breite addiert, das ergibt 100.

9. Die Aufgaben 8–10, 14 und 19 aus der altbabylonischen Keilschrifttafel BM 13901 (siehe Seite 88f. und Aufgabe 97/**24**):

a) $x^2 + y^2 = 1300$, $x + y = 50$ **b)** $x^2 + y^2 = 1300$, $x - y = 10$ **c)** $x^2 + y^2 = 21\frac{1}{4}$, $y - x = -\frac{1}{7}x$

d) $x^2 + y^2 = 1525$, $y = \frac{2}{3}x + 5$ **e)** $x^2 + y^2 + (x - y)^2 = 1400$, $x + y = 50$

10. Aus der altbabylonischen Keilschrifttafel SKT 363:

a) $x^2 + y^2 = 1000$, $y = \frac{2}{3}x - 10$ **b)** $x^2 + y^2 = 2225$, $y = \frac{2}{3}(x - 10) + 5$ **c)** $x^2 + y^2 = 3125$, $y = \frac{2}{3}(x - 20) + 5$

11. a) $x^2 - 3x + y = 2$, $x + 3y = 6$ **b)** $2y^2 - 5x + 3y = 0$, $-2x + 7y = 5$

c) $3x + 2y = 3$, $2x^2 - y^2 = -7$ **d)** $4x - 3y = 11$, $2x^2 + 3y^2 = 11$

12. a) Aus dem *liber abaci* (1202) des Leonardo von Pisa (um 1170–nach 1240):

$x + y = 10 \wedge \dfrac{xy}{x - y} = \sqrt{6}.$ Mache die Probe!

b) $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$, $\dfrac{y - 1{,}8}{x - 4} = \dfrac{9}{20}$ **c)** $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{9}y^2 = 1$, $\dfrac{y + 4}{x - 4} = -\dfrac{3}{4}$

13. a) $x^2 - 2xy - y^2 = -4$, $x - 5y = 6$ (!)**b)** $x^2 - 2xy + y^2 + 4 = 0$, $x - 5y - 6 = 0$

14. a) $2x^2 + xy + y^2 - 2x + y = 6$, $2x - 3y = 9$

b) $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 24x + 68y - 41 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$

15. a) $x^2 + 2y^2 = 9$, $3x^2 - y^2 = -1$ **b)** $2x^2 + 5y^2 = 47$, $5x^2 + 2y^2 = 23$

16. a) $7x^2 - 2y^2 + 32 = 0$, $3x^2 + 5y^2 - 80 = 0$ **b)** $6x^2 + 2y^2 = 6$, $4x^2 - 3y^2 = 43$

17. a) $11x^2 - 7y^2 = 0$, $-8x^2 + 5y^2 = 0$ **b)** $11x^2 - 7y^2 = -2$, $-8x^2 + 5y^2 = 0$

18. **a)** $x^2 + 3y^2 = 3$
$6x^2 - 2y^2 = 13$

b) $5x^2 + 9y^2 - 32{,}2 = 0$
$4x^2 - 3y^2 + \frac{193}{75} = 0$

19. **a)** $3x^2 - 5y^2 = 0$
$2x^2 - 7y^2 = 11$

b) $4x^2 - 3y^2 = 7$
$3x^2 + 5y^2 = 56$

•**20.** **a)** $2x^2 - 3x + 2y - 3 = 0$
$5x^2 - 0{,}5x + 3y - 7 = 0$

b) $2x + 5y + 2xy = 3$
$x - 3y - 4xy = 33$

c) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$
$(x+2)^2 + (y-7)^2 = 25$

d) $x + 2x^2 + 3y - 6y^2 = 28$
$x - x^2 - 2y + 3y^2 = -20$

21. **a)** $x^2 + 2x + 4y - 47 = 0$
$5x^2 - 25x + 6y - 18 = 0$

b) $2x^2 + y^2 - 10x = 13$
$5x^2 - 2y^2 + 15x = 0$

c) $y^2 + 2xy + 3y = 0$
$3y^2 - 3xy - y = 30$

•**d)** $(x-2)^2 - (y+1)^2 = -24$
$3x^2 + y^2 - 12x + 2y = 87$

22. Die auf Seite 136 erwähnte Aufgabensammlung aus kassitischer Zeit befindet sich fast vollständig in der Yale Babylonian Collection von New Haven (USA). Die auf der Tafel YBC 4697 angegebenen Gleichungssysteme löst man am besten mit der Substitution $x := u + v$ und $y := u - v$. Die erste Gleichung heißt immer $xy = 600$, die zweite dagegen

a) $\frac{1}{3}(x+y) + \frac{1}{60}(x-y)^2 = 18\frac{2}{3}$,

b) $\frac{1}{3}(x+y) - \frac{1}{60}(x-y)^2 = 15$,

c) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}(x+y) + \frac{1}{60}(x-y)^2 = 3\frac{1}{3}$.

23. **a)** $x^2 + y^2 = 10$
$x^2 y^2 = 9$

b) $x^2 - 8y^2 = 23$
$4(xy)^2 = 25$

c) $x^4 - 3x^2 + 2y^2 = 6$
$4x^2 - 5y^2 = -16$

d) $x^4 - y^4 = 65$
$2x^2 + 3y^2 = 30$

24. **a)** $(x+1)^2 + 3(y+3)^2 = 12$
$2(x+1) - 7(y+3) = -1$

:**b)** $2(2x - 3y + 7)^2 - 3(4x - 2y + 5)^2 = 5$
$5(2x - 3y + 7)^2 - 7(4x - 2y + 5)^2 = 13$

25. **a)** $3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{y} = 4$
$3 \cdot \frac{1}{x^2} + 8 \cdot \frac{1}{y^2} = 5$

•**b)** $18 \cdot \frac{1}{x^2} - 7 \cdot \frac{1}{y^2} = 2$
$6 \cdot \frac{1}{x^2} + 3 \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{2}{3}$

26. **a)** Aufgabe 12 aus dem Keilschrifttext BM 13901 ergibt das System
$x^2 + y^2 = 1300 \quad \wedge \quad xy = 600$.

b) Aufgabe 22 der Tafel YBC 4668 aus kassitischer Zeit ergibt

$$\frac{x}{y} + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = 2\tfrac{1}{6} \quad \wedge \quad xy = 600\,.$$

c) Aufgabe 25 der Tafel YBC 4668 aus kassitischer Zeit ergibt

$$\frac{x}{y} - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = 1\tfrac{1}{6} \quad \wedge \quad xy = 600\,.$$

27. In Susa fand man auf einer Keilschrifttafel den Text XIX, Problem D:
$xy = 1200 \quad \wedge \quad x \cdot x^2\sqrt{x^2+y^2} = 3\,200\,000\,.$

28. a) $x + 2 = y - 1$
$\sqrt{3x+2y} = 2x$

b) $2 - 2x = (y+4)^2$
$\sqrt{x^2+y^2} = 7 - x$

29. a) $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \qquad \sqrt{x^2 - 6x - y^2} = \frac{1}{3}y$

••b) $\sqrt{3x+y} + \sqrt{2x-y} = \sqrt{7x+2y}$
$\sqrt{\sqrt{4x^2+y^2+4xy} - 2x} - 3 + x - y = \sqrt{3x-1}$

30. Besteht ein Gleichungssystem mit zwei Variablen nur aus einer Gleichung, so ist es unterbestimmt. Stelle die Lösungsmengen der folgenden unterbestimmten Systeme graphisch dar.

a) $x^2 + y^2 = 0$

b) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 0$

c) $x^2 - y^2 = 0$

d) $(x+y)^2 = 4$

e) $x(x-2y) = 0$

f) $y^2 - 3xy + 2y = 0$

•g) $\sqrt{x^2} + y = 1$

•h) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 1$

•31. Die beiden folgenden ersten Aufgaben sind die Nr. 94 bzw. 96 aus Kapitel LXVI der 1539 erschienenen *Practica Arithmeticae* des Geronimo CARDANO (1501–1576). Michael STIFEL (1487?–1567) bringt sie 1544 in seiner *Arithmetica integra* und fügt als weitere Beispiele die beiden anderen Aufgaben an. – Zur Lösung raten wir, zuerst xy zu berechnen.

a) $(x-y)^2 = xy$
$x^2 + y^2 = 20$

b) $x + y = xy$
$x^2 + y^2 + (x+y) = 20$

c) $x^2 + y^2 = 52$
$xy - x - y = 14$

d) $x^2 + y^2 = 52$
$xy + x + y = 34$

32. In Kapitel LXI seiner *Practica Arithmeticae* behandelt CARDANO ein überbestimmtes Gleichungssystem, für das STIFEL bessere Zahlen wählt, damit die Aufgabe aufgeht:
Zerlege 468 in zwei Summanden. Das Produkt aus dem größeren Teil und dem Quadrat des kleineren Teils soll 5 359 375 ergeben, das Produkt aus dem kleineren Teil und dem Quadrat des größeren hingegen 14 706 125. Wie heißen die Summanden?

Die folgenden Aufgaben ergeben Gleichungssysteme für 3 und mehr Unbekannte. Sie stammen aus Kapitel LXVI der *Practica Arithmeticae* (1539) des Geronimo CARDANO (1501–1576). Michael STIFEL (1487?–1567) fand sie so interessant, dass er sie ganz am Ende seiner *Arithmetica integra* (1544) bringt. Angeregt durch sie, fügt er gelegentlich ergänzende Aufgaben hinzu.

33. *Aufgabe 78:* Zerlege 14 so in 3 Summanden, dass sie in stetiger Proportion zueinander stehen* und dass die Summe aus dem 2fachen des ersten, dem 3fachen des zweiten und dem 4fachen des dritten 36 ergibt.

Abb. 141.1 Titelblatt der *Practica Arithmeticae* von 1539 des Geronimo CARDANO (1501–1576)** und dessen Unterschrift.

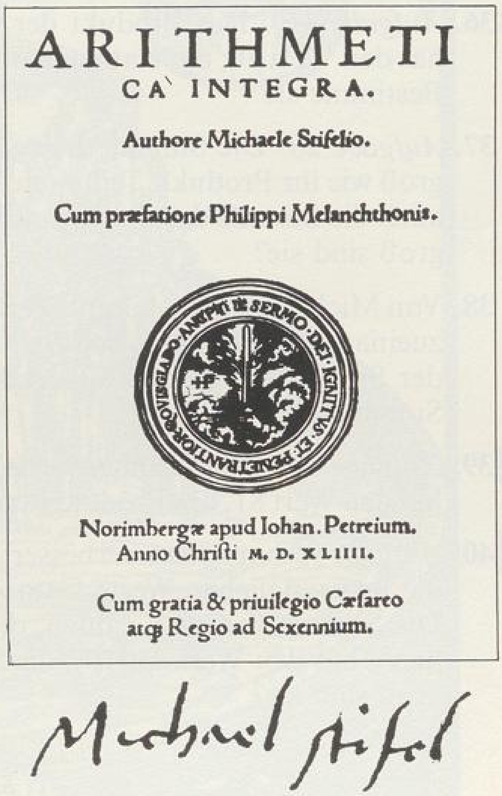


Abb. 141.2 Titelblatt der *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – (1544) von Michael STIFEL (1487? Esslingen bis 19.4.1567 Jena) und dessen Unterschrift. Ein Bildnis ist nicht überliefert.***

* 3 Größen a, b, c bzw. 4 Größen a, b, c, d stehen in stetiger Proportion zueinander oder verhalten sich stetig, wenn $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = c : d$ gilt.

** Des Hieronimus C. CARDANUS mailändischen Arztes, einzigartige Handhabung der Arithmetik und des Messens. Was in ihr unter anderen enthalten ist, legt er auf der nächsten Seite dar.
Die Umschrift NEMO PROPHETA ACCEPTUS IN PATRIA um das Bildnis ist eine Anspielung auf Matth. 13,57, das im Deutschen zu »Der Prophet gilt nichts in seinem Vaterlande« verkürzt wird.

*** Auf dem Titelblatt liest man ferner: Mit einem Vorwort Philipp MELANCHTHONS. Zu Nürnberg bei Johann PETREIUS. Im Jahre Christi 1544. Mit der Gunst und dem kaiserlichen und königlichen Privileg für einen Zeitraum von sechs Jahren. Die Umschrift um das Flammenschwert lautet SERMO DEI IGNITUS ET PENETRANTIOR QUOVIS GLADIO ANCIPITI, d.h.: Die Sprache Gottes ist feurig und durchdringender als jedes zweischneidige Schwert. – Am Ende schreibt STIFEL, dass er das Manuskript mehr als ein Jahrfünft zurückgehalten habe; es war also bereits 1539 fertig. – Die in der 1. und 2. Auflage wiedergegebene Unterschrift ist kein Autograph STIFELS.

34. Michael STIFEL verwandelt die vorstehende Aufgabe in:
Zerlege 182 so in 3 Summanden, dass sie in stetiger Proportion zueinander stehen*. Bildet man dann die Summe der 3 möglichen Produkte aus je zweien von ihnen, so erhält man 7644. Wie heißen die Teile?

35. Michael STIFEL ergänzt die vorstehende Aufgabe durch:
Zerlege 78 in 3 Summanden, die sich stetig verhalten* und für die gilt: Teilt man 78 durch jeweils einen der Summanden, so ist die Summe dieser drei Quotienten $18\frac{7}{9}$. Wie groß sind die Summanden?

36. *Aufgabe 110:* Das Produkt der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks hat den Wert 10; die Katheten und die Hypotenuse verhalten sich stetig*. Bestimme sie.

37. *Aufgabe 28:* Die Summe dreier Zahlen, die sich stetig verhalten*, ist so groß wie ihr Produkt. Teilt man 25 durch jeweils eine von ihnen, so ergibt auch die Summe der drei Quotienten die Summe dieser drei Zahlen. Wie groß sind sie?

38. Von Michael STIFEL stammt: Zerlege 76 in drei Summanden, die sich stetig zueinander verhalten*, sodass das Produkt aus dem mittleren Glied mit der Summe der beiden äußeren Glieder 1248 ergibt. Wie groß sind die Summanden?

39. *Aufgabe 112:* Vier Zahlen verhalten sich stetig zueinander*. Ihr Produkt hat den Wert 81, das Produkt der beiden ersten den Wert 6. Wie heißen sie?

40. *Aufgabe 95* hat STIFEL verbessert, sodass sie aufgeht. In Klammern stehen die ursprünglichen Werte CARDANOS:
Die Summe von vier Zahlen, die in stetiger Proportion zueinander stehen*, hat den Wert 45 (10); die Summe ihrer Quadrate ist 765 (60). Wie groß sind sie?

* 3 Größen a, b, c bzw. 4 Größen a, b, c, d stehen in stetiger Proportion zueinander oder verhalten sich stetig, wenn $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = c : d$ gilt.