Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3.1 Was ist eine quadratische Gleichung?

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

3 Die quadratische Gleichung

3.1 Was ist eine quadratische Gleichung?

Du hast bisher meist nur mit linearen Gleichungen zu tun gehabt, die man auf die Form $ax + b = 0$ bringen kann. Für $a \neq 0$ ergibt sich $-\frac{b}{a}$ als einzige Lösung. Gelegentlich sind dir aber auch schon Gleichungen wie z. B. $x^2 = 4$ oder $x(x-2) = 0$ begegnet. Sie sind einfache Sonderfälle so genannter quadratischer Gleichungen.

> **Definition 72.1:** Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißt **quadratische Gleichung für *x*** oder auch **Gleichung zweiten Grades in *x***.

Wegen $a \neq 0$ kommt x^2 in dieser Gleichung auch wirklich vor, und zwar als höchste Potenz der Unbekannten; daher der Name quadratische Gleichung bzw. Gleichung zweiten Grades. In Analogie dazu nennt man eine lineare Gleichung auch **Gleichung ersten Grades**.
Bei einer quadratischen Gleichung sind folgende Bezeichnungen üblich:
ax^2 heißt **quadratisches Glied**, bx **lineares Glied** und c die **Konstante*** der quadratischen Gleichung.
a, b und c sind die Koeffizienten der quadratischen Gleichung. Dividiert man die Gleichung durch a, dann ergibt sich die **Normalform** der quadratischen Gleichung, nämlich $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Dafür schreibt man gerne auch $x^2 + px + q = 0$.

**Zur Geschichte der quadratischen Gleichung

Aus der frühen Zeit der ägyptischen Mathematik sind uns nur ganz einfache quadratische Gleichungen des Typs $ax^2 = b$ überliefert (siehe Aufgabe 78/**14**). Im berühmten *Papyrus Rhind* wird überhaupt keine quadratische Gleichung behandelt.
Von den alten Babyloniern blieben uns hingegen aus der gleichen Zeit (ca. 20.–19. Jh. v. Chr.) viele Tontafeln in Keilschrift erhalten, die sich mit quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten beschäftigen (Aufgabe 97/**24**), viel öfter aber mit Gleichungssystemen mit zwei und mehr Unbekannten, wobei mindestens eine der auftretenden Gleichungen quadratisch ist (siehe **3.8**). Neben der Lösung ist auf vielen Tafeln auch der Lösungsweg angegeben (siehe Seite 86). Der geometrische Ursprung dieser Aufgaben ist aus den verwendeten Bezeichnungen wie »Länge«, »Breite« und »Fläche« ersichtlich. Die Babylonier haben sich aber sehr früh von dieser geometrischen Begriffswelt gelöst und verstehen unter diesen Wörtern, die bezeichnenderweise auch nicht dekliniert werden, meist nur mehr – modern ausgedrückt – die Unbekannten x und y und ihr Produkt xy. Wie wäre es sonst verständlich, dass sie eine Fläche und eine Seite

* Das Wort Konstante hat 1692 Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) in die Mathematik eingeführt.

addierten und eine Zahl erhielten! Sie haben bereits in früher Zeit eine Mathematik geschaffen, die nur mit Zahlen umgeht, anders als im alten Indien oder Ägypten, wo Mathematik im Gewande der Geometrie getrieben wurde. So sollen die ägyptischen Harpedonapten* durch Spannen von Seilen geometrische Konstruktionen und auch Beweise ausgeführt haben**.
Dieses geometrische Wissen brachten sowohl THALES (um 625–um 547 v. Chr.) wie auch PYTHAGORAS (um 570–um 497 v. Chr.) von ihren ägyptischen Studienaufenthalten mit. PYTHAGORAS – so berichtet uns der Volksredner ISOKRATES (436–338 v. Chr.) – soll dabei 525 anlässlich der Eroberung Ägyptens durch den Perserkönig KAMBYSES II. (reg. 529–522) nach Babylon verschleppt worden sein, wo er – dem Bericht des Neuplatonikers IAMBLICHOS VON CHALKIS (um 250–um 330 n. Chr.) zufolge – 7 Jahre verbrachte und dort in die Lehre von den Zahlen und der Musik eingeführt wurde. Die Entdeckung der PYTHAGOREER, daß z. B. $x^2 = 2$ im Bereich der Brüche nicht exakt lösbar ist, dass aber andererseits immer exakt eine Strecke konstruiert werden kann, sodass das darüber errichtete Quadrat den Flächeninhalt 2 hat, ließ die Griechen eine »geometrische Algebra«*** entwickeln, in der Flächen und Längen wie physikalische Größen behandelt werden. Die *Στοιχεῖα* (Stoicheîa) – »Elemente« – und die *Δεδομένα* (Dedoména), lateinisch *Data* – »Gegebenes« – EUKLIDS (um 300 v. Chr.) bezeugen, dass alle quadratischen Gleichungen mit positiven Lösungen – und nur solche waren zugelassen – durch geometrische Konstruktionen exakt gelöst werden konnten.
Natürlich ist die babylonische Zahlenmathematik nicht verloren gegangen. Man überließ sie aber den Praktikern, d. h. den Land- und Himmelsvermessern. So soll der berühmte Astronom HIPPARCH (Mitte des 2. Jh.s v. Chr.), arabischen Berichten zufolge, ein Lehrbuch über quadratische Gleichungen geschrieben haben. Mit DIOPHANT (um 250 n. Chr.) gelangte die alte babylonische Tradition des Rechnens mit Zahlen zu neuer Blüte. In seinen *Ἀριθμητικῶν βιβλία* (Arithmetikōn biblía) – »Bücher über die Zahlenlehre« – finden sich viele Aufgaben von derselben Art wie auf den babylonischen Keilschrifttafeln.
Quadratische Gleichungen werden auch im letzten der »Neun Bücher arithmetischer Technik«, dem *Chiu Chang Suan Shu* (China, 2. Jh. v. Chr.), gelöst, dem wir Aufgabe 98/**25** entnommen haben.
Die Leistungen der Inder und Araber, von denen das mittelalterliche Europa das Rechnen mit quadratischen Gleichungen lernte, schildern wir auf Seite 86ff.
Auch unsere Fachwörter haben ihre Geschichte.
Das griechische ἴσωσις (isosis) DIOPHANTS (um 250 n. Chr.) wurde zum lateinischen *aequatio*, das LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) in seinem *liber abaci* (1202) als Fachwort verwendet. Die Eindeutschung führt über *Vorgleichung* – 1518/21 Heinrich SCHREYBER, genannt GRAMMATEUS (1492/96?–1525) in seinem *Rechenbüchlein* – schließlich zu **Gleichung**, belegt 1695 bei Henrich HORCH in seinem Werk *Anfangs-Gründe einer Vernunfft- und Schrifft-übenden Zahl- und Buchstab-Rechenkunst / Deren diese sonst Algebra heisset*. Christian VON WOLFF (1679–1754) übernimmt das Wort Gleichung in *Die Anfangsgründe Aller Mathematischen Wissenschaften* 1710, wo sich auch der Fachausdruck **quadratische Gleichung** findet.
Mit dem Wort *gradus* bezeichnet 1591 François VIÈTE (1540–1603) in seiner *In artem analyticem Isagoge* die Höhe einer Potenz. Vom **Grad** einer Gleichung spricht dann 1675 Jean PRESTET (1652–1690) in seinen *Élémens des Mathematiques*.

* = Seilverknüpfer, von ἁρπεδόνη (harpedóne) = *Seil* und ἅπτειν (háptein) = *anknüpfen*

** CLEMENS von Alexandria (150–215) schreibt in seinen *Stromateis* (I, 15) diese Behauptung DEMOKRIT (um 460–um 370 v. Chr.) zu.

*** Den Ausdruck führte 1886 der dänische Mathematiker Hieronymus Georg ZEUTHEN (1839–1920) ein. 1925 entdeckte man in Bologna ein zwischen 1574 und 1587 geschriebenes Manuskript des Paolo BONASONI († nach 1593) mit dem Titel *Algebra geometrica*.

Aufgaben

1. Entscheide, ob eine quadratische Gleichung vorliegt. Bringe sie gegebenenfalls auf eine Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit positivem a und gib das lineare Glied und die Konstante an.

a) $3 - x^2 = x$ **b)** $3x^2 - 1 = x^2$
c) $x(x - x^2) = 0$ **d)** $(x-1)(1-x) = 3$
e) $(0{,}5x + 4)^2 = 0$ **f)** $x^2 - 1 = (x-1)^2$

2. Entscheide, für welche Unbekannte eine quadratische Gleichung vorliegt. Gib jeweils das lineare Glied und die Konstante an.

a) $x^2 y = -1$ **b)** $xy^2 = 3x + y^2$
c) $xy + y^2 = 3x^2$ **d)** $x^2 - xy^2 + y^3 = 1$
e) $a^3 b^2 - abx^2 + 2 = 0$ **f)** $(a+b)(a-b) = (a-b)^2$

3. Stelle die Normalform her.

a) $3x^2 - 6x + 15 = 0$ **b)** $1 - x^2 = 3x$
c) $-1{,}5x^2 + 4{,}5x = 2{,}7x^2 - 8{,}1$ **d)** $(1-5x)^2 = 5x - 1$
e) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}x)^2 = (\frac{1}{3} - \frac{3}{4}x)^2$ **•f)** $\sqrt{2}x = \sqrt{6}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{3}$

3.2 Spezialfälle von quadratischen Gleichungen

Einfache Spezialfälle der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ liegen vor, wenn ein Koeffizient der quadratischen Gleichung null ist. a selbst kann aber nicht null sein; denn sonst hätte man keine quadratische Gleichung.

3.2.1 Die rein quadratische Gleichung

Wenn $b = 0$ ist, fehlt das lineare Glied bx in der quadratischen Gleichung. Sie hat dann die Gestalt $ax^2 + c = 0$. Eine Gleichung dieser Bauart heißt **rein quadratisch**. Wegen $a \neq 0$ gewinnt man ihre Normalform zu $x^2 + \frac{c}{a} = 0$ bzw. $x^2 + q = 0$.

Für $q > 0$ ist die linke Seite sicher positiv; die Gleichung hat daher keine Lösung. Für $q = 0$ ergibt sich die Gleichung $x^2 = 0$. Sie hat die Lösung 0. Für $q < 0$ kann man mit Hilfe der 3. binomischen Formel die linke Seite faktorisieren. Wir zeigen es dir für $q = -49$:

$x^2 - 49 = 0$
$x^2 - 7^2 = 0$
$(x+7)(x-7) = 0$