Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3.2 Spezialfälle von quadratischen Gleichungen

Aufgaben

1. Entscheide, ob eine quadratische Gleichung vorliegt. Bringe sie gegebenenfalls auf eine Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit positivem a und gib das lineare Glied und die Konstante an.

a) $3 - x^2 = x$ **b)** $3x^2 - 1 = x^2$
c) $x(x - x^2) = 0$ **d)** $(x-1)(1-x) = 3$
e) $(0{,}5x + 4)^2 = 0$ **f)** $x^2 - 1 = (x-1)^2$

2. Entscheide, für welche Unbekannte eine quadratische Gleichung vorliegt. Gib jeweils das lineare Glied und die Konstante an.

a) $x^2 y = -1$ **b)** $xy^2 = 3x + y^2$
c) $xy + y^2 = 3x^2$ **d)** $x^2 - xy^2 + y^3 = 1$
e) $a^3 b^2 - abx^2 + 2 = 0$ **f)** $(a+b)(a-b) = (a-b)^2$

3. Stelle die Normalform her.

a) $3x^2 - 6x + 15 = 0$ **b)** $1 - x^2 = 3x$
c) $-1{,}5x^2 + 4{,}5x = 2{,}7x^2 - 8{,}1$ **d)** $(1 - 5x)^2 = 5x - 1$
e) $(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}x)^2 = (\frac{1}{3} - \frac{3}{4}x)^2$ •**f)** $\sqrt{2}x = \sqrt{6}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{3}$

3.2 Spezialfälle von quadratischen Gleichungen

Einfache Spezialfälle der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ liegen vor, wenn ein Koeffizient der quadratischen Gleichung null ist. a selbst kann aber nicht null sein; denn sonst hätte man keine quadratische Gleichung.

3.2.1 Die rein quadratische Gleichung

Wenn $b = 0$ ist, fehlt das lineare Glied bx in der quadratischen Gleichung. Sie hat dann die Gestalt $ax^2 + c = 0$. Eine Gleichung dieser Bauart heißt **rein quadratisch**. Wegen $a \neq 0$ gewinnt man ihre Normalform zu $x^2 + \frac{c}{a} = 0$ bzw. $x^2 + q = 0$.

Für $q > 0$ ist die linke Seite sicher positiv; die Gleichung hat daher keine Lösung. Für $q = 0$ ergibt sich die Gleichung $x^2 = 0$. Sie hat die Lösung 0. Für $q < 0$ kann man mit Hilfe der 3. binomischen Formel die linke Seite faktorisieren. Wir zeigen es dir für $q = -49$:

$x^2 - 49 = 0$
$x^2 - 7^2 = 0$
$(x+7)(x-7) = 0$

Wie wir wissen, kann ein Produkt nur null sein, wenn mindestens ein Faktor null ist. Aus der letzten Zeile entsteht die Oder-Aussageform

$x+7=0 \vee x-7=0$ bzw.
$x=-7 \vee x=7.$

Wir erhalten also zwei Lösungen, nämlich $x_1=-7$ und $x_2=7$.
Selbstverständlich kann man die Methode des Faktorisierens auch anwenden, wenn $-q$ keine Quadratzahl ist. Nehmen wir als Beispiel $q=-5$:

$x^2-5=0$
$x^2-(\sqrt{5})^2=0$
$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$
$x=-\sqrt{5} \vee x=\sqrt{5}.$ Also $x_1=-\sqrt{5}$ und $x_2=\sqrt{5}$.

Merke: Die rein quadratische Gleichung $x^2+q=0$ hat entweder keine, genau eine oder zwei Lösungen, je nachdem ob $q>0$, $q=0$ oder $q<0$ ist.

Die Lösungen der rein quadratischen Gleichung kann man aber statt durch Faktorisieren auch durch Radizieren finden. Es gilt nämlich

Satz 75.1: Sind die beiden Seiten einer Gleichung nicht negativ und radiziert man beide Seiten, so entsteht eine äquivalente Gleichung; kurz:

Für $T_1 \geqq 0$ und $T_2 \geqq 0$ gilt: $T_1=T_2 \Leftrightarrow \sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$

Beweis:

1) Ist u eine Lösung der Gleichung $T_1=T_2$ mit $T_1(u) \geqq 0$, dann gilt $T_1(u) = T_2(u)$, also auch wegen der Eindeutigkeit der Wurzel $\sqrt{T_1(u)}=\sqrt{T_2(u)}$. Damit ist u auch eine Lösung der Gleichung $\sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$. Es gehen also beim Radizieren keine Lösungen verloren.

2) Ist nun umgekehrt v eine Lösung der Gleichung $\sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$, dann gilt $\sqrt{T_1(v)}=\sqrt{T_2(v)}$, woraus sich wegen der Eindeutigkeit des Quadrats $T_1(v)=T_2(v)$ ergibt. Das bedeutet aber, dass v auch eine Lösung der Gleichung $T_1=T_2$ ist. Es kann also beim Radizieren auch keine Lösung hinzugekommen sein.
Da somit beim Radizieren weder Lösungen hinzugekommen noch verloren gegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1=T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{T_1}=\sqrt{T_2}$ überein. Radizieren ist also eine Äquivalenzumformung.

Wir wenden Satz 75.1 auf unsere beiden obigen Beispiele an:

$x^2 - 49 = 0$	$x^2 - 5 = 0$
$x^2 = 49 \quad \Vert\sqrt{\ }$	$x^2 = 5 \quad \Vert\sqrt{\ }$
$\lvert x\rvert = 7$	$\lvert x\rvert = \sqrt{5}$
$x = -7 \vee x = 7.$	$x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}.$

Du siehst, beim Radizieren von Quadraten entstehen Absolutbeträge, die sich durch Fallunterscheidungen wieder beseitigen lassen. Betrachten wir dazu allgemein die Gleichung

$x^2 = d^2 \quad \Vert\sqrt{\ }$
$\lvert x\rvert = \lvert d\rvert.$

Weil zwei Zahlen mit gleichem Absolutbetrag entweder gleich oder entgegengesetzt gleich sind, bedeutet die letzte Gleichung dasselbe wie

$x = d \vee x = -d.$

Merke: $\boxed{\lvert x\rvert = \lvert d\rvert \iff x = d \vee x = -d}$

Aufgaben

1. a) $x^2 = 169$ **b)** $x^2 - 1024 = 0$ **c)** $x^2 = 6{,}25$
d) $x^2 - 0{,}0324 = 0$ **e)** $16 = 0{,}64x^2$ **f)** $2{,}56x^2 - 40{,}96 = 0$
g) $144x^2 = 1225$ **h)** $22\,500 - 2025x^2 = 0$ **i)** $10{,}89x^2 = 0{,}1936$

2. a) $2x^2 = 8$ **b)** $0{,}5x^2 = 8$ **c)** $5x^2 - 45 = 0$
d) $28 - 63x^2 = 0$ **e)** $\frac{x^2}{12} = \frac{1}{27}$ **f)** $\frac{x^2}{35} - \frac{7}{125} = 0$
g) $\frac{13}{6} = \frac{78x^2}{49}$ **h)** $\frac{22}{3} - \frac{24x^2}{11} = 0$ **i)** $\frac{0{,}125x^2}{3} = \frac{1{,}5}{4}$

Beachte bei den folgenden Aufgaben die Definitionsmengen!

3. a) $\frac{4x-1}{x+1} = \frac{x-1}{4x+1}$ **b)** $\frac{2x-5}{3x+10} = \frac{x}{2x+10}$
c) $\frac{x+10}{2x-5} + \frac{5x+4}{x+7} = 0$ **d)** $\frac{x+10}{2x+5} = \frac{5x-4}{x+7}$
• e) $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{7x+3}{2x+2}$ **• f)** $\frac{2x+7}{4x-6} = \frac{2x+2}{1{,}5-x}$
g) $\frac{16x-1}{x+4} = \frac{4x+25}{2-9x}$ **h)** $\frac{3x+2}{2x-3} = \frac{11x+8}{5x-9}$

4. a) $\dfrac{2x^2-5}{3}+2=\dfrac{3x^2+5}{6}$ b) $\dfrac{7x^2+1}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4x^2-2}{3}$

c) $\dfrac{1}{3x^2-2}=\dfrac{3}{17x^2-7}$ d) $\dfrac{5}{10-2x^2}+2=0$

e) $\dfrac{x-4}{x^2-1}+\dfrac{x}{x+1}=0$ f) $\dfrac{8-20x}{9x^2-4}+\dfrac{x+6}{3x-2}=1$

5. a) $\dfrac{3}{x+2}-4=\dfrac{3}{x-2}$ b) $\dfrac{1}{5x+2}+\dfrac{4}{x-1}+7=0$

c) $\dfrac{6x-8}{3x}+2x=\dfrac{3x+4}{2}-x$ d) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}+2$

• 6. Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

a) $ax^2=b^2$ b) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-a^2=0$

c) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{b}{x}$ d) $a^2x^2-a=b^2x^2-b$

e) $(3x-2a)^2-(2x-3a)^2=4a^2$ f) $\dfrac{(bx-a)^2}{a^2}+\dfrac{2bx-a}{a}=b$

: 7. Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

a) $x^2+a=b$ b) $ax^2=b$

c) $(x+2a)^2+(2x-a)^2=5a$ d) $(3x-2a)^2+64=(x-6a)^2$

e) $a(x-b)^2+ax(x+2b)=\dfrac{1}{a}$

f) $(ax+b)^2+(bx+a)^2=2a^2+2abx(x+2)$

8. a) $(x-7)^2=9$ b) $(x+2\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}$ c) $(x+2)^2=2$

d) $(0{,}5x-1{,}5)^2=2{,}25$ e) $(x-3)^2=-3$ f) $(3-x)^2=3$

g) $(x-a)^2=b^2$ h) $(x+a)^2=(2x+a)^2$

9. a) $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x+a}=2\frac{2}{3}$ b) $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)}$

10. Multipliziert man $\frac{7}{50}$ einer Zahl mit $\frac{11}{18}$ derselben Zahl, dann ergibt sich 40733. Wie heißt die Zahl?

11. Länge und Breite eines Rechtecks verhalten sich wie 7 : 5, der Flächeninhalt ist 2240. Wie breit ist das Rechteck?

12. Zerlege die Zahl 11532 in zwei Faktoren, die sich wie 3 zu 4 verhalten.

13. Zerlege die Zahl z in zwei Faktoren, die sich wie $a:b$ verhalten. $(a, b, z \neq 0)$

14. *Aufgabe 6* aus dem *Papyrus Moskau* (18. Jh. v. Chr. nach einer Vorlage des 19. Jh.s v. Chr.): Ein Rechteck hat den Flächeninhalt 12. Für die Breite nimm $\frac{1}{2}$ der Länge $+\frac{1}{4}$ der Länge. Bestimme seine Seiten.

15. AL-CHARIZMI (um 780 – nach 847) löste in seiner *Algebra* folgende Aufgaben:

a) *Das zweite der 6 Probleme* (siehe Seite 87): Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Multipliziere ich den ersten Teil mit sich selbst und das Erhaltene mit $2\frac{7}{9}$, dann ergibt sich dasselbe, wie wenn ich 10 mit sich selbst multipliziere. Wie groß sind die Teile?

b) Multipliziere eine Zahl mit sich selbst, nimm das Vierfache, und du hast 20. Wie groß ist die Zahl?

c) *Das dritte der 6 Probleme:* Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Dann habe ich den einen durch den anderen dividiert und 4 erhalten. Wie groß sind die Teile?

Zu den Aufgaben 16 bis 19: Leonhard EULER (1707–1783) veröffentlichte 1770 in Petersburg seine *Vollständige Anleitung zur Algebra* (bereits 1768 auf russisch erschienen), der wir die folgenden Aufgaben entnommen haben.*

16. Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte, mit ihrem Drittel multipliziert, 24 gibt.

17. Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, dass, wenn man zu derselben 5 addiert und ebenso von ihr auch 5 subtrahiert, jene Summe mit dieser Differenz multipliziert 96 beträgt.

•**18.** Von 3 Personen besitzt die erste so oft 7 Reichstaler wie die zweite 3 Reichstaler hat; und so oft die zweite 17 Reichstaler besitzt, hat die dritte 5 Reichstaler. Wenn man aber das Geld der ersten mit dem Gelde der zweiten und das Geld der zweiten mit dem Gelde der dritten und endlich das Geld der dritten mit dem Gelde der ersten multipliziert, hierauf diese drei Produkte addiert, so ist die Summe $3830\frac{2}{3}$. Wie viel Geld hat nun jede gehabt?

19. Einige Kaufleute bestellen einen Faktor [= Leiter einer Handelsniederlassung] und schicken ihn nach Archangel, um daselbst einen Handel abzuschließen. Jeder von ihnen hat zehnmal so viel Reichstaler eingelegt, wie es Personen sind. Nun gewinnt der Faktor an je 100 Reichstalern zweimal so viel, wie die Anzahl der Personen ist. Wenn man dann den 100. Teil des ganzen Gewinns mit $2\frac{2}{9}$ multipliziert, so kommt die Zahl der Gesellschafter heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

* 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 5, Aufgaben I, II, IV und V

3.2.2 Die Konstante ist null

Ist die Konstante null, d. h., gilt $c = 0$, dann hat die quadratische Gleichung die Gestalt $ax^2 + bx = 0$.
Man löst sie durch Faktorisieren:

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$
$$x = 0 \vee ax + b = 0$$
$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \qquad (a \neq 0).$$

Wir erhalten also zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Für $b = 0$ ergibt sich 0 als einzige Lösung.
Beim Gleichungstyp $ax^2 + bx = 0$ ist also 0 immer eine Lösung.
Diese Lösung ginge verloren, wenn jemand glaubte, er könne die Gleichung $ax^2 + bx = 0$ dadurch vereinfachen, dass er durch die Variable x dividiert und nur noch $ax + b = 0$ löst.

Merke: Durch einen Term darf man nur dividieren, wenn er nicht null ist.

Aufgaben

1. **a)** $x^2 - 5x = 0$ **b)** $3x^2 + 8x = 0$ **c)** $15x^2 = 18x$
d) $14x^2 + 3\frac{1}{2}x = 0$ **e)** $x^2 = x$ **f)** $x^2 = -x$

2. **a)** $0{,}12x^2 + 2x = 3{,}08x$ **b)** $\sqrt{2}x + 5x^2 = 0$
c) $3x^2 - \sqrt{3}x = x - \sqrt{3}x^2$ **d)** $\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x = -\frac{1}{2}\sqrt{5}x^2 + \frac{1}{3}\sqrt{6}x$
e) $\sqrt{10}x^2 + \sqrt{5}x = 0$ **f)** $-\frac{\sqrt{15}}{15}x = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{5}}x^2$

3. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):
a) $x(x + \sqrt{10}) = 9x^2$ **b)** $x(x + \sqrt{10}) = 9x$

4. *Das erste der 6 Probleme* des AL-CHARIZMI aus seiner *Algebra* (siehe Seite 87): Ich habe 10 in zwei Teile geteilt und den einen mit dem anderen multipliziert. Multipliziere ich aber den einen Teil mit sich selbst, dann erhalte ich viermal so viel wie zuvor. Wie groß sind die Teile?

5. AL-CHARIZMI behandelt weitere Beispiele quadratischer Gleichungen. In moderner Schreibweise lauten sie:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{1}{7}x$ **b)** $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{4}{5}x$

c) $\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x = x$ **d)** $\frac{x^2 - 4x}{3} = 4x$

Bestimme die Lösungen.

6. a) $x^2 - 2ax = 0$ **b)** $x^2 + \frac{a-b}{2}x = 0$

c) $ax^2 = \frac{a+b}{2}x$ **d)** $a^2x^2 - 2bx = 4b^2x^2 - ax$

3.3 Die quadratische Ergänzung

Quadratische Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$ und $ax^2 + bx = 0$ können wir schon lösen. Was aber machen wir bei einer allgemeinen quadratischen Gleichung? Gelingt es, die linke Seite durch Probieren zu faktorisieren, dann ist das Problem gelöst. Dazu

Beispiel 1:

$x^2 + 4x - 5 = 0$
$(x+5)(x-1) = 0$
$x + 5 = 0 \vee x - 1 = 0$
$x = -5 \vee x = 1.$

Beispiel 2:

$2x^2 - 5x + 3 = 0$
$(2x-3)(x-1) = 0$
$2x - 3 = 0 \vee x - 1 = 0$
$x = \frac{3}{2} \vee x = 1.$

Leider wird dieses Probier-Verfahren nur in den seltensten Fällen zum Ziel führen. Wenn es gelingt, dann ist es aber auch das schnellste Verfahren. Wir brauchen jedoch eine Methode, die immer zum Ziel führt.
Dazu formen wir die Gleichung schrittweise so um, dass eine rein quadratische Gleichung entsteht, die wir schon lösen können. Wir zeigen es dir anhand einer Gleichung, die AL-CHARIZMI (um 780–nach 847) in seinem *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* – »Handbuch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen« – behandelt, und verfolgen seinen Lösungsweg.

Beispiel 3: $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$

1. Schritt: Herstellen der Normalform

$x^2 + 10x - 56 = 0$

2. Schritt: Ergänzen zum Quadrat

Wir fassen den Term $x^2 + 10x$ als Anfang der linken Seite der 1. binomischen Formel $x^2 + 2ux + u^2 = (x+u)^2$ auf. Der Koeffizient von x muss dann $2u$ sein. Es gilt also $2u = 10$ und damit $u = 5$. Wir ergänzen nun das fehlende u^2, d.h. 5^2, und ziehen es gleich wieder ab, um die Konstante nicht zu verändern: