Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3.2.2 Die Konstante ist null

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

3.2.2 Die Konstante ist null

Ist die Konstante null, d. h., gilt $c = 0$, dann hat die quadratische Gleichung die Gestalt $ax^2 + bx = 0$.
Man löst sie durch Faktorisieren:

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$
$$x = 0 \vee ax + b = 0$$
$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \qquad (a \neq 0).$$

Wir erhalten also zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Für $b = 0$ ergibt sich 0 als einzige Lösung.
Beim Gleichungstyp $ax^2 + bx = 0$ ist also 0 immer eine Lösung.
Diese Lösung ginge verloren, wenn jemand glaubte, er könne die Gleichung $ax^2 + bx = 0$ dadurch vereinfachen, dass er durch die Variable x dividiert und nur noch $ax + b = 0$ löst.

Merke: Durch einen Term darf man nur dividieren, wenn er nicht null ist.

Aufgaben

1. **a)** $x^2 - 5x = 0$ **b)** $3x^2 + 8x = 0$ **c)** $15x^2 = 18x$
d) $14x^2 + 3\frac{1}{2}x = 0$ **e)** $x^2 = x$ **f)** $x^2 = -x$

2. **a)** $0{,}12x^2 + 2x = 3{,}08x$ **b)** $\sqrt{2}x + 5x^2 = 0$
c) $3x^2 - \sqrt{3}x = x - \sqrt{3}x^2$ **d)** $\frac{2}{5}x^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x = -\frac{1}{2}\sqrt{5}x^2 + \frac{1}{3}\sqrt{6}x$
e) $\sqrt{10}x^2 + \sqrt{5}x = 0$ **f)** $-\frac{\sqrt{15}}{15}x = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{5}}x^2$

3. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):
a) $x(x + \sqrt{10}) = 9x^2$ **b)** $x(x + \sqrt{10}) = 9x$

4. *Das erste der 6 Probleme* des AL-CHARIZMI aus seiner *Algebra* (siehe Seite 87): Ich habe 10 in zwei Teile geteilt und den einen mit dem anderen multipliziert. Multipliziere ich aber den einen Teil mit sich selbst, dann erhalte ich viermal so viel wie zuvor. Wie groß sind die Teile?

5. Al-Charizmi behandelt weitere Beispiele quadratischer Gleichungen. In moderner Schreibweise lauten sie:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{1}{7}x$ **b)** $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{4}{5}x$

c) $\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x = x$ **d)** $\dfrac{x^2 - 4x}{3} = 4x$

Bestimme die Lösungen.

6. a) $x^2 - 2ax = 0$ **b)** $x^2 + \dfrac{a-b}{2}x = 0$

c) $ax^2 = \dfrac{a+b}{2}x$ **d)** $a^2x^2 - 2bx = 4b^2x^2 - ax$

3.3 Die quadratische Ergänzung

Quadratische Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$ und $ax^2 + bx = 0$ können wir schon lösen. Was aber machen wir bei einer allgemeinen quadratischen Gleichung? Gelingt es, die linke Seite durch Probieren zu faktorisieren, dann ist das Problem gelöst. Dazu

Beispiel 1:

$x^2 + 4x - 5 = 0$
$(x+5)(x-1) = 0$
$x + 5 = 0 \vee x - 1 = 0$
$x = -5 \vee x = 1\,.$

Beispiel 2:

$2x^2 - 5x + 3 = 0$
$(2x-3)(x-1) = 0$
$2x - 3 = 0 \vee x - 1 = 0$
$x = \frac{3}{2} \vee x = 1\,.$

Leider wird dieses Probier-Verfahren nur in den seltensten Fällen zum Ziel führen. Wenn es gelingt, dann ist es aber auch das schnellste Verfahren. Wir brauchen jedoch eine Methode, die immer zum Ziel führt.
Dazu formen wir die Gleichung schrittweise so um, dass eine rein quadratische Gleichung entsteht, die wir schon lösen können. Wir zeigen es dir anhand einer Gleichung, die Al-Charizmi (um 780–nach 847) in seinem *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* – »Handbuch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen« – behandelt, und verfolgen seinen Lösungsweg.

Beispiel 3: $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$

1. Schritt: Herstellen der Normalform

$x^2 + 10x - 56 = 0$

2. Schritt: Ergänzen zum Quadrat

Wir fassen den Term $x^2 + 10x$ als Anfang der linken Seite der 1. binomischen Formel $x^2 + 2ux + u^2 = (x+u)^2$ auf. Der Koeffizient von x muss dann $2u$ sein. Es gilt also $2u = 10$ und damit $u = 5$. Wir ergänzen nun das fehlende u^2, d.h. 5^2, und ziehen es gleich wieder ab, um die Konstante nicht zu verändern: