Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3.3 Die quadratische Ergänzung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

5. Al-Charizmi behandelt weitere Beispiele quadratischer Gleichungen. In moderner Schreibweise lauten sie:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{1}{7}x$ **b)** $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot x^2 = \frac{4}{5}x$

c) $\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x = x$ **d)** $\frac{x^2 - 4x}{3} = 4x$

Bestimme die Lösungen.

6. a) $x^2 - 2ax = 0$ **b)** $x^2 + \frac{a-b}{2}x = 0$

c) $ax^2 = \frac{a+b}{2}x$ **d)** $a^2x^2 - 2bx = 4b^2x^2 - ax$

3.3 Die quadratische Ergänzung

Quadratische Gleichungen vom Typ $ax^2 + c = 0$ und $ax^2 + bx = 0$ können wir schon lösen. Was aber machen wir bei einer allgemeinen quadratischen Gleichung? Gelingt es, die linke Seite durch Probieren zu faktorisieren, dann ist das Problem gelöst. Dazu

Beispiel 1:

$x^2 + 4x - 5 = 0$
$(x+5)(x-1) = 0$
$x + 5 = 0 \vee x - 1 = 0$
$x = -5 \vee x = 1\,.$

Beispiel 2:

$2x^2 - 5x + 3 = 0$
$(2x-3)(x-1) = 0$
$2x - 3 = 0 \vee x - 1 = 0$
$x = \frac{3}{2} \vee x = 1\,.$

Leider wird dieses Probier-Verfahren nur in den seltensten Fällen zum Ziel führen. Wenn es gelingt, dann ist es aber auch das schnellste Verfahren. Wir brauchen jedoch eine Methode, die immer zum Ziel führt.
Dazu formen wir die Gleichung schrittweise so um, dass eine rein quadratische Gleichung entsteht, die wir schon lösen können. Wir zeigen es dir anhand einer Gleichung, die Al-Charizmi (um 780–nach 847) in seinem *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* – »Handbuch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen« – behandelt, und verfolgen seinen Lösungsweg.

Beispiel 3: $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$

1. Schritt: Herstellen der Normalform

$x^2 + 10x - 56 = 0$

2. Schritt: Ergänzen zum Quadrat

Wir fassen den Term $x^2 + 10x$ als Anfang der linken Seite der 1. binomischen Formel $x^2 + 2ux + u^2 = (x+u)^2$ auf. Der Koeffizient von x muss dann $2u$ sein. Es gilt also $2u = 10$ und damit $u = 5$. Wir ergänzen nun das fehlende u^2, d.h. 5^2, und ziehen es gleich wieder ab, um die Konstante nicht zu verändern:

$x^2 + 10x + 5^2 - 25 - 56 = 0$.

Die ersten drei Glieder ergeben ein Quadrat:

$(x^2 + 10x + 5^2) - 81 = 0$

$(x + 5)^2 - 81 = 0$.

Das ist eine rein quadratische Gleichung für $(x + 5)$.

3. Schritt: Lösen der rein quadratischen Gleichung

durch Faktorisieren oder durch Radizieren

durch Faktorisieren	durch Radizieren
$(x+5)^2 - 9^2 = 0$	$(x+5)^2 = 81 \quad \Vert\sqrt{\ }$
$[(x+5)+9][(x+5)-9] = 0$	$\lvert x+5 \rvert = 9$
$(x+14)(x-4) = 0$	$x+5 = -9 \vee x+5 = 9$
$x = -14 \vee x = 4$.	$x = -14 \vee x = 4$.

Das vorgeführte Lösungsverfahren heißt Lösen durch **quadratische Ergänzung**.

Als »quadratische Ergänzung« bezeichnet man aber nicht nur das Lösungsverfahren, sondern auch den Term u^2, mit dem man ergänzt.

Merke: Man halbiert den Koeffizienten des linearen Glieds, quadriert und ergänzt.

Wie du schon weißt, hat die rein quadratische Gleichung zwei, eine oder gar keine Lösung. Dasselbe gilt natürlich dann auch für jede quadratische Gleichung, wenn wir sie in eine äquivalente rein quadratische Gleichung umformen können.

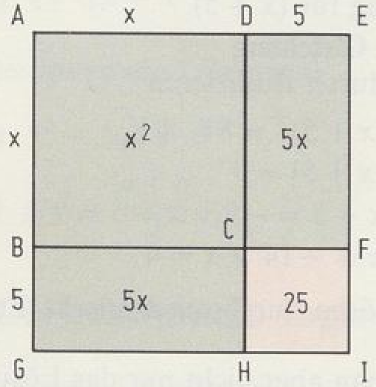
AL-CHARIZMI zeigt seinen Lesern mittels eines geometrischen Beweises (vgl. Abbildung 82.1) – er hatte ja noch keine Buchstabenrechnung –, dass die Methode der quadratischen Ergänzung richtig ist. Vielleicht helfen dir seine Gedanken auch zu einem besseren Verständnis dieses Verfahrens. Er schreibt:*

Wir gehen aus vom Quadrat ABCD, dessen Flächeninhalt gleich der gesuchten Quadratzahl x^2 ist. Unser nächstes Anliegen ist es, ihm eine Fläche vom Inhalt 10-mal der gesuchten Zahl, also $10x$, hinzuzufügen. Zu diesem Zweck halbieren wir die 10, das ergibt 5, und konstruieren an zwei Seiten des Quadrats ABCD zwei Rechtecke, nämlich CBGH und DCFE, und zwar so, dass jeweils die Längsseite 5 misst – das ist die Hälfte des Koeffizienten 10 von x –, wohingegen die Breite jeweils gleich der Quadratseite x ist. Dabei entsteht an der Ecke C ein Quadrat, nämlich FCHI. Dessen Inhalt ist 5 mit sich multipliziert: Diese 5 ist die Hälfte des Koeffizienten der Unbekannten x, die wir an jeder Seite des Ausgangsquadrats als Strecken [BG] und [DE] angefügt haben. Jetzt können wir sagen, dass das erste Quadrat mit dem Inhalt x^2 und die zwei Rechtecke an seinen Seiten, die zusammen $10x$ haben, insgesamt 56 ausmachen. Um nun zum großen Quadrat AGIE vervollständigen zu können, fehlt uns nur mehr die Qua-

* Wir haben den Text nur wenig modernisieren und dem Beispiel 3 anpassen müssen. Natürlich gibt es bei AL-CHARIZMI noch keinen Buchstaben x; auch »Koeffizient« drückt er umständlicher aus. Quadrate und Rechtecke werden nur durch die Diagonalecken – wie bei EUKLID – bezeichnet; das Quadrat ABCD heißt also nur AC usw. Seine Figur stimmt übrigens genau mit der EUKLIDS aus Buch II der *Elemente* überein; nur der mathematische Inhalt dazu wird anders formuliert. So lautet der zugehörige Satz 4 bei EUKLID: »Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist ihr Quadrat gleich der Summe der Quadrate der beiden Teilstrecken, vermehrt um ihr doppeltes Rechteck.« Teilen wir also [AE] in D, so gilt

$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DE}$.

dratzahl, die aus 5 mit sich multipliziert entsteht, also 25. Diese addieren wir zu 56 und haben damit zum großen Quadrat AGIE ergänzt. Als Summe erhalten wir 81. Wir ziehen die Wurzel, das ergibt 9, und das ist die Seite des großen Quadrats. Ziehen wir davon dasselbe ab, was wir vorher hinzugezählt haben, nämlich 5, dann erhalten wir als Rest 4. Dies ist die Seite des Quadrats ABCD, die man gesucht hat.



$$x^2 + 10x = 56$$
$$x^2 + 2 \cdot \tfrac{10}{2}x = 56$$
$$x^2 + 2 \cdot (5x) = 56$$
$$x^2 + 2 \cdot (5x) + 5^2 = 56 + 25$$
$$(x+5)^2 = 81$$

Abb. 82.1 Die Zeichnung des AL-CHARIZMI zum Beweis der quadratischen Ergänzung

Aufgaben

1. Löse durch Faktorisieren.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **b)** $z^2 + 6z + 8 = 0$
c) $y^2 + y - 20 = 0$ **d)** $\mu^2 - 5\mu - 24 = 0$

2. Ergänze zum Quadrat.

a) $x^2 + 4x$ **b)** $x^2 - 8x$ **c)** $x^2 - 24x$
d) $x^2 - 0{,}6x$ **e)** $x^2 + 1{,}8x$ **f)** $x^2 - 0{,}5x$
g) $x^2 + 1{,}3x$ **h)** $x^2 + \frac{5}{8}x$ **i)** $x^2 - \frac{9}{4}x$

3. Ergänze zum Quadrat.

a) $x^2 + 3\frac{1}{2}x$ **b)** $x^2 - 3\frac{1}{4}x$ **c)** $x^2 + 2\frac{1}{5}x$
d) $x^2 - 3ax$ **e)** $x^2 + \dfrac{a+b}{2}x$ **f)** $x^2 - 3 \cdot \dfrac{2a-3b}{2}x$
g) $x^2 + 10\sqrt{7}x$ **h)** $x^2 - 7\sqrt{10}x$ **i)** $x^2 - \frac{4}{5}\sqrt{15}x$

4. a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ **b)** $x^2 - 2x - 3 = 0$
c) $x^2 + 11x + 28 = 0$ **d)** $x^2 + 12x + 36 = 0$
e)* $x(x + \sqrt{10}) = 20$ **f)*** $x^2 - (20 + \sqrt{10})x + 100 = 0$

5. a) $x^2 + 10x + 30 = 0$ **b)** $y^2 + 4y = 1$
c) $u^2 + 7 = 8u$ **d)** $v^2 = 3 - 2v$

* aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240)

6. a) $2x^2 - 28x + 98 = 0$ **b)** $-3z^2 + 12z + 63 = 0$
c) $-5u^2 + 120u - 730 = 0$ **d)** $8x^2 + 80x + 72 = 0$

7. a) $3x^2 + x - 2 = 0$ **b)** $\frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{3}z - 1 = 0$
c) $2u^2 - 3u + 4 = 0$ **d)** $1{,}5y^2 + 2y - 7{,}5 = 0$

8. a) $x^2 + 4kx - 5k^2 = 0$ **b)** $x^2 + 4ax + a^2 = 0$
c) $x^2 - 2nx = 6mn + 9m^2$ **d)** $rx^2 - 2r^2x = rs - r^3$

3.4 Diskriminante und Lösungsformel

Wenn ein Mathematiker immer wieder gleichartige Aufgaben lösen muss, dann wird er dessen bald müde und er beginnt zu überlegen, ob sich nicht eine Formel finden lässt, mit der er ein für alle Mal alle Aufgaben dieses Typs lösen kann. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung entwickeln wir nun eine solche Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung.

$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

1. Schritt: Herstellen der Normalform

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2. Schritt: Ergänzen zum Quadrat

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

3. Schritt: Lösen der rein quadratischen Gleichung durch Faktorisieren
Die Faktorisierung lässt sich nur durchführen, wenn der Term $b^2 - 4ac$ nicht negativ ist. Ist er negativ, dann gibt es keine Lösung.

Ist er null, dann ist $x = -\frac{b}{2a}$ die einzige Lösung.

Ist er positiv, dann gibt es zwei Lösungen, die wir durch Faktorisieren finden, da man in diesem Fall $b^2 - 4ac$ als $(\sqrt{b^2 - 4ac})^2$ schreiben kann. Es gilt dann also

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0$$

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$