Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3.4 Diskriminante und Lösungsformel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

6. a) $2x^2 - 28x + 98 = 0$ **b)** $-3z^2 + 12z + 63 = 0$
c) $-5u^2 + 120u - 730 = 0$ **d)** $8x^2 + 80x + 72 = 0$

7. a) $3x^2 + x - 2 = 0$ **b)** $\frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{3}z - 1 = 0$
c) $2u^2 - 3u + 4 = 0$ **d)** $1{,}5y^2 + 2y - 7{,}5 = 0$

8. a) $x^2 + 4kx - 5k^2 = 0$ **b)** $x^2 + 4ax + a^2 = 0$
c) $x^2 - 2nx = 6mn + 9m^2$ **d)** $rx^2 - 2r^2x = rs - r^3$

3.4 Diskriminante und Lösungsformel

Wenn ein Mathematiker immer wieder gleichartige Aufgaben lösen muss, dann wird er dessen bald müde und er beginnt zu überlegen, ob sich nicht eine Formel finden lässt, mit der er ein für alle Mal alle Aufgaben dieses Typs lösen kann. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung entwickeln wir nun eine solche Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung.

$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

1. Schritt: Herstellen der Normalform

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2. Schritt: Ergänzen zum Quadrat

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

3. Schritt: Lösen der rein quadratischen Gleichung durch Faktorisieren
Die Faktorisierung lässt sich nur durchführen, wenn der Term $b^2 - 4ac$ nicht negativ ist. Ist er negativ, dann gibt es keine Lösung.

Ist er null, dann ist $x = -\dfrac{b}{2a}$ die einzige Lösung.

Ist er positiv, dann gibt es zwei Lösungen, die wir durch Faktorisieren finden, da man in diesem Fall $b^2 - 4ac$ als $(\sqrt{b^2 - 4ac})^2$ schreiben kann. Es gilt dann also

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0$$

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$x = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für diese Oder-Aussageform schreibt man oft kurz unter Verwendung des 1631 von William OUGHTRED (1574–1660) in seinem *Clavis mathematicae* – »Schlüssel der Mathematik« – eingeführten Zeichens $\pm$, gelesen »plus oder minus«

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Damit haben wir einen formelmäßigen Ausdruck für die beiden Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung, nämlich

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

oder kurz

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Über die Existenz von Lösungen und über ihre Anzahl entscheidet, wie wir oben gesehen haben, der Term

$$b^2 - 4ac.$$

Der englische Mathematiker James Joseph SYLVESTER (1814–1897) gab ihm deshalb 1851 den Namen Diskriminante*. Wir kürzen diesen Ausdruck mit D ab. Wegen seiner Bedeutung merken wir uns

> **Definition 84.1:** $D := b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante** der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

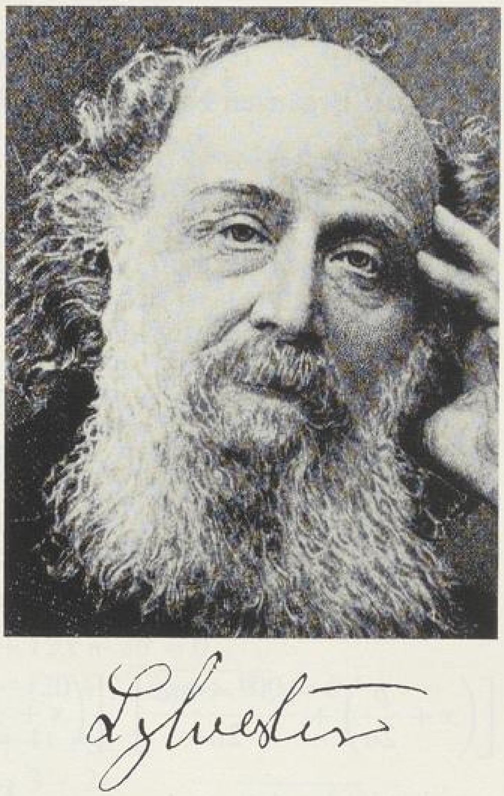


Abb. 84.1 James Joseph SYLVESTER (3.9.1814 London–15.3.1897 ebd.)

* discriminare (lat.) = trennen, unterscheiden. Diskriminante ist eine der vielen Wortschöpfungen SYLVESTERS.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in

> **Satz 85.1:** Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ hat
>
> für $D > 0$ die Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
>
> für $D = 0$ die Lösung $x = -\dfrac{b}{2a}$
>
> für $D < 0$ keine Lösung.

Praktisches Vorgehen bei der Anwendung der Lösungsformel:

1) Treten in den Koeffizienten der Gleichung Nenner auf, so beseitigt man diese durch Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner.
2) Ist der Koeffizient des quadratischen Glieds negativ, dann multipliziert man die Gleichung mit -1.
3) Da D die entscheidende Rolle spielt, berechnet man nun D.
   Ist $D < 0$, so ist man fertig.
   Ist $D = 0$, so ist $x = -\dfrac{b}{2a}$ die einzige Lösung.
   Ist $D > 0$, so erhält man die Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Beispiel 1:

$$-5x^2 + 8x + 21 = 0 \quad \| \cdot (-1)$$
$$5x^2 - 8x - 21 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-21) = 64 + 420 = 484;$$
$$\sqrt{D} = 22.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm 22}{2 \cdot 5}$$
$$x_1 = -\tfrac{7}{5}, \quad x_2 = 3.$$

Beispiel 2:

$$\tfrac{5}{6}x^2 + \tfrac{10}{9}x + \tfrac{10}{27} = 0 \quad \| \cdot \tfrac{54}{5}$$
$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0;$$
$$\sqrt{D} = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 0}{2 \cdot 9}$$
$$x = -\tfrac{2}{3}.$$

Beispiel 3:

$$x^2 + x + 1 = 0 \qquad D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3.$$

Keine Lösung.

**Zur Geschichte der Lösungsformel

Der Wunsch nach einer Lösungsformel für eine quadratische Gleichung ist so alt wie die Gleichung selbst. Solange man aber nicht über eine algebraische Formelsprache verfügte, konnte man den Lösungsweg nur in Worten angeben. Anhand der Aufgabe 1 der Keilschrifttafel BM 13901 (20. Jh. v. Chr.) zeigen wir dir dieses Vorgehen. Wir stellen links den babylonischen Text, rechts die moderne algebraische Form unter Verwendung allgemeiner positiver Koeffizienten B und C dar.

Die Fläche und die Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{3}{4}$ ist es. $\quad x^2 + x = \frac{3}{4}$

1, den Koeffizienten, nimmst du. $\quad 1 = B$

Die Hälfte von 1 brichst du ab, es ist $\frac{1}{2}$. $\quad \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ multiplizierst du, es ist $\frac{1}{4}$. $\quad \left(\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ fügst du hinzu, es ist 1. $\quad \left(\frac{B}{2}\right)^2 + C = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

1 hat als Quadratwurzel 1. $\quad \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} = 1$

$\frac{1}{2}$, das du mit sich multipliziert hast, von 1 subtrahierst du, es ist $\frac{1}{2}$; $\quad \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} - \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$

und das ist die Quadratseite. $\quad x = \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} - \frac{B}{2}$

Die gegebene Gleichung hat die Normalform $x^2 + x + (-\frac{3}{4}) = 0$, d.h., $a = 1$, $b = 1 = B$ und $c = -\frac{3}{4} = -C$. Mit unserer Formel erhalten wir als positive Lösung

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4 \cdot 1 \cdot C}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-B + 2\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C}\right) =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} - \frac{B}{2},$$

also das Ergebnis der Babylonier.

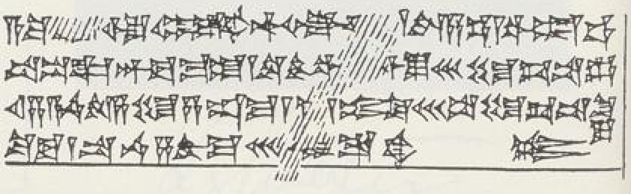


Abb. 86.1 Autographie der Aufgabe 1 der Keilschrifttafel BM 13901, aufbewahrt im **B**ritish **M**useum zu London

Nun gab es lange Zeit keine Null und erst recht keine negativen Zahlen, sodass diese auch nicht als Koeffizienten auftreten konnten. Daher gab es auch nicht *eine* quadratische Gleichung, sondern 5 verschiedene Typen. Und für jeden Typ musste ein eigenes Lösungsverfahren angegeben werden (siehe unten). Wir können fast sicher sein, dass DIOPHANT (um 250 n. Chr.) über all diese Verfahren verfügte, wenn wir auch keinen Beleg dafür haben; denn jedes Mal, wenn bei ihm eine quadratische Gleichung vorkommt, gibt er die Lösung richtig an.
Seine *Arithmetik* soll 13 Bücher umfasst haben, von denen uns nur 6 auf Griechisch überliefert wurden. Vor wenigen Jahren fand man eine um 900 angefertigte arabische Übersetzung von 4 weiteren Büchern. In den nun bekannten 10 Büchern findet man keine Theorie der quadratischen Gleichungen. Wir können nur hoffen, dass sich die letzten 3 Bücher auch noch finden!
Durch die Einführung der negativen Zahlen und auch der Null als Koeffizienten war es den Indern möglich, alle Gleichungen auf eine Standardform zu bringen und zu lösen. So verlangt BRAHMAGUPTA (598 – nach 665), jede quadratische Gleichung – in unserer Schreibweise – auf die Form $ax^2 + bx = d$ zu bringen und dann gemäß $x = \frac{\sqrt{4ad + b^2} - b}{2a}$ zu lösen. Mit unserem $c = -d$ ist dies fast schon unsere Lösungsformel. Es fehlt nur noch das $\pm$. Wir müssen sogar annehmen, dass bereits sein Vorgänger ARYABHATA I (um 476–?) auf diese Art quadratische Gleichungen löste (siehe Aufgabe 101/**27**).
Leider übernahmen die Araber von den Indern nicht die negativen Zahlen – ein algebraischer Rückschritt! –, sodass es bei ihnen auch keine Standardform mit Lösungsformel gibt. Einen Überblick über alle möglichen Formen bringt AL-CHARIZMI (um 780 – nach 847) gleich zu Beginn seines *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* – »Handbuch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen«. Wir müssen uns dabei erinnern (vgl. Abbildung 68.1), dass er darin drei Begriffe verwendet:
- die Wurzel; darunter versteht man alles, was mit sich multipliziert werden kann;
- das Vermögen; darunter versteht man alles, was sich durch Multiplizieren der Wurzel mit sich selbst ergibt;
- die (reine) Zahl; darunter versteht man alles, was ausgesprochen werden kann ohne Beziehung zu Wurzel und Vermögen.

Und nun sagt AL-CHARIZMI, dass zunächst je zwei von diesen dreien (oder Vielfache davon) untereinander gleich sein können, dass man aber auch jeweils zwei addieren und der 3. Art gleichsetzen könne. Dadurch entstehen 6 Typen von Gleichungen, die zur Grundlage der abendländischen Gleichungslehre wurden. Deutet man »Wurzel« als Unbekannte x, so wird »Vermögen« zu x^2, und es entstehen quadratische Gleichungen.* Mit positiven A, B und C können wir den arabischen Text modern umschreiben:

(A1)	Vermögen sind Wurzeln gleich.	$Ax^2 = Bx$
(A2)	Vermögen sind einer Zahl gleich.	$Ax^2 = C$
(A3)	Wurzeln sind einer Zahl gleich.	$Bx = C$
(B1)	Vermögen und Wurzeln sind einer Zahl gleich.	$Ax^2 + Bx = C$
(B2)	Vermögen und Zahl sind Wurzeln gleich.	$Ax^2 + C = Bx$
(B3)	Wurzeln und Zahl sind Vermögen gleich.	$Bx + C = Ax^2$

Jede dieser 6 Typen führt AL-CHARIZMI an einem Problem vor. Dabei bereiten die

* Natürlich kann man auch »Vermögen« als Unbekannte x wählen, was in vielen Aufgaben zweckmäßig ist. Weil dies in den Übersetzungen aber fast nie getan wurde, entstanden viele Ungereimtheiten und Missverständnisse. Siehe z. B. Aufgabe 94/**11i**.

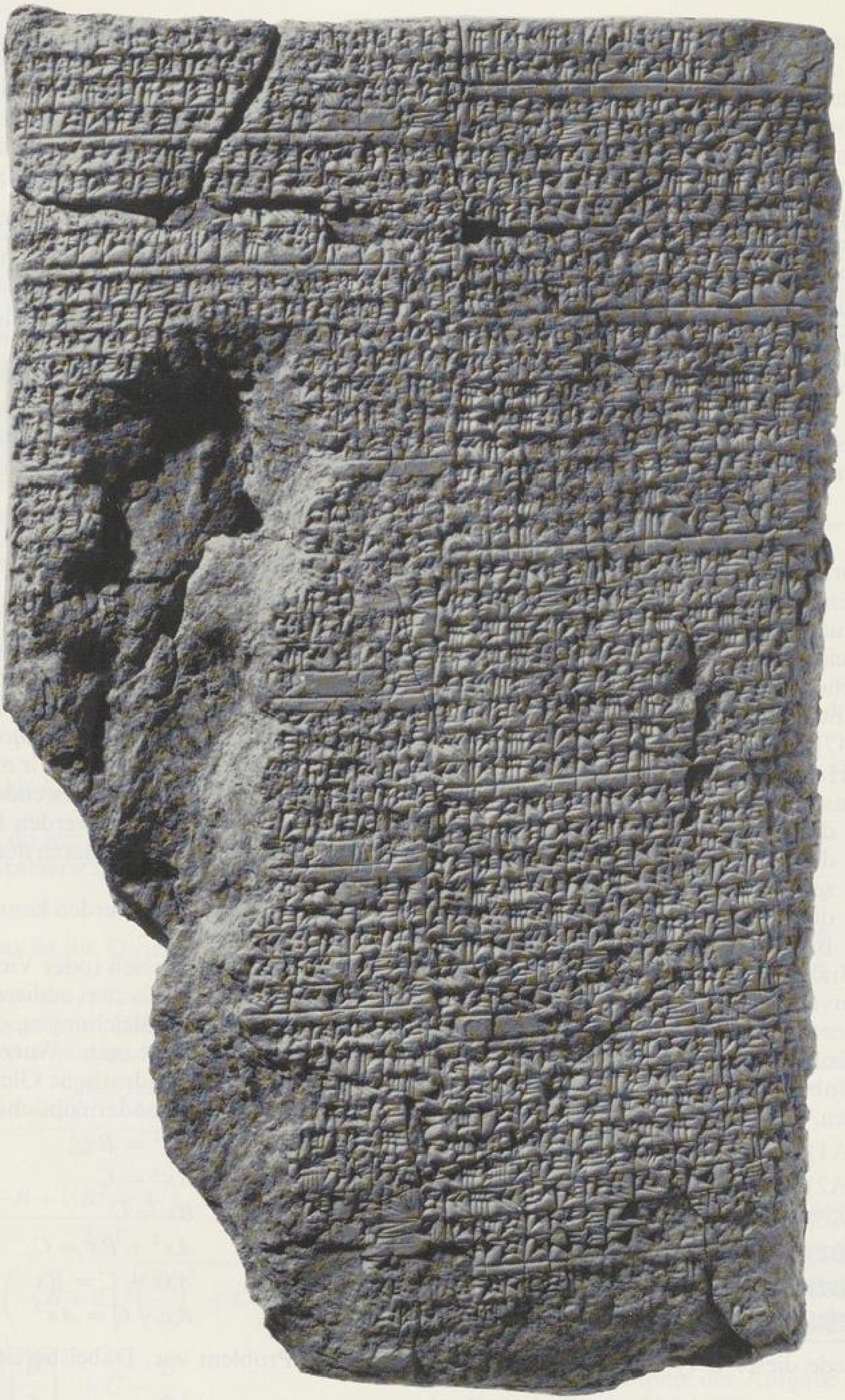


Abb. 88.1 Vorderseite der altbabylonischen Keilschrifttafel BM 13901, ca. 12 cm × 20 cm groß

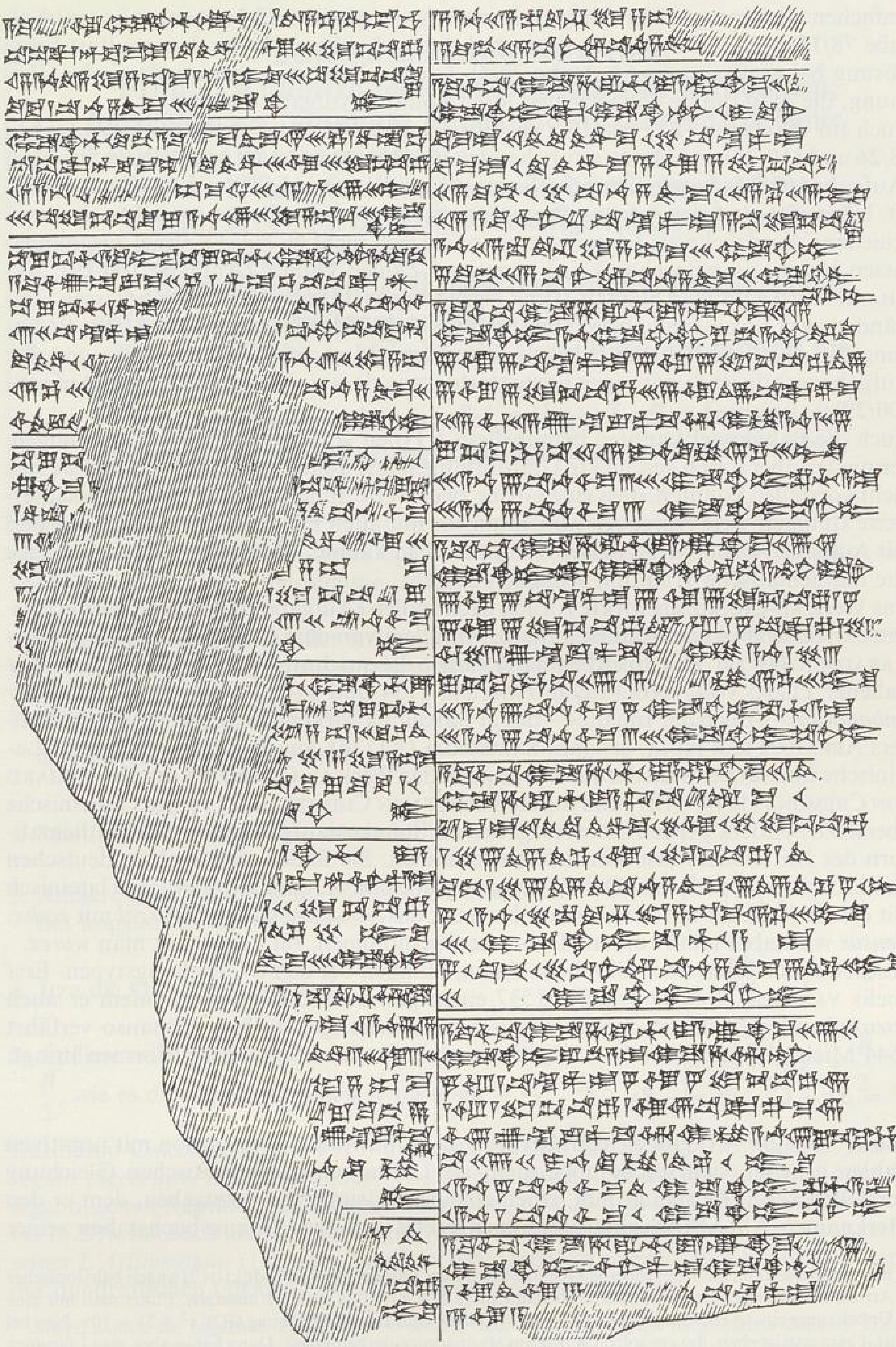


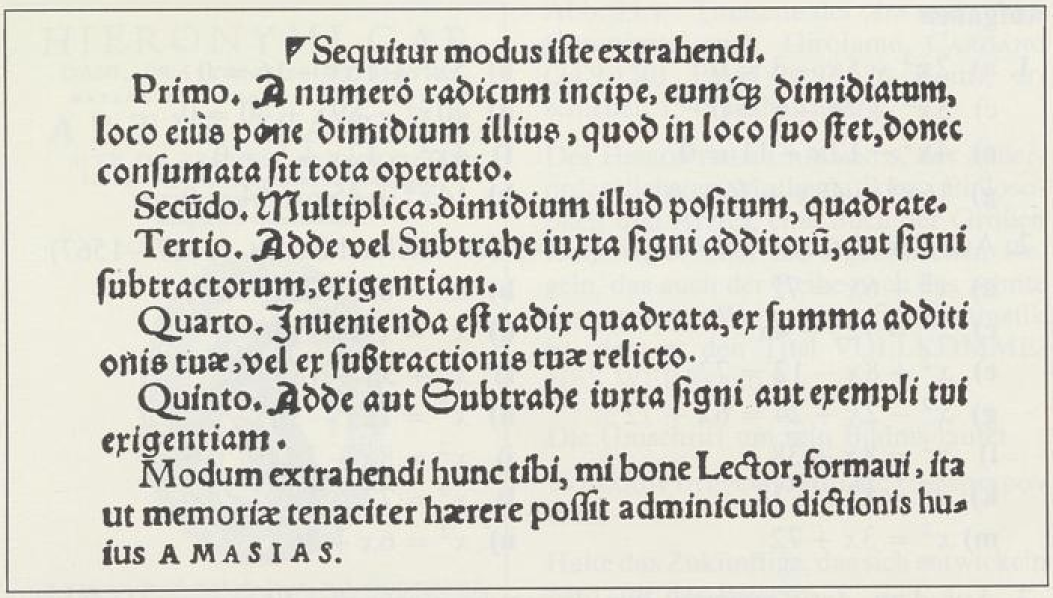
Abb. 89.1 Autographie der in Abbildung 88.1 wiedergegebenen altbabylonischen Keilschrifttafel BM 13901

einfachen Gleichungen (A1) bis (A3) keine Schwierigkeiten. (A3) ist sogar linear (Aufgabe 78/**15c**). (A1) wird linear, da man durch x dividieren kann; denn null ist keine Lösung bei AL-CHARIZMI (Aufgabe 79/**4**). Und (A2) ist eine rein quadratische Gleichung, die man durch Wurzelziehen lösen konnte (Aufgabe 78/**15a**).
Auch für die Typen (B1) bis (B3), die übrigens bereits von EUKLID (siehe Aufgaben 98/**26** und 110/**25**) und DIOPHANT behandelt worden waren, stellt er jeweils ein Problem (Aufgabe 100/**28**), beschreibt den Lösungsweg in Worten und beweist ihn geometrisch (!). Übersetzt man den Lösungsweg in unsere Formelsprache, so entstehen drei verschiedene Ausdrücke als Lösungsformeln, die sich nicht zu *einer* Formel zusammenfassen lassen, da man eben keine negativen Zahlen kannte (Aufgabe 100/**29**). AL-CHARIZMI erkennt aber, dass (B2) im Gegensatz zu (B1) und (B3) unter gewissen Umständen zwei Lösungen haben kann. Er gibt – natürlich wieder in Worten – die Bedingung für zwei und für eine einzige Lösung an und sogar dafür, dass »die gestellte Aufgabe nichtig ist« – wir sagen heute stattdessen, dass sie keine Lösung hat (Aufgabe 100/**29**).
Auch die Babylonier kannten bereits diese 3 Typen von quadratischen Gleichungen, vermieden aber durch geschickte Umformungen fast immer den Typ (B2), weil sie sich nicht vorstellen konnten, dass eine Größe zwei Werte annehmen sollte.* Interessanterweise stimmen viele Aufgaben AL-CHARIZMIS mit alten babylonischen Aufgaben und mit Aufgaben DIOPHANTS, dessen Werke er nicht kannte, überein, sodass wir auf eine alte mathematische Tradition schließen dürfen.
Das Werk AL-CHARIZMIS wirkte zurück nach Indien (Aufgabe 100/**30**) und wurde fortgesetzt von arabischen Mathematikern, vor allem von dem in Bagdad wirkenden AL-KARADSCHI (10./11. Jh.). Ins Abendland kamen die quadratischen Gleichungen, als der Italiener PLATO VON TIVOLI (lebte zwischen 1134 und 1145 in Barcelona) den *liber embadorum* – »Buch der Inhalte« – des in Barcelona wirkenden jüdischen Mathematikers ABRAHAM BAR HIJJA, genannt SAVASORDA († 1136), aus dem Hebräischen ins Lateinische übersetzte. Bald darauf wurde auch das Werk AL-CHARIZMIS durch GERHARD VON CREMONA (1114–1187) und durch ROBERT VON CHESTER (um 1145) ins Lateinische übersetzt. Seitdem werden seine Aufgaben als Standardaufgaben von den Mathematikern des Mittelalters fast wörtlich übernommen. Sie finden sich auch in deutschen Handschriften des 15. Jh.s. Dabei wird das arabische مال (māl) = *Vermögen* lateinisch mit *census* (seltener mit *substantia*) übersetzt, das جذر (dschidr) = *Wurzel* mit *radix*. *Census* wird als Fremdwort ins Deutsche übernommen, für *radix* sagt man *wurcz*.
Mathematisch blieb aber alles beim Alten, nämlich bei den 6 Gleichungstypen. Erst Gielis VAN DEN HOECKE schaffte 1537 einen gewissen Durchbruch, indem er auch abzuziehende Glieder in den quadratischen Gleichungen zulässt. Genauso verfährt 1544 Michael STIFEL (1487?–1567), der sie damit alle auf eine der 3 Formen bringt:

$$x^2 = Bx + C, \quad x^2 = -Bx + C, \quad x^2 = Bx - C. \quad (B \text{ und } C \text{ positiv})$$

Nur $x^2 = -Bx - C$ gibt es nicht bei ihm, da er, obwohl er sonst schon mit negativen Zahlen arbeitet, sich solche noch nicht als Lösung einer quadratischen Gleichung vorstellen kann. Es gelingt ihm, einen einzigen Lösungsweg anzugeben, dem er den Merknamen AMASIAS gibt, zusammengesetzt aus den Anfangsbuchstaben seiner

* Beispielsweise kann man die Aufgabe »10 habe ich in zwei Teile geteilt, ihr Produkt ist 21« nach babylonischer Art als Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zu $x + y = 10 \wedge xy = 21$ ansetzen. Führt man nur eine Unbekannte ein, so erhält man aus $x(10 - x) = 21$ die quadratische Gleichung (B2) $x^2 + 21 = 10x$. Neu bei AL-CHARIZMI ist eben, dass er solche Aufgaben als quadratische behandelt. Dann hat er aber zwei Lösungen für x, nämlich 3 und 7, was für die Babylonier unverständlich ist. Sie bekommen auch keine zwei! Denn sie benützen die Identität $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$ und rechnen $(x - y)^2 = 100 - 4 \cdot 21 = 16$, was, da es nur positive Zahlen gibt, sofort auf $x - y = 4$ führt. Mit $x + y = 10$ ergibt sich $x = 7$ und $y = 3$.



¶ Sequitur modus iste extrahendi.
Primo. A numeró radicum incipe, eumq́ dimidiatum,
loco eius pone dimidium illius, quod in loco suo stet, donec
consumata sit tota operatio.
Secūdo. Multiplica, dimidium illud positum, quadrate.
Tertio. Adde vel Subtrahe iuxta signi additorū, aut signi
subtractorum, exigentiam.
Quarto. Inuenienda est radix quadrata, ex summa additi
onis tuæ, vel ex subtractionis tuæ relicto.
Quinto. Adde aut Subtrahe iuxta signi aut exempli tui
exigentiam.
Modum extrahendi hunc tibi, mi bone Lector, formaui, ita
ut memoriæ tenaciter hærere possit adminiculo dictionis hu-
ius AMASIAS.

Abb. 91.1 Die AMASIAS-Merkregel aus Michael STIFELS *Arithmetica integra* von 1544 (folium 240 v) – Übersetzung im Lösungsheft

lateinischen Merkregel aus der *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – von 1544 (Abbildung 91.1). Etwas modernisiert lautet sie für $x^2 = \pm Bx \pm C$:

1. **A**nfange mit der Anzahl der Wurzeln, B
   halbiere sie und lass sie stehn. $\frac{B}{2}$
2. **M**ultipliziere diese Hälfte mit sich. $\left(\frac{B}{2}\right)^2$
3. **A**ddiere oder **S**ubtrahiere, wie es das Vorzeichen des konstanten Glieds C fordert. $\left(\frac{B}{2}\right)^2 \pm C$
4. **I**tzo die Quadratwurzel zieh. $\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 \pm C}$
5. **A**ddiere oder **S**ubtrahiere das zur Seite gestellte $\frac{B}{2}$, wie es das Vorzeichen von B verlangt. $\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 \pm C} \pm \frac{B}{2}$

Geronimo CARDANO (1501–1576) hingegen erkennt in seinem *Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus* (1545) – »Das eine Buch über die Große Kunst oder die algebraischen Regeln« – als Lösungen auch negative Zahlen an.* Simon STEVIN (1548 bis 1620) schließlich lässt sowohl negative Koeffizienten wie auch negative Lösungen in seiner *L'Arithmetique* (1585) zu. Damit ist der Abschluss erreicht: Es gibt nur eine Form der quadratischen Gleichung und nur eine Lösungsformel.

* STIFEL nannte die negativen Zahlen *numeri absurdi* oder auch *numeri ficti* (eingebildete Zahlen). Diesen Ausdruck benützt auch CARDANO. Wenngleich dieser in Kapitel I seiner *Ars magna* von wahren und eingebildeten Lösungen einer quadratischen Gleichung spricht ($x^2 + 4x = 21$ hat die wahre Lösung 3 und die eingebildete -7), so führt er bei den in Kapitel V vorgerechneten Beispielen immer nur die wahre, d. h. die positive Lösung auf.

Aufgaben

1. **a)** $2x^2 - 5x - 3 = 0$ **b)** $5x^2 + 16x - 16 = 0$
c) $3x^2 - 7x - 6 = 0$ **d)** $40x^2 - 89x + 40 = 0$
e) $4x^2 - 12x + 11 = 0$ **f)** $4x^2 - 12x + 5 = 0$
g) $16x^2 - 48x + 36 = 0$ **h)** $14x^2 + 45x - 14 = 0$

2. Aus der *Arithmetica integra* (1544) des Michael STIFEL (1487?–1567):
a) $x^2 + 6x = 72$ **b)** $x^2 = 6x + 72$
c) $x^2 = 725 - 4x$ **d)** $x^2 = x + 35156$
e) $x^2 + 8x - 12 = 72$ **f)** $x^2 + 3x + 18 = 72$
g) $x^2 - 2x + 24 = 6x + 72$ **h)** $x^2 = 12x - 36$
i) $x^2 = 8x + 38$ **j)** $x^2 = 8x - 38$
k) $x^2 = 12x - 18$ **l)** $x^2 = 72 - 3x$
m) $x^2 = 3x + 72$ **n)** $x^2 = 6x + 36$

3. Aus dem *Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):
a) $x^2 + 4x = 21$ **b)** $x^2 = 4x + 21$ **c)** $x^2 + 12 = 7x$
d) $x^2 = 10x + 144$ **e)** $144 = 10x + x^2$ **f)** $x^2 = 10x + 6$
g) $6 = 10x + x^2$ **h)** $10x = x^2 + 6$ **i)** $x^2 = \sqrt{12}x + 22$
j) $x^2 = \sqrt{12}x + 20$ **k)** $x^2 = \sqrt{12}x + 9$ **l)** $x^2 = \frac{2}{3}x + 11$
m) $x^2 + 16 = 10x$

4. **a)** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **b)** $x^2 - 2x - 1 = 0$
c) $4x^2 + 8x + 1 = 0$ **d)** $6x^2 - 2x - 1 = 0$
e) $5x^2 - 5x + 1 = 0$ **f)** $12x^2 + 48x + 47 = 0$

5. **a)** $0{,}5x^2 - 0{,}5x - 1 = 0$ **b)** $0{,}5x^2 + 3{,}25x + 1{,}5 = 0$
c) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 2 = 0$ **d)** $0{,}1x^2 + \frac{43}{30}x - 1 = 0$
e) $2{,}25x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$ **f)** $\frac{3}{7}x^2 - \frac{29}{28}x + 0{,}5 = 0$
g) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{10}{9} = 0$ **h)** $0{,}36x^2 + 0{,}4x - \frac{10}{9} = 0$

6. Runde die erhaltenen Lösungen auf Tausendstel.
a) $x^2 - 37 = 0$ **b)** $x^2 - 6x - 11 = 0$
c) $x^2 + 11x + 8 = 0$ **d)** $16x^2 - 112x + 63 = 0$
e) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$ **f)** $2\sqrt{3}x^2 - 12x + 5\sqrt{3} = 0$
g) $\sqrt{3}x^2 - 6x + 4\sqrt{3} = 0$ **h)** $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$
i) $x^2 - (4 + 2\sqrt{2})x + 6 + 4\sqrt{2} = 0$ **j)** $2x^2 + x(1 - 3\sqrt{3}) + 3 - \sqrt{3} = 0$
k) $\sqrt{8}x^2 - 4\sqrt{3}x + 2\sqrt{2} = 0$ **l)** $x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{5}x - \sqrt{15} = 0$

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Abb. 93.1 Titelseite der *Ars magna* des Geronimo, auch Girolamo CARDANO (24.9.1501 Pavia–20.9.1576 Rom), erschienen 1545 in Nürnberg:

Des HIERONYMUS CARDANUS, des außerordentlichsten Mathematikers, Philosophen und Arztes, eine Buch der Großen Kunst oder über die algebraischen Regeln, das auch der Reihe nach das zehnte des gesamten Werks über die Arithmetik ist, dem er den Titel VOLLKOMMENES WERK gab.*

Die Umschrift um sein Bildnis lautet

τὸ μέλλον ὅτι γενήσεται εἰς τὸ φέρτερον τίθει

Halte das Zukünftige, das sich entwickeln wird, für das Bessere!

7. Gib vierstellige Näherungen für die Lösungen an, d.h., berechne die Lösungen auf vier geltende Ziffern genau (führende Nullen zählen nicht!).

a) $x^2 - 7{,}9771x + 7{,}0802 = 0$ **b)** $x^2 + 0{,}1010x - 0{,}2411 = 0$

c) $x^2 + \pi x - \pi^2 = 0$ **d)** $x^2 - \sqrt{3{,}14}\,x + 1 - \sqrt{5} = 0$

e) $3{,}14x^2 + 2{,}01x + 0{,}301 = 0$ **f)** $1509x^2 + 1998x - 7487 = 0$

g) $1{,}23 \cdot 10^4 x^2 - 2{,}34 \cdot 10^5 x - 1 = 0$

h) $\sqrt{2}x^2 + (2 - 2\sqrt{2})x + \dfrac{3}{\sqrt{2}} - 2 = 0$

8. a) $(x+5)(2x-7) = 9$ **b)** $(1-3x)(5x+2) = 0$

c) $(4x-1)^2 + 2x = 0$ **d)** $(2x+3)(3-2x) + 6x + 1 = 0$

e) $(11x-7)^2 = (10-10x)^2$ **f)** $4x^2 - x(5+3x) = (6-2x)^2 - 36$

g) $(3x+2)^2 - (2x+1)(2x-1) + x = 11$

* Text unter dem Bildnis:
Du findest in diesem Buch, lernbegieriger Leser, die algebraischen Regeln (die Italiener nennen sie die der Coß), die vom Verfasser durch neue Hinzuerfindungen und Beweise so bereichert wurden, dass an Stelle der recht wenigen vorher allgemein geläufigen schon siebzig herausgekommen sind. Und sie erklären nicht nur das Problem, bei dem eine Zahl einer zweiten oder zwei einer, sondern auch das, bei dem zwei zweien oder drei einer gleich gewesen sind. – Es erschien aber angebracht, dieses Buch deshalb gesondert herauszugeben, damit, wenn dieser sehr versteckte und völlig ungehobene Schatz der ganzen Arithmetik ans Licht gebracht und wie in einem Theater allen zum Anschauen vor Augen geführt wird, die Leser angespornt werden, die übrigen Bücher des »Vollkommenen Werks«, die bandweise erscheinen werden, umso begieriger aufzunehmen und mit geringerem Widerwillen durchzuarbeiten.

h) $(3+5x)^2-(3x-2)^2-(5-2x)(5+2x)=0$

i) Aus dem *liber abaci* (1202) des Leonardo von Pisa (um 1170 bis nach 1240): $(1+\frac{2}{3}x)(1+\frac{3}{4}x)=73$

•9. a) $(4x+1)(6x-5)(5x+2)=(3x+4)(10x-17)(4x+3)-246$

b) $(8x-7)(9x-16)(7x-6)=(14x-13)(12x-11)(3x-5)-5$

c) $x(x-2)(x+5)+(x-3)(x-2)(8-3x)=2x^2(3-x)+208$

d) $(x-4)^3+(x+1)^3=(x-1)(x-2)(2x+3)+61$

e) $(2x+3)^3+(4x-3)^3=(2x+1)(4x+3)(9x-25)+853$

f) $(3x-4)^3-(6x-7)^3=(9x+6)(7x-12)(7-3x)+620$

g) $(5x-9)^3-(7x-5)^3=4x(14x-25x^2)-2x(59x^2-45)$

10. a) $x+\dfrac{6}{x}=5$ **b)** $x-\dfrac{18}{x}=3$

c) $3x-\dfrac{16}{x}=8$ **d)** $9x+\dfrac{45}{x}=86$

e) $\dfrac{6}{2x+5}+\dfrac{5}{4x-4}=1$ **f)** $\dfrac{8}{6x+1}-\dfrac{4}{3x-4{,}5}=5$

g) $\dfrac{3}{2x-7}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2x-6}$ **h)** $1+\dfrac{1}{x-12}=\dfrac{25}{4x+1}$

i) $9-\dfrac{13}{5x+1}+\dfrac{40}{5x-8}=0$ **j)** $\dfrac{3}{6x-2}+\dfrac{7}{3x+1}=\dfrac{5}{2}$

k) Aus dem *liber abaci* (1202) des Leonardo von Pisa:

$$\frac{60}{x+2}=5+\frac{20}{x}$$

l) Aus dem *Codex latinus monacensis 14908* (um 1460):

$$\frac{15}{x}+\frac{17}{x+3}=7$$

11. Zur Vertiefung rechnet al-Charizmi in seinem *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* u. a. die folgenden Aufgaben vor. Löse die in moderner Schreibweise wiedergegebenen Gleichungen. Warum sind nicht alle von dir gefundenen Lösungen auch Lösungen bei al-Charizmi?

a) $(10-x)^2-x^2=40$ **b)** $(10-x)^2+x^2+(10-x)-x=54$

c) $\dfrac{10-x}{x}+\dfrac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$ **d)** $\dfrac{5x}{2(10-x)}+5x=50$

e) $(10-x)^2=81x$ **f)** $\dfrac{x(10-x)}{10-2x}=5\frac{1}{4}$

g) $(x - (\tfrac{1}{3}x + 3))^2 = x$ **h)** $\dfrac{1{,}5}{1+x} = 2x$

i)* $(x - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{4}x - 4)^2 = x + 12$ **j)** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{6}$

•12. a) $\dfrac{7}{x+5} - \dfrac{8}{x-6} = \dfrac{3}{x-1}$ **b)** $\dfrac{5}{x-4} + \dfrac{6}{x-3} = \dfrac{6}{x-6}$

c) $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{4}{x-3} = \dfrac{6}{7-x}$ **d)** $\dfrac{7}{x-3} + \dfrac{9}{x+5} = \dfrac{40}{x+1}$

e) $\dfrac{6}{3x-4} - \dfrac{5}{4x-3} = \dfrac{18}{2x+5}$ **f)** $\dfrac{11}{4x-1} + \dfrac{18}{7x-3} = \dfrac{26}{3x+4}$

g) $\dfrac{18}{2x+1} - \dfrac{14}{3x+2} = \dfrac{19}{4x+3}$ **h)** $\dfrac{7}{2x-3} + \dfrac{26}{3x-2} = \dfrac{57}{4x-1}$

••i) $\dfrac{8x+7}{6x^2-13x-5} + \dfrac{10x-1}{3x^2+10x+3} = \dfrac{7x+2}{2x^2+x-15}$

•13. a) $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-1}{x+4} = \dfrac{x-1}{x-4} + 1$ **b)** $\dfrac{x+11}{x+2} + \dfrac{x+13}{x+3} = \dfrac{4}{x-5} + 2$

c) $\dfrac{x+5}{x-3} + \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{5}{x-4} + 2$ **d)** $\dfrac{x+5}{x+2} + \dfrac{x+7}{x+3} = \dfrac{x+2}{x} + 1$

•14. a) $x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$ **b)** $m^2x^2 - 5mnx + 4n^2 = 0,\ m \neq 0$

c) $x^2 + (p-q)x - pq = 0$ **d)** $x^2 + (1 - 2a^2)x - 2a^2 = 0$

e) $4u^2x^2 - 4(u^2 + uv)x + (u+v)^2 = 0,\ u \neq 0$

••f) $2c^2x^2 - 2c^2x - cdx - 3cd - 6d^2 = 0,\ c \neq 0$

••g) $4x^2 - 4(r+s)x + r^2 + 2rs - 1 = 0$

••h) $x^2 + ax - 2bx - 2ab - 2(a+2b) - 4 = 0$

••i) $(x+2a)(x+b)(x-a+b) = (x-b)^3 + b(x-a-b)^2 + a(6bx - a^2)$

••j) $(x+a)^3 - (x-a)^3 = a(2x+a)(2x-b) + 2a^3 + 5a^2b + 4ab^2$

* Der Text AL-CHARIZMIS lautet: »Ein Vermögen, du nimmst ein Drittel davon weg und ein Viertel und 4 Dirhem [siehe Fußnote auf Seite 67]. Dann multiplizierst du den Rest mit sich selbst und das Vermögen ist wiedergewonnen, vermehrt um 12 Dirhem.«
Setzt man Vermögen $= x$, so erhält man die obige Gleichung.
CARDANO bringt diese Aufgabe als Quaestio I in Kapitel V seiner *Ars magna* (1545) und verweist auf AL-CHARIZMI als Autor: »Est numerus, à cuius quadrato si abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsius quadrati, atque insuper 4. residuum autem in se duxeris, fiet productum aequale quadrato illius numeri, & etiam 12.«
Würde man *numerus* $= x$ setzen, so erhielte man $(x^2 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - 4)^2 = x^2 + 12$, eine unnötig schwere Gleichung.
Diese Aufgabe ist ein schönes Beispiel dafür, dass *māl = Vermögen* nicht immer als Quadrat einer Zahl gedeutet werden muss. Übrigens gibt sich CARDANO mit der Lösung für das Quadrat der Zahl zufrieden, gibt also die angeblich gesuchte Zahl gar nicht an.

15. Führe beim Lösen der folgenden Gleichungen die erforderlichen Fallunterscheidungen durch!

a) $x^2 + 2ax + 1 = 0$

• **b)** $x^2 - 4ax + 4a = 0$

• **c)** $x^2 + abx + a^2 b = 0$

d) $x^2 + (2a + 4b)x + 5a^2 + 5b^2 = 0$

e) $mx^2 - 2x - \frac{1-m}{m^2} = 0$

• **f)** $ax^2 + \frac{ax}{a+2} - \frac{1}{a^2-4} = 2x^2 + x$

g) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-2a}{x+a} = 2\frac{1}{4}$

• **h)** $\frac{1}{ax+b} + \frac{1}{ax-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}$

16. Wie muss man bei den folgenden Gleichungen k wählen um die angegebene Zahl von Lösungen zu erhalten?

a) $2x^2 + 6x + k = 0$ 2 Lösungen
b) $3x^2 + kx + 27 = 0$ keine Lösung
c) $6x^2 - 5kx - k^2 = 0$ 1 Lösung
d) $x^2 - kx + 4 = 0$ 2 Lösungen
e) $2x^2 + kx - 4k^2 x - 2k^3 = 0$ 1 Lösung
f) $x^2 - k(2k + 0{,}5)x - k^3 = 0$ 1 Lösung

17. a) Beweise:
1) Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat im Falle $q < 0$ stets zwei verschiedene Lösungen.
2) Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ besitzt, falls a und c entgegengesetzte Vorzeichen haben, stets zwei verschiedene Lösungen.

b) Gilt von diesen Aussagen auch die Umkehrung?

18. Die Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $d \neq 0$ stellt bekanntlich eine Äquivalenzumformung dar. Zeige für den Fall der quadratischen Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel, dass dabei die Lösungen tatsächlich gleich bleiben.

19. Wähle in den folgenden Gleichungen k so, dass die Differenz der Lösungen den angegebenen Wert d hat.

a) $2x^2 - 5x + k = 0,$ $d = 1{,}5$
b) $6x^2 + 13x + k = 0,$ $d = \frac{5}{6}$
c) $x^2 + kx - 11 = 0,$ $d = 12$
d) $9x^2 + k^2 x + 2 = 0,$ $d = \frac{17}{9}$
e) $kx^2 + 15x + 12 = 0,$ $d = 3$
f) $kx^2 - 24x - 1 = 0,$ $d = 1{,}04$

20. Für welche Werte von k haben die folgenden Gleichungen ganzzahlige Lösungen?

a) $x^2 + 2x + k^2 = 0$
b) $kx^2 - 20x + 15 = 0,\ k \in \mathbb{N}$
c) $k(x^2 + 10x) + 48 = 0,\ k \in \mathbb{Z}$

21. In der Gleichung $x^2 - 8x + n = 0$ soll die natürliche Zahl n so gewählt werden, dass eine durch 3 teilbare ganzzahlige Lösung auftritt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

22. a) Begründe: Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit rationalen Koeffizienten die irrationale Lösung $r + s\sqrt{t}$, wobei r und s rational sind, dann hat sie auch die Lösung $r - s\sqrt{t}$.

b) Eine quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten habe die Lösung $3 - 2\sqrt{17}$. Wie lautet ihre Normalform?

c) Die Gleichung $2x^2 - 7x + c = 0$, c rational, soll eine Lösung mit dem irrationalen Bestandteil $3\sqrt{5}$ haben. Bestimme c.

23. Gilt der Satz aus Aufgabe **22. a)** auch für rationale Lösungen? Bearbeite dazu:

a) Bestätige, dass $1 + \sqrt{4}$ Lösung der Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$ ist. Ist dann auch $1 - \sqrt{4}$ Lösung?

b) Bestätige, dass $3{,}5 + \sqrt{\frac{1}{4}}$ Lösung der Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$ ist. Ist auch $3{,}5 - \sqrt{\frac{1}{4}}$ Lösung?

24. Im Britischen Museum zu London wird unter der Signatur BM 13901 eine der ältesten babylonischen Keilschrifttafeln (ca. 1900 v. Chr.) aufbewahrt. Sie enthält 24 Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen mit einer (Nr. 1–7, 16 und 23), mit zwei oder mehr Unbekannten führen. Offensichtlich handelt es sich bei dieser Tafel um Übungsmaterial für den Mathematikunterricht; denn die Aufgaben sind alle vorgerechnet (siehe Seite 86). Bestimmt wurde bei den folgenden Aufgaben jeweils die Seite eines Quadrats. Suche sie!

1) Die Fläche und die Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{3}{4}$ ist es.*

2) Die Seite meines Quadrats von der Fläche habe ich subtrahiert, und 870 ist es.

3) Ein Drittel der Fläche habe ich abgezogen, ein Drittel der Seite meines Quadrats habe ich zur Fläche hinzugefügt, und $\frac{20}{60}$ ist es.

4) Ein Drittel der Fläche habe ich subtrahiert, und die Fläche und die Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $286\frac{2}{3}$ ist es.

5) Die Fläche und die Seite meines Quadrats und den dritten Teil der Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{55}{60}$ ist es.

6) Die Fläche und zweimal den dritten Teil der Seite meines Quadrats habe ich addiert, und $\frac{35}{60}$ ist es.

7) Elf Flächen und sieben Seiten meines Quadrats habe ich addiert, und $6\frac{1}{4}$ ist es.

* Natürlich kann man Flächen und Seiten nicht addieren. Die Babylonier benützen zwar noch die geometrischen Ausdrücke, meinen damit aber immer nur die Maßzahlen der Fläche und der Seite.

16) Ein Drittel der Seite meines Quadrats von der Fläche habe ich abgezogen, und $\frac{1}{12}$ ist es.

23) Eine Fläche. Die vier Seiten und die Fläche habe ich addiert, und $\frac{25}{36}$ ist es.

25. Aus dem Buch IX des *Chiu Chang Suan Shu* (2. Jh. v. Chr.):

a) *Aufgabe 12:* Jetzt habe man eine Tür, deren Höhe und Breite man nicht kennt. Beide sind kürzer als die unbekannte Länge einer Bambusstange. Hält man diese horizontal, dann kommt man nicht hindurch; denn 4 Fuß ist sie zu lang. Hält man sie vertikal, dann kommt man um 2 Fuß nicht hindurch. Hält man sie aber schräg, dann kommt man gerade hindurch. Frage: Wie groß sind Höhe, Breite und Diagonale? [1 Fuß $\approx$ 23 cm]

b) *Aufgabe 20:* Jetzt hat man eine Stadt mit quadratischem Grundriss. Die Seitenlänge kennt man nicht. In der Mitte jeder Seite ist ein offenes Tor. Geht man aus dem Nordtor 20 Schritt hinaus, dann kommt man an einen Baum. Geht man aus dem Südtor 14 Schritt hinaus, biegt ab und geht dann nach Westen 1775 Schritt, dann erblickt man von dort den Baum. Frage: Wie groß ist die Quadratseite der Stadt? [1 Schritt = 6 Fuß $\approx 1\frac{1}{3}$ m]

26. a) Euklid (um 300 v. Chr.) behandelt in Buch II, Satz 11 seiner *Elemente* folgendes Problem: Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt gleich ist dem Quadrat über dem anderen Abschnitt.

1) Berechne die Länge x desjenigen Teils der Strecke a, über dem das Quadrat errichtet wird.*

2) Zeige, dass stets $x > \frac{1}{2}a$ ist.

b) Zeige durch Berechnen von $\overline{AD} = x$, dass die von Euklid angegebene Konstruktion richtig ist (Abbildung 98.1).

c) Die stetige Teilung oder der goldene Schnitt. Euklid nennt in Buch VI (Definition 3) seiner *Elemente* eine Strecke stetig geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt genauso verhält wie der größere Abschnitt zum kleineren. Zeige, dass die Aufgabe, eine Strecke a stetig zu teilen, auf dieselbe

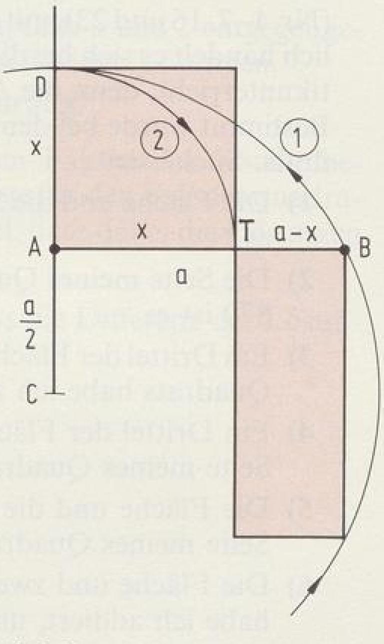


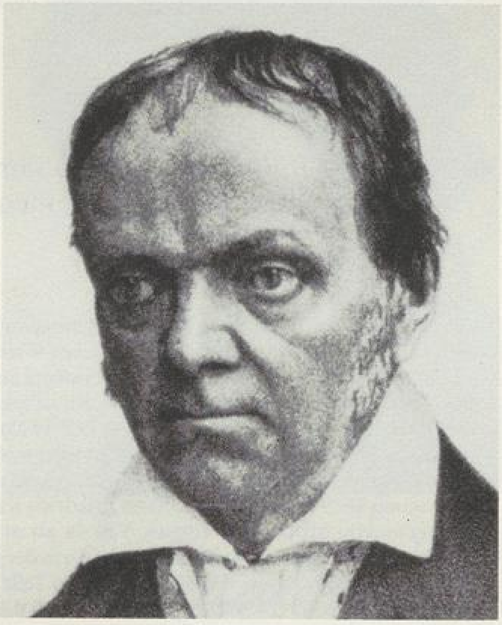
Abb. 98.1 T teilt [AB] so, daß $x^2 = a(a-x)$.
$k(C; \overline{CB})$ liefert D, $k(A; \overline{AD})$ liefert T.

* Die quadratische Gleichung für x ist vom Typ (B1). (Siehe Seite 87)

Gleichung führt wie die, mit der das Problem von EUKLIDS Satz II/11 aus Aufgabe **a** gelöst wird.*

d) Die stetige Teilung hat folgende interessante Eigenschaft: Trägt man den kleineren Abschnitt auf dem größeren Abschnitt ab, so wird dieser wieder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wobei der frühere kleinere Abschnitt die Rolle des größeren Abschnitts übernimmt. Man kann so immer weiter fortfahren. Beweise die Behauptung.

* Wenn für 3 Größen a, b, c bzw. für 4 Größen a, b, c, d usw. zutrifft, dass $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = c : d$ usw. gilt, dann sagten ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) und auch EUKLID z. B. in Buch VIII seiner *Elemente*, es bestehe eine *συνεχὴς ἀναλογία* (synechés analogía), eine *zusammenhängende, fortlaufende, beständige Verhältnisgleichung*. Wörtlich übersetzte dies ins Lateinische BOETHIUS (um 480–524/5) mit *proportionalitas continua*, ins Deutsche der Bamberger Rechenmeister Wolffgang SCHMID 1539 in seinem *Das erst buch der Geometria* mit *ein stäte unzertrente auffeinander volgende proportz*. Der Augsburger Wilhelm HOLTZMANN (1532–1576), der seinen Namen zu XYLANDER gräzisierte, sprach 1562 in seiner Euklidübersetzung (Buch V, Definition 10) von einer *stetigen Proportion*.
Offensichtlich stehen nach EUKLIDS Definition 3 von Buch VI die ganze Strecke, der größere und der kleinere Abschnitt in stetiger Proportion zueinander. Es nimmt daher wunder, dass EUKLID für diese Teilung einer Strecke nicht den oben angegebenen Fachausdruck benützte; stattdessen sagt er, eine Strecke *ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν* (ákron kai méson lógon temeīn), was unter Umstellung der Adjektiva mit *media et extrema ratione secare* im Mittelalter latinisiert und mit *nach dem äußeren und mittleren Verhältnis schneiden* in die deutschen Lehrbücher des 18. Jh.s einging. Immerhin nennt XYLANDER die Strecke schon recht kurz *Proportzlich zertailt*. Erst Johann Friedrich LORENZ übersetzt 1781 EUKLIDS Wendung mit *nach stetiger Proportion geschnitten*. Wann daraus die Kurzform *stetig geteilt* wurde, konnten wir nicht ermitteln.
Man darf annehmen, dass bereits die PYTHAGOREER Kenntnis von dieser Teilung hatten, die ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Konstruktion der regulären Körper war. Luca PACIOLI (um 1445–1517) beschäftigte sich mit diesen Körpern und gab wegen der Wichtigkeit dieser Teilung seiner 1498 verfassten und 1509 gedruckten diesbezüglichen Schrift, für die sein Freund LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519) die Zeichnungen anfertigte, den Titel *Divina Proportione* – »Göttliches Verhältnis«. Dieser Titel mag zur späteren Mystifizierung beigetragen haben. PACIOLI selbst gibt fünf Gründe an, warum er dieses Verhältnis göttlich nennt. Einer davon ist, dass es sich genauso wenig durch rationale Größen ausdrücken läßt wie Gott durch Wörter. Ein anderer nimmt Bezug auf PLATON (438–348 v. Chr.), der in *Timaios* (55c) das Dodekaeder, das sich ja ohne dieses Verhältnis nicht konstruieren lässt, dem Äther, der quinta essentia, d. h. in christlicher Sicht der göttlichen Kraft zuordnet. Und wie PACIOLI sieht auch 1569 der französische Mathematiker, Humanist und Philosoph Petrus RAMUS (1515–1572) die bei dieser Teilung auftretenden 3 Teile als Sinnbild der Dreifaltigkeit, da sie eine »geeinte Dreiheit und eine dreiartige Einheit« bilden. Johannes KEPLER (1571–1630) spricht in einem Brief vom 12. 5. 1608 mit Hochachtung von dieser *proportio divina*. Er sieht darin eine Idee des Schöpfers, die er wegen der in Aufgabe **d** angesprochenen Eigenschaft selbst für ein Sinnbild des Ewigen hält. Die Teilung nennt er *sectio proportionalis*. Der Ausdruck *sectio divina*, d. h. göttlicher Schnitt, stammt nicht von ihm, wie oft behauptet wird. 1619 schreibt er jedoch in seiner *Harmonice mundi* – »Weltharmonik« –, dass »die heutigen [Mathematiker] sowohl den Schnitt wie auch die Proportion göttlich nennen wegen ihrer wunderbaren Natur und ihrer vielfältigen Besonderheiten«. KEPLER sagt uns aber nicht, wer diesen Ausdruck geprägt



um 1850

Dr Martin Ohm

Abb. 99.1 Martin OHM
(6.5.1792 Erlangen – 1.4.1872 Berlin)

27. Der Inder ARYABHATA I (um 476–? n. Chr.) stellt in Vers 25 des *Ganitapada* – »Abschnitt über die Rechenkunst« – seines Werks *Aryabhatiya* die folgende Aufgabe: Eine Summe A ist für einen Monat ausgeliehen und erbringt dabei den Zins x. Dieser wird anschließend zum gleichen Zinsfuß p für t Monate ausgeliehen. Der gesamte Zinsertrag hat den Wert B.

a) Wie groß ist der Zins x? Hinweis: Drücke p durch A und x aus.

b) Welchen Wert erhält man für x, wenn man die von einem späteren Kommentator hinzugefügten Werte $A = 100$, $t = 16$ und $B = 16$ einsetzt?

28. AL-CHARIZMI behandelt als Beispiele für die Gleichungstypen (B1) bis (B3) (siehe Seite 87) die folgenden Probleme:

a) *4. Problem:* Ich habe $\frac{1}{3}$ einer Sache, vermehrt um 1 Dirhem, mit $\frac{1}{4}$ der Sache, vermehrt um 1 Dirhem, multipliziert. Das Produkt ist 20 Dirhem. Wie groß ist die Sache?

b) *5. Problem:* Ich habe 10 in zwei Teile geteilt, dann jeden Teil mit sich multipliziert. Nachdem ich die entstandenen Produkte addiert hatte, ergaben sich 58 Dirhem. Wie groß sind die Teile?

c) *6. Problem:* Ich habe $\frac{1}{3}$ einer Sache mit $\frac{1}{4}$ der Sache multipliziert, das Produkt ist gleich der Sache und 24 Dirhem dazu. Wie groß ist die Sache?

29. Für die Normalform $x^2 + px + q = 0$ wird als Sonderfall von Satz 85.1 die Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ angegeben. Zeige, dass sie richtig ist.*

30. Aus dem *Bidscha-ganita* – »Samen der Rechenkunst« – des indischen Mathematikers und Astronomen BHASKARA II (1115–nach 1178):

hat. Ebenso offen bleibt diese Frage bei Christian VON WOLFF (1679–1754), der die Bildung *sectio divina* in seinen *Anfangsgründen Aller Mathematischen Wissenschaften* von 1710 (Band IV, Anmerkung 155) wie folgt erklärt: »Man pfleget es auch divinam sectionem zu nennen/weil (wie aus dem Euclide zu sehen) man viel aus dieser Section demonstriret hat.« Im 18. Jh. ist *sectio divina* dann zum stehenden Fachausdruck geworden. 1835 schreibt schließlich Martin OHM (1792–1872) in der 2. Auflage seiner *Die reine Elementar-Mathematik* recht vage: »Diese Zerteilung [...] nennt man wohl auch den goldenen Schnitt.« Wer ist »man«? Vielleicht vermischten sich bei OHM *sectio divina* mit *regula aurea*, wie die Regel vom Dreisatz früher genannt wurde. Aber schon 1839 findet sich in Johann Friedrich KROLLS *Grundriß der Mathematik für Gymnasien* die Latinisierung »sectio divina oder aurea«. Von da ab ist diese Wortschöpfung nicht mehr aufzuhalten.
Die Vorstellung, dass der goldene Schnitt ein in der ganzen Natur waltendes Ordnungsprinzip sei, demzufolge zwei in einem derartigen Verhältnis stehende Teile ein besonders wohlgefälliges Ganzes ergäben, setzte erst 1854 Adolf ZEISING (24.9.1810 Ballenstedt–27.4.1876 München), ein anhaltischer Gymnasialprofessor, in die Welt, und zwar in seinem Werk *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, aus einem bisher unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt*. Es gibt nämlich in der gesamten Antike bis herauf ins 19. Jh. keine einzige Quelle, die der stetigen Teilung irgendeine ästhetische Bedeutung zuerkennen würde.

* Da AL-CHARIZMI immer $A = 1$ setzte, kannst du mit Hilfe dieser Formel die Lösungsformeln angeben, die er – natürlich in Worten – für die drei Gleichungstypen (B1) bis (B3) aufstellte, ebenso seine Bedingung dafür, dass (B2) genau eine bzw. keine Lösung hat.

a) § 139: Der achte Teil einer Herde Affen, quadriert, sprang lustig in einem Walde herum, die 12 restlichen waren auf einem Hügel zu sehen, wo sie vergnügt schnatterten. Wie viele waren es im Ganzen?

b) § 140: Der fünfte Teil einer Herde weniger drei, quadriert, ging in eine Höhle; ein Affe war noch zu sehen. Wie viele waren es? – Warum verwirft Bhāskara II eine Lösung?

31. Aus Kapitel V der *Ars magna* (1545) des Geronimo Cardano (1501 bis 1576):

a) *Aufgabe II:* Es waren einmal zwei Heerführer, von denen jeder 48 Dukaten an seine Soldaten austeilte. Einer hatte 2 Soldaten mehr als der andere. Der, der weniger Soldaten hatte, gab jedem seiner Soldaten 4 Dukaten mehr, als der andere seinen Soldaten gab. Wie viele Soldaten hatte jeder?

b) *Aufgabe III:* Zwei Vereine, von denen einer 3 Mitglieder mehr als der andere hatte, verteilten gleich viele Goldstücke an ihre Mitglieder, nämlich 93 und dazu noch so viele, wie beide Vereine Mitglieder hatten. Auf jedes Mitglied des kleineren Vereins entfielen 6 Goldstücke mehr als auf jedes Mitglied des größeren Vereins. Wie viele Mitglieder hatte jeder Verein?

Die Aufgaben 32 bis 39 stammen aus der *Vollständigen Anleitung zur Algebra* von Leonhard Euler (1707 bis 1783) aus dem Jahre 1770.*

32. Ich habe zwei Zahlen, die eine ist um 6 größer als die andere, und ihr Produkt macht 91. Welches sind diese Zahlen?

33. Suche eine Zahl, dass, wenn ich von ihrem Quadrat 9 subtrahiere, so viel über 100 bleiben, als die gesuchte Zahl weniger ist als 23; welche Zahl ist es?

34. Suche zwei Zahlen, von denen eine doppelt so groß ist als die andere, die so beschaffen sind, dass, wenn ich ihre Summe zu ihrem Produkt addiere, 90 herauskommt.

1780

Abb. 101.1 Leonhard Euler (15.4.1707 Basel–18.9.1783 St. Petersburg) – Kupferstich von Samuel Gottlob Kütner (1747–1828) nach dem Gemälde von Joseph Friedrich August Darbes (1747–1810)

* Aufgaben I, II, IV, V, VII–X aus 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 6. – Siehe auch Seite 78.

35. Jemand kauft ein Pferd für einige Reichstaler, verkauft es wieder für 119 Reichstaler und gewinnt daran so viel Prozent, wie das Pferd gekostet hat. Nun ist die Frage, wie teuer dasselbe eingekauft worden ist.

36. Jemand kauft einige Tücher für 180 Reichstaler. Wären der Tücher für dasselbe Geld 3 Stück mehr gewesen, so wäre ihm das Stück um 3 Reichstaler wohlfeiler gekommen. Wie viel Tücher sind es gewesen?

37. Zwei Gesellschafter legen in ihr Geschäft zusammen 100 Reichstaler ein. Der erste lässt sein Geld 3 Monate lang, der zweite aber 2 Monate lang stehen, und es zieht jeder mit Kapital und Gewinn 99 Reichstaler ein. Wie viel hat jeder eingelegt?

38. Zwei Bäuerinnen tragen zusammen 100 Eier auf den Markt, die eine mehr als die andere, und lösen doch beide gleich viel Geld. Nun sagt die erste zu der andern: »Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer* gelöst.« Darauf antwortete die andere: »Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöst.« Wie viele hat jede gehabt?

39. Zwei Schnittwarenhändler verkaufen etliche Ellen Zeug**, der zweite 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Reichstaler. Der erste sagt zum zweiten: »Aus deinem Zeuge würde ich gelöst haben 24 Reichstaler«, und es antwortet der zweite: »Ich aber hätte aus deinem $12\frac{1}{2}$ Reichstaler gelöst.« Wie viele Ellen hat jeder gehabt?

3.5 Der Satz von VIETA

Wendet man für $D > 0$ die Lösungsformel von Satz 85.1 auf $x^2 + px + q = 0$ an, dann ergibt sich

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Addiert man bzw. multipliziert man diese Lösungen, dann gibt es eine Überraschung:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q} - p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p - \sqrt{p^2 - 4q})(-p + \sqrt{p^2 - 4q})}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{2} = \frac{4q}{4} = q.$$

* Ursprünglich eine ab 1271 in Tirol geprägte Silbermünze mit einem charakteristischen Doppelkreuz, ab dem 17./18. Jh. auch als Kupfermünze weit verbreitet, 1871 aus dem Verkehr gezogen.

** Zeug, aus dem althochdeutschen giziugi, bedeutet Stoff. Elle, altes Längenmaß, in Bayern 58,4 cm, in Russland 71 cm.