UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3. 5 Der Satz von Vieta

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

Visual Library

35. Jemand kauft ein Pferd für einige Reichstaler, verkauft es wieder für 119 Reichstaler und gewinnt daran so viel Prozent, wie das Pferd gekostet hat. Nun ist die Frage, wie teuer dasselbe eingekauft worden ist.

36. Jemand kauft einige Tücher für 180 Reichstaler. Wären der Tücher für dasselbe Geld 3 Stück mehr gewesen, so wäre ihm das Stück um 3 Reichstaler wohlfeiler gekommen. Wie viel Tücher sind es gewesen?

37. Zwei Gesellschafter legen in ihr Geschäft zusammen 100 Reichstaler ein. Der erste lässt sein Geld 3 Monate lang, der zweite aber 2 Monate lang stehen, und es zieht jeder mit Kapital und Gewinn 99 Reichstaler ein. Wie viel hat jeder eingelegt?

38. Zwei Bäuerinnen tragen zusammen 100 Eier auf den Markt, die eine mehr als die andere, und lösen doch beide gleich viel Geld. Nun sagt die erste zu der andern: »Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer* gelöst.« Darauf antwortete die andere: »Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöst.« Wie viele hat jede gehabt?

39. Zwei Schnittwarenhändler verkaufen etliche Ellen Zeug**, der zweite 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Reichstaler. Der erste sagt zum zweiten: »Aus deinem Zeuge würde ich gelöst haben 24 Reichstaler«, und es antwortet der zweite: »Ich aber hätte aus deinem $12\frac{1}{2}$ Reichstaler gelöst.« Wie viele Ellen hat jeder gehabt?

3.5 Der Satz von VIETA

Wendet man für $D > 0$ die Lösungsformel von Satz 85.1 auf $x^2 + px + q = 0$ an, dann ergibt sich

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Addiert man bzw. multipliziert man diese Lösungen, dann gibt es eine Überraschung:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q} - p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p - \sqrt{p^2 - 4q})(-p + \sqrt{p^2 - 4q})}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{2} = \frac{4q}{4} = q.$$

* Ursprünglich eine ab 1271 in Tirol geprägte Silbermünze mit einem charakteristischen Doppelkreuz, ab dem 17./18. Jh. auch als Kupfermünze weit verbreitet, 1871 aus dem Verkehr gezogen.

** Zeug, aus dem althochdeutschen giziugi, bedeutet Stoff. Elle, altes Längenmaß, in Bayern 58,4 cm, in Russland 71 cm.

Ist $D = 0$, dann hat nach Satz 85.1 die einzige Lösung den Wert $-\frac{1}{2}p$. Diesen Wert erhält man aber auch formal sowohl für x_1 wie auch für x_2, wenn man in $x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$ für D null setzt. Wegen dieses formal doppelten Auftretens von $-\frac{1}{2}p$ spricht man auch von einer **Doppellösung** der quadratischen Gleichung. Mit $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}p$ ergibt sich auch hier

$$x_1 + x_2 = (-\tfrac{1}{2}p) + (-\tfrac{1}{2}p) = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = (-\tfrac{1}{2}p)(-\tfrac{1}{2}p) = \tfrac{1}{4}p^2 = q \text{ wegen } D = p^2 - 4q = 0.$$

Damit haben wir für $D \geqq 0$ einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer in Normalform geschriebenen quadratischen Gleichung und ihren Lösungen gefunden. Wir merken uns:

Satz 103.1: Sind x_1 und x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$, dann gilt
$x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Bemerkung: Für die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2 gilt dann:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Von François VIÈTE (1540–1603) stammt die 1615 postum veröffentlichte* Umkehrung dieses Satzes:

Satz 103.2: Gelten für die Zahlen p, q, x_1 und x_2 die Beziehungen $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 \cdot x_2$, dann hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Zahlen x_1 und x_2 als Lösungen.

* Der Bedeutung des Satzes wegen und um dir den Stil VIÈTES zu zeigen, bringen wir den Originaltext mit einer Übersetzung und einer modernen Umschrift. Auf Seite 71 findest du ein Faksimile des Originals.

Text VIÈTES	Übersetzung	moderne Umschrift
Propositio I.	Satz I.	Satz I.
Si $B + D$ in $A - A$ quad. aequetur B in D. A explicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D.	Wenn $(B + D) \cdot A - A^2 = B \cdot D$ ist, dann kann A jedes der beiden B oder D sein.	Wenn $(B + D) \cdot x - x^2 = B \cdot D$, d. h., wenn $x^2 - (B + D) \cdot x + B \cdot D = 0$ ist, dann gilt $x = B \vee x = D$.
[Beispiel] 3N.–1Q. *aequetur* 2. *fit* 1N 1. *vel* 2.	3N–1Q = 2 bewirkt 1N 1 oder 2.	$3x - x^2 = 2$, d. h., $x^2 - 3x + 2 = 0$ hat zur Folge $x = 1 \vee x = 2$.

UNIVERSITÄTS-BIBLIOTHEK PADERBORN

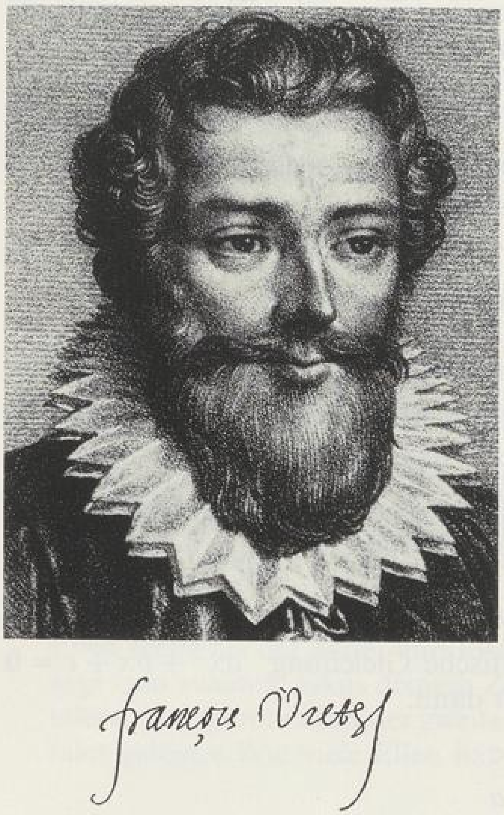
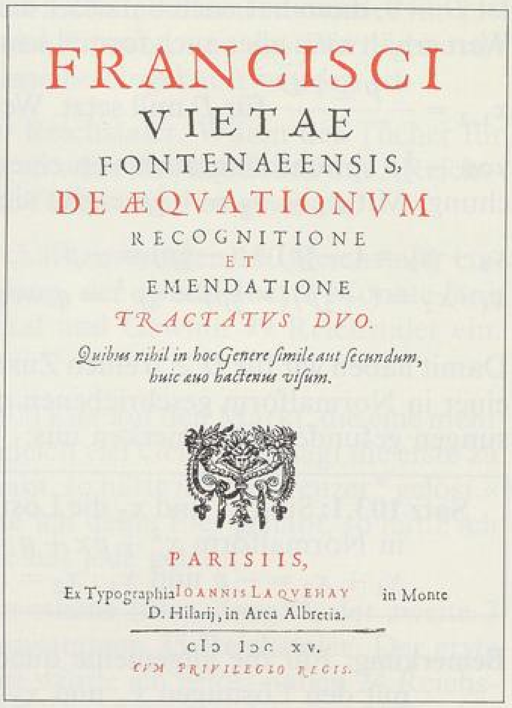


Abb. 104.1 François VIÈTE, latinisiert zu VIETA (1540 Fontenay-le-Comte/Vendée–1603 Paris)



FRANCISCI
VIETAE
FONTENAEENSIS,
DE ÆQVATIONVM
RECOGNITIONE
ET
EMENDATIONE
TRACTATVS DVO.
Quibus nihil in hoc Genere simile aut secundum, huic auo hactenus visum.

PARISIIS,
Ex Typographia IOANNIS LAQVEHAY in Monte D. Hilarij, in Area Albretia.
clↄ Iↄc xv.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Abb. 104.2 Titelblatt der »Zwei Abhandlungen des François VIÈTE aus Fontenay über die Prüfung und Vervollkommnung von Gleichungen, worüber nichts in dieser Art Ähnliches oder Besseres diesem von Ewigkeit her bis jetzt zu Gesicht gekommen.«

Beweis: Setzt man $x_2 = -x_1 - p$ in $x_1 x_2 = q$ ein, so erhält man
$x_1(-x_1 - p) = q \Leftrightarrow -x_1^2 - px_1 = q \Leftrightarrow x_1^2 + px_1 + q = 0;$
d.h. aber, dass x_1 Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist. Ebenso weist man nach, dass x_2 diese Gleichung löst.

Bemerkung 1: Mit Hilfe dieses Satzes kann man zu zwei gegebenen Zahlen x_1 und x_2 sofort eine quadratische Gleichung in Normalform angeben, die genau diese beiden Zahlen als Lösungen hat, nämlich $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.
Bemerkung 2: Die Methode, Lösungen einer quadratischen Gleichung in Normalform mit ganzzahligen Koeffizienten durch Probieren zu finden, lässt sich mit den Beziehungen von VIÈTE vereinfachen. Als ganzzahlige Lösungen kommen wegen $x_1 \cdot x_2 = q$ nur Teiler des konstanten Glieds q in Frage.

Auf Grund des einfachen Beweises von Satz 103.2 erscheint VIÈTES Erkenntnis als nicht sehr tief schürfend. Dem muss entgegengehalten werden, dass VIÈTE einen analogen Sachverhalt auch für Gleichungen höheren Grades entdeckt hat, sodass unser Satz 103.2 nur ein Sonderfall eines allgemeineren Satzes ist. Zu Ehren VIÈTES werden daher die beiden letzten Sätze zusammengefasst zum

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Satz 105.1: Satz von VIETA.
Bei einer quadratischen Gleichung in Normalform mit $D \geqq 0$ gilt: Die Summe der beiden Lösungen ist die Gegenzahl des Koeffizienten des linearen Glieds, und das Produkt der beiden Lösungen ist das konstante Glied.
Umgekehrt gilt:
Nimmt man die Gegenzahl der Summe zweier Zahlen als Koeffizienten des linearen Glieds und das Produkt dieser Zahlen als konstantes Glied einer quadratischen Gleichung in Normalform, dann sind diese Zahlen die Lösungen dieser Gleichung.

Beispiele:

1) Wie lautet eine quadratische Gleichung, deren Lösungen -3 und 5 sind?
Nach VIETA ergeben sich die Koeffizienten der Normalform zu $p = -(-3+5) = -2$ und $q = (-3) \cdot 5 = -15$. Die zugehörige Gleichung lautet also $x^2 - 2x - 15 = 0$.

2) Wie lautet eine quadratische Gleichung, deren Lösungen $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ sind?
Nach VIETA ergeben sich die Koeffizienten der Normalform zu

$$p = -\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) = -1 \quad \text{und}$$

$$q = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{5}{4} = -1.$$

Die zugehörige Gleichung lautet also $x^2 - x - 1 = 0$.

3) Mit Hilfe des Satzes von VIETA sollen die Lösungen der Gleichung $x^2 - 18x + 17 = 0$ erraten werden.
Nach VIETA muss das Produkt der beiden Lösungen 17 sein. Falls es ganzzahlige Lösungen gibt, kommen nur $x_1 = -1$ und $x_2 = -17$ oder $x_1 = 1$ und $x_2 = 17$ in Frage. Die Summe der beiden Lösungen ergibt dann -18 bzw. 18. Nun ist die Gegenzahl des Koeffizienten des linearen Glieds 18, also gleich dem Wert der zweiten Summe. Somit besitzt die Gleichung $x^2 - 18x + 17 = 0$ die ganzzahligen Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 17$.

4) Mit Hilfe des Satzes von VIETA sollen die Lösungen der Gleichung $3x^2 + 3x - 18 = 0$ erraten werden.
Um den Satz von VIETA anwenden zu können benötigen wir die Normalform der gegebenen Gleichung. Wir dividieren durch 3 und erhalten $x^2 + x - 6 = 0$. Das Produkt der beiden Lösungen muss also -6 sein. Dafür gibt es nur die folgenden ganzzahligen Möglichkeiten:

$$(-1) \cdot 6, \quad 1 \cdot (-6), \quad (-2) \cdot 3 \quad \text{und} \quad 2 \cdot (-3).$$

Die entsprechenden Summen sind 5, -5, 1 und -1.
Weil die Gegenzahl des Koeffizienten des linearen Gliedes -1 ist, sind $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$ die Lösungen der Gleichung $3x^2 + 3x - 18 = 0$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Eine einfache Folgerung des Satzes von VIETA ist

Satz 106.2: Der Faktorisierungssatz.
Sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, dann gilt

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Bemerkung: Weil $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ linear sind, sagt man auch, der quadratische Term $ax^2 + bx + c$ ist in **Linearfaktoren** zerlegt.

Beweis: Nach VIETA gilt: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ und $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, also ist

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2 =$$
$$= ax^2 - a\left(-\frac{b}{a}\right)x + a \cdot \frac{c}{a} = ax^2 + bx + c.$$

Für eine Doppellösung x_0 gilt

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0) = a(x - x_0)^2.$$

Der Faktor $(x - x_0)$ tritt also doppelt auf, was erneut die Bezeichnung Doppellösung rechtfertigt.

Beispiele:

1) Der Term $3x^2 + 5x - 2$ soll in Linearfaktoren zerlegt werden. Dazu lösen wir die zugehörige quadratische Gleichung $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Ihre Diskriminante ergibt sich zu $D = 25 + 24 = 49$. Somit ist $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{6}$, d.h. $x_1 = -2$ und $x_2 = \frac{1}{3}$. Nach dem Faktorisierungssatz erhält man also

$$3x^2 + 5x - 2 = 3(x + 2)(x - \tfrac{1}{3}) = (x + 2)(3x - 1).$$

2) Der Term $\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3}$ soll in Linearfaktoren zerlegt werden. Dazu lösen wir die zugehörige quadratische Gleichung $\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} = 0$. Ihre Diskriminante ergibt sich zu $D = 36 - 36 = 0$.

Das ergibt die Doppellösung $x_0 = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Nach dem Faktorisierungssatz erhält man also

$$\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})^2.$$

Aufgaben

1. Wie lautet die Normalform einer quadratischen Gleichung mit folgenden Lösungen?
   a) $x_1 = -2;\ x_2 = 3$ **b)** $x_1 = 0;\ x_2 = 5$
   c) $x_1 = -8;\ x_2 = -1$ **d)** $x_1 = -3;\ x_2 = -3$
   e) $x_1 = 1;\ x_2 = 2{,}5$ **f)** $x_1 = -3{,}1;\ x_2 = 7$
   g) $x_1 = -4{,}3;\ x_2 = -4{,}2$ **h)** $x_1 = -\frac{1}{7};\ x_2 = \frac{2}{7}$
   i) $x_1 = \frac{5}{6};\ x_2 = \frac{5}{3}$

2. Welche quadratische Gleichung in Normalform hat folgende Lösungen?
   a) $x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = 4$ **b)** $x_1 = 1{,}5;\ x_2 = 2\sqrt{3}$
   c) $x_1 = -2{,}3;\ x_2 = 1 + \sqrt{7}$ **d)** $x_1 = 2 - \sqrt{2};\ x_2 = 1 + \sqrt{2}$
   e) $x_1 = 3 + \sqrt{5};\ x_2 = \sqrt{3} + 5$ **f)** $x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2};\ x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

3. Bestimme den fehlenden Koeffizienten und die zweite Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, wenn gegeben ist:
   a) $p = 3;\ x_1 = 2$ **b)** $p = -5;\ x_1 = 5$ **c)** $p = 2{,}5;\ x_1 = -4$
   d) $p = 9;\ x_1 = -4{,}5$ **e)** $p = 0;\ x_1 = 2{,}37$ **f)** $q = 6;\ x_1 = 4$
   g) $q = 3{,}5;\ x_1 = -7$ **h)** $q = 6{,}25;\ x_1 = -2{,}5$ **i)** $q = 0;\ x_1 = 17$

4. Berechne mit Hilfe der gegebenen Lösung den unbekannten Koeffizienten und die zweite Lösung der Gleichung.
   a) $2x^2 - 4x + c = 0;\ x_1 = 1$ **b)** $5x^2 + 4x + c = 0;\ x_1 = 0{,}2$
   c) $0{,}1x^2 - x + c = 0;\ x_1 = -7$ **d)** $3x^2 + bx + 6 = 0;\ x_1 = 2$
   e) $12x^2 + bx - 27 = 0;\ x_1 = 1{,}5$ **f)** $\frac{1}{7}x^2 + bx - \frac{1}{2} = 0;\ x_1 = -\frac{3}{2}$
   g) $ax^2 + 7x - 14 = 0;\ x_1 = -2$ **h)** $ax^2 - 1{,}8x - 0{,}12 = 0;\ x_1 = -0{,}6$

5. Bestimme zu dem gegebenen Koeffizienten der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ die beiden fehlenden so, dass die vorgeschriebenen Lösungen auftreten.
   a) $a = 2;\ x_1 = -2;\ x_2 = 5$ **b)** $a = \frac{3}{2};\ x_1 = -7;\ x_2 = -4$
   c) $b = 3;\ x_1 = -4;\ x_2 = 5$ **d)** $b = 31;\ x_1 = 1{,}7;\ x_2 = 4{,}5$
   e) $c = 2;\ x_1 = -2;\ x_2 = 2$ **f)** $c = -8;\ x_1 = -2{,}8;\ x_2 = \frac{4}{7}$

6. Versuche mit Hilfe des Satzes von VIETA, die Lösungen der Gleichung zu erraten.
   a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 15 = 0$ **c)** $x^2 - 2x - 15 = 0$
   d) $x^2 + 8x + 15 = 0$ **e)** $x^2 + 10x - 11 = 0$ **f)** $x^2 - 9x + 14 = 0$
   g) $2x^2 + 26x + 44 = 0$ **h)** $\frac{1}{2}x^2 - x - 12 = 0$ **i)** $\frac{1}{4}x^2 + 3x - 16 = 0$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

7. Zerlege die folgenden Polynome zweiten Grades in Linearfaktoren.

a) x^2-4 **b)** x^2-3x+2 **c)** $x^2-3x-40$
d) $x^2+3{,}5x-15$ **e)** $x^2-16{,}7x+67$ **f)** x^2-2x-6
g) $5x^2-12x-81$ **h)** $30x^2+73x+33$ **i)** $25x^2-10\sqrt{11}x+3$

8. Bestimme zwei Zahlen mit der Summe u und dem Produkt v.

a) $u=3;\ v=-18$ **b)** $u=-6;\ v=5$ **c)** $u=14;\ v=49$
d) $u=13{,}4;\ v=-24$ **e)** $u=8;\ v=15{,}75$ **f)** $u=6;\ v=6$

9. Gib, ohne die Lösungen selbst zu berechnen, folgende Mittelwerte an:

a) das arithmetische Mittel der Lösungen von $2x^2+13x-143=0$;
b) das geometrische Mittel der Lösungen von $8x^2-29x+18=0$;
c) das harmonische Mittel der Lösungen von $9x^2-24x+10=0$;
d) das arithmetische Mittel der Lösungen von $x^2+x+1=0$ (!).

10. Berechne das arithmetische Mittel*

a) aus den Lösungen der Gleichung $x^2+9x+0{,}91=0$ und der Zahl 12;
b) aus den Lösungen der Gleichung $6x^2-45x+53=0$ und den Zahlen $\frac{4}{3}$, 5 und $\frac{7}{6}$;
c) aus den Lösungen der Gleichungen $x^2-7x-13=0$ und $3x^2+x-7=0$.

11. Bestimme k so, dass das arithmetische Mittel*

a) aus 7 und den Lösungen der Gleichung $10x^2+kx+10=0$ den Wert 3 hat;
b) aus der kleinsten und der größten zweistelligen Zahl und den Lösungen der Gleichung $kx^2-2{,}75x-1{,}5=0$ gleich 30 ist;
c) aus den Lösungen der Gleichungen $kx^2-63x+104=0$ und $3x^2-kx-30=0$ den Wert 2,5 hat.

•12. a) Kann man in der Gleichung $x^2+bx+9=0$ den Koeffizienten b so wählen, dass zwei Lösungen mit vorgeschriebenem arithmetischem Mittelwert m vorhanden sind? Gib die Menge aller Mittelwerte an, für welche die Aufgabe lösbar ist.
b) Wie ist die in **a** gestellte Frage bei der Gleichung $x^2+bx-9=0$ zu beantworten?

13. Welcher quadratischen Gleichung in Normalform genügen die beiden Zahlen, deren arithmetisches Mittel 4,5 und deren harmonisches Mittel 4 ist? Um welche Zahlen handelt es sich?

14. Berechne mit Hilfe einer quadratischen Gleichung die beiden Zahlen, deren arithmetisches Mittel 10,5 und deren geometrisches Mittel $6\sqrt{3}$ ist.

* Das arithmetische Mittel von n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist definiert zu $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

15. Berechne die unbekannten Koeffizienten, wenn gelten soll:

a) Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 5x + q = 0$ sollen sich um 3 unterscheiden.

b) Die Lösungen von $x^2 + px + 96 = 0$ sollen sich wie $2:3$ verhalten.

c) Die Lösungen von $0{,}2x^2 + bx + 3 = 0$ sollen auch die Gleichung $x_1 + 2x_2 = 11$ erfüllen.

16. Bestimme diejenige quadratische Gleichung in Normalform, deren Lösungen folgende Bedingungen erfüllen:

a) $x_1 + x_2 = 17$ und $x_2 - x_1 = 8$

b) $x_1 + x_2 = 24$ und $x_2 : x_1 = 5:3$

c) $x_2 - x_1 = 2$ und $x_1 : x_2 = 2:3$

17. Welche Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ erfüllt die Bedingung

a) $p = 2q$ und hat als eine Lösung -1;

b) $2p = q$ und hat als eine Lösung 2;

c) $3p = 2q - 5$ und hat als eine Lösung 1?

18. Wie lautet diejenige quadratische Gleichung in Normalform, deren Lösungen

a) die Kehrwerte der Lösungen von $6x^2 + x - 2 = 0$ sind,

b) die Quadrate der Lösungen von $2x^2 - 7x - 30 = 0$ sind,

c) jeweils um 4 größer sind als das Sechsfache der entsprechenden Lösungen von $3x^2 - 4x - 15 = 0$?

19. a) Was für eine Beziehung besteht zwischen den Lösungen einer Gleichung der Form $x^2 + px + 1 = 0$?

b) Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind reziprok zueinander. Was kann man über die Koeffizienten a und c dieser Gleichung sagen?

•**20.** Bestimme zur Gleichung $x^2 + 5x + 2 = 0$ ohne Berechnung der Lösungen eine zweite quadratische Gleichung $y^2 + py + q = 0$ so, dass zwischen entsprechenden Lösungen der beiden Gleichungen folgender Zusammenhang besteht:

a) $y = x - 1$ **b)** $y = x^2 + 3$ **c)** $y = x^3 - 1$

d) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **e)** $y = \dfrac{x}{x+1}$ •**f)** $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$

21. Bestimme bei den folgenden Gleichungen k so, dass zwei Lösungen vorhanden sind, die das angegebene Verhältnis besitzen.

a) $x^2 + 14x + k = 0, \quad 3:4$ **b)** $kx^2 - 6x - 21 = 0, \quad 7:(-5)$

c) $x^2 + kx + 18 = 0, \quad 2:1$ **d)** $x^2 + kx + 45k = 0, \quad (-2):3$

22. Wie lautet die Normalform einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die folgende irrationale Lösung hat? Beachte Aufgabe 97/**22a**.

a) $\sqrt{2}$ **b)** $1-\sqrt{3}$ **c)** $3{,}5+\sqrt{17}$ **d)** $-3-2\sqrt{5}$

e) $0{,}6-\sqrt{0{,}7}$ **f)** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$ **•g)** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ **•h)** $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$

23. Bestimme in den folgenden Gleichungen den rationalen Koeffizienten k so, dass eine Lösung der angegebenen Art existiert (r sei eine rationale Zahl). Beachte Aufgabe 97/**22a**.

a) $x^2+6x+k=0;\ r+\sqrt{7}$ **b)** $x^2-22x+k=0;\ r-4\sqrt{11}$

c) $x^2+kx-16=0;\ r+2\sqrt{5}$ **d)** $x^2+kx-0{,}25=0;\ r+\sqrt{0{,}5}$

e) $kx^2-10x-10=0;\ r-\sqrt{3}$ **f)** $kx^2+16x+120=0;\ r+6\sqrt{6}$

24. Eine quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten habe als eine Lösung $5-3\sqrt{2}$. Bestimme unter Beachtung von Aufgabe 97/**22a** eine Gleichung $y^2+py+q=0$, für deren Lösungen gilt:

a) $y_1=x_1+x_2$ und $y_2=x_1\cdot x_2$

b) $y_1=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ und $y_2=x_1^2+x_2^2$

:25. Das **Anlegen von Flächen** – Παραβαλεῖν τῶν χωρίων (parabaleīn tōn chorion) – geht auf die PYTHAGOREER zurück. Im Wesentlichen handelt es sich darum, die beiden Seiten eines Rechtecks zu bestimmen, dessen Flächeninhalt einer bestimmten Forderung unterworfen wird. Die Grundaufgabe behandelt EUKLID (um 300 v. Chr.) im 1. Buch der *Elemente* als Satz 44. Sie besteht darin, an eine gegebene Strecke b ein Rechteck so anzulegen, dass sein Flächeninhalt einem vorgegebenen Wert c gleich wird. Sie heißt daher Anlegen mit *Gleichheit* (παραβολή [parabolē], lateinisch *aequalitas*, zu Deutsch *Parabel*) und führt auf die Gleichung $bx=c$, die sich leicht durch Flächenverwandlung geometrisch lösen lässt, wie du im Geometrieunterricht lernst; dabei denkt man sich c durch die Fläche eines Quadrats dargestellt.*
Weitaus schwieriger hingegen sind die folgenden beiden Aufgaben, die EUKLID im 6. Buch als Satz 28 und 29 behandelt.** Mit diesen beiden Sätzen konnte man dann auf geometrische Weise die quadratischen Gleichungen vom Typ (B1) bis (B3) (siehe Seite 87) lösen.

a) Anlegen mit *Fehlen* (ἔλλειψις [élleipsis], lateinisch *defectus*, zu Deutsch *Ellipse*; Abbildung 111.1): An eine gegebene Strecke b ist ein Rechteck gegebenen Flächeninhalts c so anzulegen, dass ein Quadrat

* Mehr darüber noch im Abschnitt **5.2**.
** EUKLID löst die Aufgabe weitaus allgemeiner; er spricht nur von Parallelogrammen.

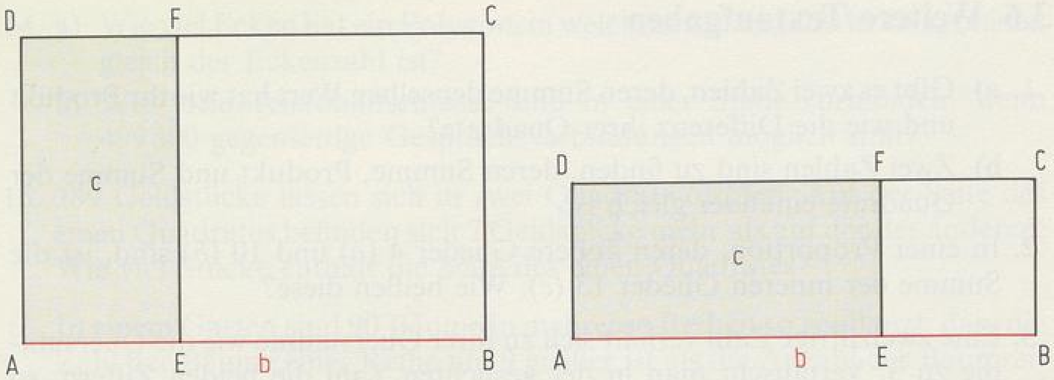


Abb. 111.1 Flächenanlegung eines Rechtecks AEFD mit Inhalt c an [AB] mit Fehlen: Das Quadrat EBCF fehlt zum Rechteck ABCD.

zum Rechteck gleicher Breite über ganz b fehlt. Zeige, dass die einer Rechtecksseite gleiche Quadratseite und die andere Rechtecksseite die Lösungen einer Gleichung vom Typ (B2) sind.

b) Konstruiere die Quadratseite, für die es nach Abbildung 111.1 zwei Möglichkeiten gibt. Wähle $b = 10\,\text{cm}$ und $c = 11\,\text{cm}^2$.

c) Anlegen mit *Überschuss* (ὑπερβολή [hyperbolē], lateinisch *excessus*, zu Deutsch *Hyperbel*; Abbildung 111.2): An eine gegebene Strecke b ist ein Rechteck gegebenen Flächeninhalts c so anzulegen, dass als überschießendes Stück ein Quadrat entsteht. Zeige, dass

1) die einer Rechtecksseite gleiche Quadratseite und die negativ genommene andere Rechtecksseite die Lösungen einer quadratischen Gleichung vom Typ (B1) sind;

2) eine Rechtecksseite und die negativ genommene Quadratseite, die der anderen Rechtecksseite gleich ist, die Lösungen einer Gleichung vom Typ (B3) sind.

d) Konstruiere für $b = 10\,\text{cm}$ und $c = 11\,\text{cm}^2$

1) die Quadratseite gemäß **c 1**,

2) die Rechtecksseite gemäß **c 2**.

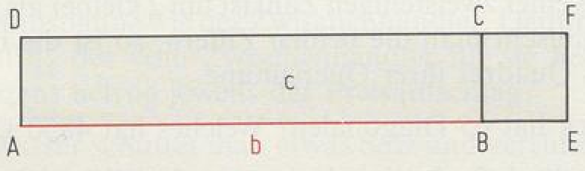


Abb. 111.2 Flächenanlegung eines Rechtecks AEFD mit Inhalt c an [AB] mit Überschuss: Das Quadrat BEFC schießt über das Rechteck ABCD hinaus.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN