Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3.7 Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

3.7 Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Es gibt Gleichungen, die sich durch geeignete Umformungen auf quadratische zurückführen lassen. Einige der wichtigsten Typen wollen wir im Folgenden betrachten.

3.7.1 Wurzelgleichungen

Wie in **2.5** gezeigt, kann man Wurzelgleichungen durch das Verfahren »Isolieren – Quadrieren« lösen. In der Definitionsmenge der Wurzelgleichung ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, wenn beide Seiten gleiches Vorzeichen haben; andernfalls muss man die Probe machen, weil womöglich die Lösungsmenge vergrößert wurde. Kennt man die Definitionsmenge nicht, dann muss man die Probe auf alle Fälle machen.

Beispiel 1:

$5\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2x+5} = \sqrt{3x-5}; \qquad D = [\tfrac{5}{3}; +\infty[$

$\Rightarrow\ 25(x-1) + 4(2x+5) - 20\sqrt{(x-1)(2x+5)} = 3x-5$

$-20\sqrt{2x^2+3x-5} = -30x$

$2\sqrt{2x^2+3x-5} = 3x.$ Wir erkennen, x kann nicht negativ sein.

$4(2x^2+3x-5) = 9x^2$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$x_1 = 10;\ x_2 = 2$

Probe:

$x_1 = 10$:

$$\left.\begin{aligned} \text{LS} &= 5\sqrt{10-1} - 2\sqrt{2\cdot 10+5} = 5\cdot 3 - 2\cdot 5 = 5 \\ \text{RS} &= \sqrt{3\cdot 10 - 5} = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ 10 ist Lösung.}$$

$x_2 = 2$:

$$\left.\begin{aligned} \text{LS} &= 5\sqrt{2-1} - 2\sqrt{2\cdot 2+5} = 5\cdot 1 - 2\cdot 3 = -1 \\ \text{RS} &= \sqrt{3\cdot 2 - 5} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ 2 ist keine Lösung.}$$

Lösungsmenge $L = \{10\}$

Beispiel 2:

Aufgabe IX aus Kapitel V der *Ars Magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):
Zerlege die Zahl 10 so in zwei Teile, dass der größere, vermindert um das Doppelte seiner Wurzel, gleich ist dem kleineren, vermehrt um das Doppelte seiner Wurzel.

Bezeichnen wir den größeren Teil mit x, dann muss gelten:

$$x - 2\sqrt{x} = (10 - x) + 2\sqrt{10 - x}; \quad D = [0; 10]$$

$$\sqrt{10 - x} = (x - 5) - \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 10 - x = (x - 5)^2 - 2(x - 5)\sqrt{x} + x$$

$$2(x - 5)\sqrt{x} = (x - 5)^2 + 2x - 10$$

$$(x - 5)(2\sqrt{x} - (x - 5) - 2) = 0$$

$$(x - 5)(2\sqrt{x} - x + 3) = 0$$

$\underline{x = 5} \vee 2\sqrt{x} = x - 3$. Für $x \geqq 3$ gilt weiter:

$$4x = x^2 - 6x + 9$$
$$x^2 - 10x + 9 = 0$$
$$(x - 9)(x - 1) = 0$$
$$\underline{x = 9}$$

Beachte: $x - 1$ kann nicht null werden, da $x \geqq 3$ gilt.

Probe:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 5\text{: LS} = 5 - 2\sqrt{5} \\ \qquad\quad\ \text{RS} = (10 - 5) + 2\sqrt{10 - 5} = 5 + 2\sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{5 ist keine Lösung.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 9\text{: LS} = 9 - 2\sqrt{9} = 9 - 6 = 3 \\ \qquad\quad\ \text{RS} = (10 - 9) + 2\sqrt{10 - 9} = 1 + 2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{9 ist Lösung.}$$

Die gesuchte Zerlegung lautet also: $10 = 9 + 1$.

Beispiel 3:

$\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x} = 2\sqrt{a - b}$; $D = [0; a]$ für $a \geqq 0$; für $a < 0$ ist die Gleichung unsinnig. Wegen $a - b \geqq 0$ muss $b \leqq a$ sein. Für $x \in D$ sind beide Seiten nicht negativ und wir ändern die Lösungsmenge beim Quadrieren nicht:

$$a + x + a - x - 2\sqrt{a^2 - x^2} = 4(a - b)$$

$$2b - a = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Für $a > 2b$ gibt es keine Lösung. Für $0 \leqq b \leqq a \leqq 2b$ erhält man durch Quadrieren der letzten Gleichung (Äquivalenzumformung!):

$$4b^2 + a^2 - 4ab = a^2 - x^2$$
$$x^2 = 4b(a - b)$$

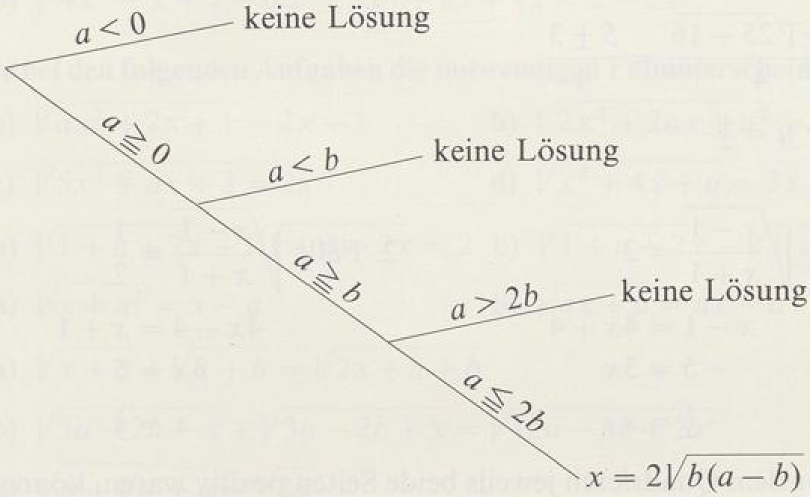
Die rechte Seite ist unter unseren Voraussetzungen sicher nicht negativ, also ergibt sich

$|x| = 2\sqrt{b(a-b)}$

Wegen $x \in D$ ist $x \geqq 0$, und es gilt schließlich

$x = 2\sqrt{b(a-b)}$.

Einen Überblick über die betrachteten Fälle gibt der Lösungsbaum:



Manchmal ist es von Vorteil, eine Wurzel durch eine neue Variable zu ersetzen und die Gleichung mit der neuen Variablen zu lösen. Eine solche Ersetzung heißt **Substitution***.

Beispiel 4:

$2x - 5\sqrt{x} - 12 = 0$ Substitution: $u := \sqrt{x}$

$2u^2 - 5u - 12 = 0$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

$u = 4 \vee u = -\frac{3}{2}$.

Um x zu erhalten machen wir die Substitution rückgängig. Die letzte Zeile liefert die beiden Gleichungen

$\sqrt{x} = 4 \vee \sqrt{x} = -\frac{3}{2}$.

Die zweite ist widersprüchlich, die erste liefert $x = 16$.
Also: $L = \{16\}$

* substituere (lat.) = an die Stelle einer Person oder Sache setzen

Beispiel 5:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{5}{2} = 0 \qquad \text{Substitution: } u := \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$u + \frac{1}{u} - \frac{5}{2} = 0$$

$$2u^2 - 5u + 2 = 0$$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$u = 2 \vee u = \tfrac{1}{2}$$

1. Fall: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 2$

$$x - 1 = 4x + 4$$
$$-5 = 3x$$
$$-\tfrac{5}{3} = x$$

2. Fall: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{2}$

$$4x - 4 = x + 1$$
$$3x = 5$$
$$x = \tfrac{5}{3}$$

Weil vor dem Quadrieren jeweils beide Seiten positiv waren, können wir auf die Probe verzichten; es gilt also $L = \{\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\}$.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{11-5x} = 3-x$ **b)** $\sqrt{3x+7} + x = 7$

2. a) $\sqrt{4x-15} = 3-x$ **b)** $\sqrt{2x+3} = x+1$

3. a) $\sqrt{2x+9} + x + 3 = 2\sqrt{2x+9}$ **b)** $3 \cdot \sqrt{3x+1} - 2x = 6 - \sqrt{3x+1}$

4. a) $\sqrt{4x+3} - 3 = 3x - 2\sqrt{3+4x}$

b) $2\sqrt{19+5x} - 2x + 4\sqrt{5x+19} = \sqrt{5x+19} + 22$

5. a) $\sqrt{5x^2+2x+6} = x+4$ •**b)** $\sqrt{x^2-3x+3} = 4x+7$

6. a) $\sqrt{12x^2+20x+3} = 4x+2$ **b)** $\sqrt{3x^2-16x+3} = 3x-2$

7. a) $\sqrt{2x+1} + 2 = 2\sqrt{x+9} - 3$ **b)** $\sqrt{2x+1} + 2 = 3 - 2\sqrt{x+9}$

8. a) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{5-4x} = 4$ **b)** $2 - 3\sqrt{x+2} = 2\sqrt{2x+3} - 3$

9. a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x+10}$ **b)** $\sqrt{5x-1} - 2\sqrt{3-x} = \sqrt{x-1}$

10. a) $\sqrt{x+2}+2\sqrt{x}-\sqrt{13x+3}=0$ **b)** $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-5}-2\sqrt{2-x}=0$

11. a) $\sqrt{x+4+\sqrt{3x-5}}=3$ **b)** $\sqrt{\sqrt{x-15}+1-x}=4$

12. a) $\sqrt{7{,}5+x-\sqrt{5+4x}}=2{,}5$ **b)** $\sqrt{3+\sqrt{3-2x}+x}=2$

13. a) $\sqrt{2x+5+\sqrt{x^2+3x+3}}=2$ **b)** $\sqrt{\sqrt{3x^2+5x-1}-1-0{,}5x}=0{,}5$

14. a) $\sqrt{x^2+2+\sqrt{7-6x}}+x=1$

b) $\sqrt{4x^2-x+2-0{,}2\cdot\sqrt{5x^2+8x+12}}=2-2x$

Führe bei den folgenden Aufgaben die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

•15. a) $\sqrt{ax^2+2x+1}=2x-1$ **b)** $\sqrt{2x^2+2ax+a^2}=x+2a$

c) $\sqrt{5x^2+ax+3}=2x$ **d)** $\sqrt{x^2+4x+a}=3x+2$

•16. a) $\sqrt{1+a+2x}+\sqrt{1+a-2x}=2$ **b)** $\sqrt{1+a+2x}-\sqrt{1+a-2x}=2$

••17. a) $\sqrt{x+a^2}=x-a$ **b)** $\sqrt{ax+a}=ax-a$

•18. a) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{2x+a+b}$

b) $\sqrt{3a-2b-x}+\sqrt{3a-2b+x}=\sqrt{12a-8b+2x}$

•19. a) $\sqrt{x+\sqrt{x+a}}=\sqrt{2x}$

••b) $\sqrt{\sqrt{a^2x^2+abx+b^2}-ax}=\sqrt{ax+b}$

20. Angeregt durch die *Practica Arithmeticae et Mensurandi singularis* – »Einzigartige Handhabung der Arithmetik und des Messens« – des Geronimo CARDANO (1501–1576) aus dem Jahre 1539 stellte Michael STIFEL (1487? bis 1567) in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – 1544 folgende Aufgabe:
Ein Spieler gewinnt am 1. Tag so viel, wie er hatte, am 2. Tag die Quadratwurzel aus dem Ganzen und dazu noch 2 Gulden, am 3. Tag das Quadrat dessen, was er am 2. Tag hatte, sodass er schließlich 5550 Gulden besaß. Wie viel hatte er anfangs?

21. Aufgabe IV aus Kapitel V der *Ars Magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):
Addiert man zu einer Zahl das Doppelte ihrer Wurzel und dazu die doppelte Wurzel dieser Summe, dann erhält man 15. Wie heißt diese Zahl?*

22. a) $x-2\sqrt{x}+1=0$ **b)** $x+5\sqrt{x}=14$ **c)** $3\sqrt{x}=-2-x$

23. a) $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}=3$ **b)** $\sqrt{\dfrac{7x^2+2x}{2-x^2}}=2+3\sqrt{\dfrac{2-x^2}{7x^2+2x}}$

* In der Originalaufgabe von CARDANO steht 10 statt 15. Wer Mut hat, rechne die Aufgabe mit diesem Wert.

24. **a)** $2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+5=3\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ **b)** $\dfrac{7\sqrt{\frac{x+1}{x}}+5}{7\sqrt{\frac{x}{x+1}}-5}=6$

25. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240):

a) $x-(\frac{7}{12}x+4)=\sqrt{x}$ **b)** $3x+4\sqrt{x^2-3x}=20$

c) $3x+4\sqrt{x^2-3x}=x^2+4$ **d)** $x^2=\sqrt{6x}\sqrt{5x}+10x+20$

26. Aus *Lilavati* – »Die Schöne« – von BHĀSKARA II (1115 – nach 1178):

a) § 67: Ardschuna, Prithas Sohn, im Kampf gereizt, schoss einen Köcher Pfeile um Karna zu töten. Mit der Hälfte seiner Pfeile parierte er die seines Gegners, mit dem Vierfachen der Wurzel seines Köcherinhalts tötete er dessen Pferde, mit 6 Pfeilen Salya, und mit 3 Pfeilen zerstörte er Schirm, Standarte und Bogen, mit einem schließlich trennte er den Kopf seines Feindes vom Rumpf. Wie viele Pfeile ließ Ardschuna fliegen?

b) § 68: Die Wurzel aus der Hälfte eines Bienenschwarms flog zu einem Jasminbusch. $\frac{8}{9}$ des Schwarms blieben im Stock. Ein Weibchen schließlich umschwirrte eine Lotosblume, in der ein Männchen gefangen saß, das vom Duft zur Nachtzeit angelockt worden war*. Sag mir, wunderschöne Frau, die Anzahl der Bienen!

c) § 69: Eine Zahl, vermehrt um ihr Drittel und um das 18fache ihrer Wurzel, ergibt 1200. Wie heißt die Zahl?

3.7.2 Die biquadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form $ax^4+bx^2+c=0$ mit $a \neq 0$ lässt sich durch die Substitution $u := x^2$ auf eine quadratische Gleichung der Form $au^2+bu+c=0$ zurückführen. Weil $u^2=(x^2)^2$ ist, nennen wir und auch andere Autoren eine solche Gleichung **biquadratisch****. Gleichungen dieser Art lösten bereits die Babylonier im Zusammenhang mit Gleichungssystemen (siehe **3.8**). Die folgenden zwei Beispiele stammen aus Kapitel I der *Ars magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576).

* Der Lotos öffnet sich nachts und schließt sich bei Tage.

** *bis* (lat.) = *zweimal, auf doppelte Weise.* – Bei DESCARTES (1596–1650) findet man 1628/29 *biquadratum* an Stelle von *quadratumquadratum* zur Bezeichnung der 4. Potenz, bei Christian VON WOLFF (1679 bis 1754) in seinen *Die Anfangsgründe Aller Mathematischen Wissenschaften* 1710 den Ausdruck *biquadratische Aequation* als Bezeichnung für eine allgemeine Gleichung 4. Grades, also eine Gleichung der Form $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, wie es auch heute noch bei manchen Autoren üblich ist. In der 2. Auflage erfolgte dann die Eindeutschung *biquadratische Gleichung*.

Beispiel 1:

$x^4 + 12 = 7x^2$ Substitution: $u := x^2$

$u^2 - 7u + 12 = 0$

$u = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(7 \pm 1)$

$u = 3 \vee u = 4.$

Somit muss gelten

$x^2 = 3 \vee x^2 = 4$

$|x| = \sqrt{3} \vee |x| = 2$

$x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} \vee x = -2 \vee x = 2.$

Wir erhalten eine 4-elementige Lösungsmenge: $\{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$.

Beispiel 2:

$x^4 + 3x^2 = 28$ Substitution: $u := x^2$

$u^2 + 3u - 28 = 0$

$u = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{121}) = \frac{1}{2}(-3 \pm 11)$

$u = -7 \vee u = 4.$

Somit muss gelten

$x^2 = -7 \vee x^2 = 4$

$x^2 = -7 \vee |x| = 2.$

Da die erste Gleichung widersprüchlich ist, erhalten wir eine 2-elementige Lösungsmenge, nämlich $L = \{\,\} \cup \{-2; 2\} = \{-2; 2\}$.

Mit einiger Übung kann man sich die Schreibarbeit der Substitution ersparen, wenn man gleich x^2 als neue Variable nimmt. Dann schreibt sich Beispiel 1 wie folgt:

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

$(x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{1})$

$x^2 = 3 \vee x^2 = 4,$ woraus man wie oben erhält

$|x| = \sqrt{3} \vee |x| = 2,$ also $L = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$.

Manchmal lassen sich auch Gleichungen höheren Grades durch eine geeignete Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Auch hierzu wieder ein Beispiel von Geronimo CARDANO, diesmal aus Kapitel VI seiner *Ars magna*.

Beispiel 3:

$x^8 + x^4 = 12$ Substitution: $u := x^4$

$u^2 + u - 12 = 0$

$u = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{49}) = \frac{1}{2}(-1 \pm 7)$

$u = -4 \vee u = 3$.

Somit muss gelten

$x^4 = -4 \vee x^4 = 3$ || radizieren

$x^2 = \sqrt{3}$ || radizieren

$|x| = \sqrt{\sqrt{3}}$

$x = -\sqrt{\sqrt{3}} \vee x = \sqrt{\sqrt{3}}$.

Da $x^4 = -4$ eine widersprüchliche Gleichung ist, erhält man als Lösungsmenge $\{-\sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{3}}\}$.

Aufgaben

1. Aus der *Arithmetica integra* (1544) des Michael STIFEL (1487?–1567):
a) $2x^4 = 1450 - 8x^2$ **b)** $x^4 = 18x^2 + 648$ **c)** $x^4 - 4x^2 = 2205$
d) $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 2538$ **e)** $x^8 = 214\,651\,701 - 20x^4$
f) $x^8 = 2000x^4 + 185\,076\,881$ **g)** $x^8 = 20\,000x^4 - 78\,461\,119$

2. Aus Kapitel I, VI und XXIV der *Ars magna* (1545) das Geronimo CARDANO (1501–1576):
a) $x^4 + 12 = 7x^2$ **b)** $x^4 + 12 = 6x^2$ **c)** $x^4 = 2x^2 + 8$
d) $x^4 + x^2 = 12$ **e)** $x^4 + 2x^2 = 10$

3. a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ **c)** $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$
d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **e)** $x^4 - 20x^2 = 125$ **f)** $12x^4 - 81x^2 - 21 = 0$

4. a) $3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ **b)** $9x^4 + 64x^2 = -7$ **c)** $2x^4 - 11x^2 + 16 = 0$

5. a) $2x^5 - 39x^3 - 245x = 0$ **b)** $32x^4 - 82x^2 - 405 = 0$

6. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):
$(\frac{1}{3}x^2 + 1)(\frac{1}{4}x^2 + 2) = x^2 + 13$

•**7. a)** $\dfrac{9x^4 - 325x^2 + 36}{3x^2 + 17x - 6} = 0$ **b)** $\dfrac{x^6 - 16x^2}{5x^4 - 19x^2 - 4} = 0$

8. a) Beweise: Wenn die drei Koeffizienten einer biquadratischen Gleichung dasselbe Vorzeichen haben, dann ist $L = \{\}$.
b) Ist der vorausgehende Satz über biquadratische Gleichungen umkehrbar? (Vgl. Aufgabe **2a** und **4c**.)

**3.7.3 Kubische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a \neq 0$ heißt **kubische Gleichung*** oder **Gleichung 3. Grades**. Wenn man eine Lösung einer kubischen Gleichung schon kennt oder errät, dann lässt sich die kubische Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Zum Nachweis folgen wir einem Gedankengang, den Geronimo CARDANO (1501–1576) in Regel 6 von Kapitel XXV seiner *Ars magna* 1545 anspricht und den François VIÈTE (1540–1603) in seinem *Tractatus de emendatione aequationum* (erschienen 1615) erweitert.
Sei x_0 eine Lösung der Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dann gilt
$ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0$.
Dies verwenden wir nun um das auf der linken Seite der kubischen Gleichung stehende Polynom 3. Grades umzuformen:

$$\begin{aligned}
&ax^3 + bx^2 + cx + d = \\
&= ax^3 + bx^2 + cx + d - 0 = \\
&= ax^3 + bx^2 + cx + d - ax_0^3 - bx_0^2 - cx_0 - d = \\
&= a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0).
\end{aligned}$$

Nun ist aber $x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$, sodass wir im zuletzt erhaltenen Ausdruck $x - x_0$ ausklammern können. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&(x - x_0)[a(x^2 + xx_0 + x_0^2) + b(x + x_0) + c] = \\
&= (x - x_0)[ax^2 + (ax_0 + b)x + (ax_0^2 + bx_0) + c] = \\
&= (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) \quad \text{mit} \quad A := a \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad B := ax_0 + b \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad C := ax_0^2 + bx_0 + c\,.
\end{aligned}$$

Man erkennt, wie man, ausgehend von a, schrittweise A, B und C aufbauen kann:
$A = a, \quad B = Ax_0 + b, \quad C = Bx_0 + c$.
Wir halten das Ergebnis dieser Umformung fest in

> **Satz 125.1:** Ist x_0 eine Lösung der kubischen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, so lässt sich die linke Seite faktorisieren zu
>
> $$\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C)}$$
>
> mit $A = a$, $B = Ax_0 + b$, $C = Bx_0 + c$.

* Eine Zahl der Form a^3 heißt bei EUKLID (um 300 v. Chr.) κύβος (kýbos) = Würfel, was wohl auf die PYTHAGOREER zurückgeht. HERON von Alexandria – von seinen Lebensdaten wissen wir nur, dass er eine Mondfinsternis des Jahres 62 n. Chr. beschreibt – bezeichnet mit κύβος die 3. Potenz. Bei DIOPHANT (um 250 n. Chr.) gewinnt κύβος dann auch die Bedeutung »3. Potenz der Unbekannten«, wofür die Araber كعب (kaaba) sagen, was wieder nichts anderes als Würfel bedeutet. (So heißt heute noch das seit 703 unveränderte quaderförmige Gebäude [12 m × 10 m × 15 m] in Mekka, das Ziel der muslimischen Pilgerfahrten.) Als im 12. Jh. die arabischen mathematischen Schriften ins Lateinische übertragen wurden, übersetzte man *kaaba* wortgetreu mit *cubus*. Im *Mathematischen Lexicon* von 1716 des Christian VON WOLFF (1679–1754) erscheint der Fachausdruck **kubische Gleichung**, der 1710 in den *Anfangsgründen* noch *kubische Aequation* lautete.

Aus Satz 125.1 ergibt sich als wichtige

Folgerung: Eventuelle weitere Lösungen der kubischen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ müssen Lösungen der quadratischen Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ sein.
Dazu

Beispiel 1: $3x^3 - 2x^2 - 23x + 30 = 0$

Durch Probieren mit den Werten 0, ± 1, ± 2 usw. findet man, dass die Zahl 2 eine Lösung ist. Also gilt $A = 3$, $B = 3 \cdot 2 - 2 = 4$ und $C = 4 \cdot 2 - 23 = -15$. Eventuelle weitere Lösungen der Gleichung $3x^3 - 2x^2 - 23x + 30 = 0$ müssen also Lösungen der quadratischen Gleichung $3x^2 + 4x - 15 = 0$ sein. Wir erhalten

$$x = \tfrac{1}{6}(-4 \pm \sqrt{196}) = \tfrac{1}{6}(-4 \pm 14)$$

$$x = -3 \vee x = \tfrac{5}{3}.$$

Wer sich nicht die Ausdrücke für A, B und C merken will, erhält den quadratischen Faktor $Ax^2 + Bx + C$ des kubischen Terms $ax^3 + bx^2 + cx + d$, indem er letzteren durch $x - x_0$ dividiert. Da der kubische Term ein Polynom und auch $x - x_0$ ein Polynom in x ist, nennt man eine solche Division **Polynomdivision**. Wie sie praktisch abläuft, zeigen wir am Polynom von Beispiel 1; dabei ist $x_0 = 2$.

Beispiel 2: Die Polynomdivision

$(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) : (x - 2)$

Wir beginnen mit der Division bei den Termen mit den höchsten Potenzen von x, also mit $3x^3 : x = 3x^2$.

Das Ergebnis $3x^2$ schreiben wir rechts vom Gleichheitszeichen als ersten Summanden an und multiplizieren damit den Divisor $x - 2$. Das erhaltene Produkt $3x^3 - 6x^2$ ziehen wir vom Dividendenpolynom ab. Dieses Verfahren setzen wir mit dem Restpolynom so lange fort, bis sich als Rest null ergibt:

$$\begin{array}{l}
(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) : (x - 2) = 3x^2 + 4x - 15 \\
\underline{-(3x^3 - 6x^2)} \\
\qquad\quad 4x^2 - 23x + 30 \\
\qquad\ \underline{-(4x^2 - \ \ 8x)} \\
\qquad\qquad\quad -15x + 30 \\
\qquad\qquad \underline{-(-15x + 30)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Beachte: Ergibt sich nicht 0 als Rest, so hast du entweder beim Probieren einen Fehler gemacht und dein x_0 ist gar keine Lösung, oder du hast dich beim Dividieren verrechnet.

Man kommt ohne Polynomdivision schneller zum quadratischen Faktor, wenn man vorher ein wenig kopfrechnet. Setzt man nämlich auf Grund der obigen Überlegungen an

$(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) = (x-2)(Ax^2 + Bx + C)$

und multipliziert in Gedanken aus, so erkennt man sofort, dass $A = 3$ und $C = -15$ sein müssen. Also kann man stattdessen gleich mit dem Ansatz

$(3x^3 - 2x^2 - 23x + 30) = (x-2)(3x^2 + Bx - 15)$

beginnen. Vergleicht man die Koeffizienten der quadratischen Glieder auf beiden Seiten – rechts muss man in Gedanken ausmultiplizieren –, so ergibt sich $-2 = -6 - 2B$, also $B = 4$,

und damit der quadratische Faktor wie oben zu $3x^2 + 4x - 15$.

Aufgaben

1. Zur Polynomdivision

a) Fehlen bei den Polynomen Glieder, so rät Michael STIFEL (1487? bis 1567) in seiner *Arithmetica integra* (1544), die fehlenden Potenzen mit dem Koeffizienten null zu versehen und sie im Polynom mitzuführen, also die Division $(x^3+1):(x+1)$ in der Form $(x^3 + 0x^2 + 0x + 1):(x+1)$ auszuführen. Mach es und verfahre ebenso bei den folgenden Aufgaben.

b) $(x^3 - 1):(x-1)$ **c)** $(x^3 + 8):(x+2)$

d) $(8x^3 + 125):(2x+5)$ **e)** $(16x^4 - 81):(2x-3)$

2. Auf einer babylonischen Keilschrifttafel, deren einer Teil in London (BM 85200) und deren anderer in Berlin (VAT 6599) liegt, finden sich mehrere kubische Gleichungen:

a) Aufgabe 5: $z^3 + z^2 = 252$ **b)** Aufgabe 20: $z^3 + 7z^2 = 8$

3. Bei den Griechen findet sich die erste nicht geometrisch gelöste kubische Gleichung bei DIOPHANT (um 250 n. Chr.) in Buch VI seiner *Ἀριθμητικῶν βιβλία* bei der Behandlung des folgenden Problems (Nr. 17):
Eine Quadratseite ist um 2 Längeneinheiten größer als die Kante eines Würfels, dessen Volumenmaßzahl aber um 2 größer ist als die Flächenmaßzahl des Quadrats. Wie groß sind Quadratseite und Würfelkante? – DIOPHANT bezeichnete die Würfelkantenlänge mit $x - 1$. Verfahre ebenso!

4. Bei BHĀSKARA II (1115–nach 1178) findet sich im *Bidscha-ganita* (§ 137) die Gleichung $12x + x^3 = 6x^2 + 35$.

5. Christoff RUDOLFF (um 1500 Jauer/Schlesien – vor 1543 Wien?) hat 1525 in seiner *Behend und Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coß genennt werden* einige kubische Gleichungen gelöst ohne den Lösungsweg anzugeben.

a) $63 + x^3 = 10x^2$ **b)** $605 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3$ **c)** $x^3 + 75x^2 + 1875x = 27250$

Zu den Aufgaben 6 bis 10. Die größte Leistung auf dem Gebiet der kubischen Gleichungen vollbrachte Geronimo CARDANO (1501–1576), der für sie eine allgemeine Lösungsformel beweisen konnte (Näheres in *Algebra 10*). Viele Kapitel seiner *Ars magna* (1545), der mit Ausnahme von **8h** die folgenden Aufgaben entnommen sind, beschäftigen sich mit kubischen Gleichungen. Wie damals üblich schreibt CARDANO noch keine negativen Koeffizienten, sodass er den Lösungsgang für die dadurch verschiedenen möglichen Typen vorführen muss. CARDANO erkennt aber, dass eine, zwei oder drei Lösungen auftreten können, wofür er auch Fallunterscheidungen angibt.

6. a) $x^3 + 6x = 20$ **b)** $x^3 + 16 = 12x$ **c)** $x^3 = 19x + 30$

7. a) $x^3 + 22\frac{1}{2}x^2 = 98$ **b)** $x^3 + 48 = 10x^2$ **c)** $x^3 = 3x^2 + 16$

8. a) $x^3 = 3x^2 + 20x + 6$ **b)** $x^3 + 6x^2 = 20x + 56$
c) $x^3 + 21x = 9x^2 + 5$ **d)** $x^3 + 9 = 6x^2 + 24x$
e) $x^3 + 6x^2 + x = 14$ **f)** $x^3 + 6x^2 + 12 = 31x$
g) $x^3 + 3x + 18 = 6x^2$ **h)*** $25 + 4x^2 + 2x^3 = 16x + 55$

9. a) $x^6 + 3x^4 = 20$ **b)** $x^6 + 3x^4 + 10 = 15x^2$

10. Bei den Gleichungen vom Typ $x^3 = px + q$ und $x^3 + q = px$ versagte gerade dann die von CARDANO bewiesene Formel, wenn – wie wir heute wissen – es 3 Lösungen gibt. Das ist der Fall, wie CARDANO entdeckte, wenn $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$ ist. Man nannte diesen Fall später **casus irreducibilis**, d.h. unzurückführbarer Fall. Im Kapitel XXV seiner *Ars magna*, das er mit *De Capitulis imperfectis et specialibus* – »Über die unvollkommenen und nur in Sonderfällen brauchbaren Regeln« – überschreibt, gibt er daher besondere Verfahren zur Lösung solcher Gleichungen an. Ihm entnehmen wir mit Ausnahme von **a)** die folgenden Gleichungen**.
a) $x^3 = 9x + 10$ **b)** $x^3 = 32x + 24$ **c)** $x^3 = 16x + 21$
d) $x^3 + 12 = 34x$ **e)** $x^3 + 18 = 19x$ **f)** $x^3 + 8 = 18x$

11. Von François VIÈTE (1540–1603) stammen aus dem
a) *Responsum ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit* ADRIANUS ROMANUS von 1595***: $3x - x^3 = \sqrt{2}$
b) *Tractatus de aequationum recognitione* (1615 gedruckt):
1) $8x - x^3 = 7$ **2)** $9x^2 - x^3 = 8$

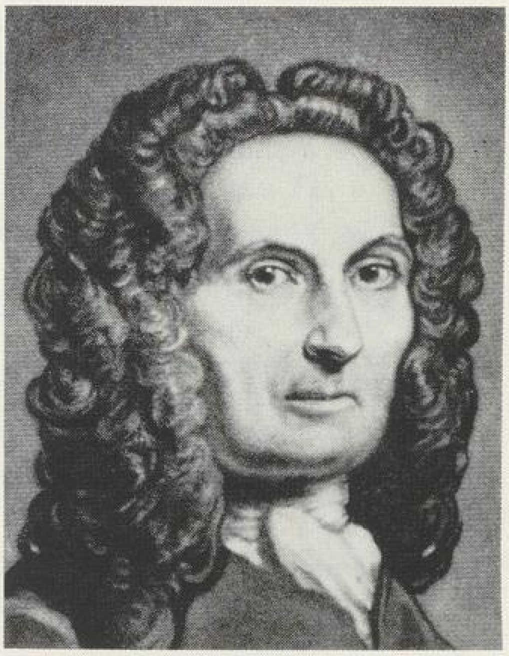
* Michael STIFEL bringt diese Aufgabe in seiner *Arithmetica integra* 1544 auf Blatt 317. Er hat sie CARDANOS *Practica Arithmeticae* von 1539 entnommen, in der sich jener auch schon mit kubischen Gleichungen beschäftigt hatte. STIFEL empfiehlt dieses Buch seinen Lesern wärmstens, rät ihnen aber, statt der umständlichen Bezeichnungen CARDANOS seine viel bequemeren zu verwenden.

** Mit der in a wiedergegebenen Gleichung teilte CARDANO seine Entdeckung des casus irreducibilis TARTAGLIA in einem Brief mit, den dieser am 4.8.1539 erhalten hat.

*** »Antwort auf das Problem, das ADRIAEN VAN ROOMEN [1561–1615] allen Mathematikern des ganzen Erdkreises [1593] zur Lösung stellte«. VIÈTE konnte die gestellte Gleichung 45. Grades lösen.

**3.7.4 Reziproke Gleichungen

Abraham DE MOIVRE (1667–1754) stieß bei seinen Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einen besonderen Typ von Gleichungen, den er 1711 in seiner Abhandlung *De mensura sortis* – »Über ein Maß des Zufalls« – beschrieb und für den er 1730 in seinen *Miscellanea Analytica* – »Allerlei zur Analysis« – wichtige Sätze herleitete. 1733 beschäftigte sich Leonhard EULER (1707–1783) mit diesen Gleichungen und nannte sie wegen einer wichtigen Eigenschaft, die wir gleich beweisen wollen, reziproke Gleichungen. Da sie einer Verallgemeinerung fähig sind, fügt man heute noch »1. Art« bei. Unter Benützung der von DE MOIVRE gegebenen Beschreibung legen wir also fest



1736

A. DeMoivre

Abb. 129.1 Abraham DE MOIVRE (26.5.1667 Vitry-le-François bis 27.11.1754 London) – Gemälde von Joseph HIGHMORE (1692–1780)

> **Definition 139.1:** Eine Gleichung heißt **reziproke Gleichung 1. Art**, wenn die vom Anfang und vom Ende des Gleichungspolynoms gleich weit entfernten Koeffizienten jeweils gleich sind.

Beispiele:

1) $3x^2 + 5x + 3 = 0$ Der erste und der letzte Koeffizient sind gleich.

2) $-\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

3) $5x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 0$

} Der erste und der letzte Koeffizient sind gleich, ebenso der zweite und der vorletzte.

Offensichtlich kann 0 nicht Lösung einer reziproken Gleichung sein, da der letzte Koeffizient gleich dem ersten Koeffizienten und damit ungleich null ist. Der folgende Satz macht nun den von EULER gegebenen Namen verständlich.

> **Satz 129.1:** Ist r Lösung einer reziproken Gleichung 1. Art, so ist auch der reziproke Wert $\frac{1}{r}$ Lösung dieser Gleichung.

Beweis: Der Beweis sei beispielhaft für eine Gleichung 4. Grades vorgeführt. Der allgemeine Beweis verläuft analog.

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (mit $a \neq 0$) ist eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 4. Wenn r Lösung dieser Gleichung ist, dann gilt
$ar^4 + br^3 + cr^2 + br + a = 0$.
Da $r \neq 0$ ist, können wir r^4 ausklammern und erhalten

$$r^4\left(a + b\left(\frac{1}{r}\right) + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right)^3 + a\left(\frac{1}{r}\right)^4\right) = 0.$$

Da r^4 nicht null werden kann, muss die Klammer null sein. In der Klammer steht aber, von rechts nach links gelesen, der gegebene Gleichungsterm, in den an Stelle von x der Wert $\frac{1}{r}$ eingesetzt wurde. Also ist $\frac{1}{r}$ Lösung, was zu zeigen war.

Wie findet man aber nun die Lösungsmenge einer reziproken Gleichung 1. Art? Auch hier wollen wir das Wesentliche wieder anhand von Beispielen zeigen.

Beispiel 1: Der Grad der reziproken Gleichung 1. Art ist gerade.

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

Da null keine Lösung ist, dürfen wir durch x^2 dividieren und erhalten

$$6x^2 + 5x - 38 + 5 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

Joseph Louis de LAGRANGE (1736–1813) schlug 1770 die Substitution

$x + \frac{1}{x} =: z$ vor.

Durch Quadrieren erhält man

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2$, sodass die letzte Gleichung übergeht in

$6(z^2 - 2) + 5z - 38 = 0$
$6z^2 + 5z - 50 = 0$
$z = -\frac{10}{3} \vee z = \frac{5}{2}$.

Machen wir die Substitution wieder rückgängig, dann erhalten wir

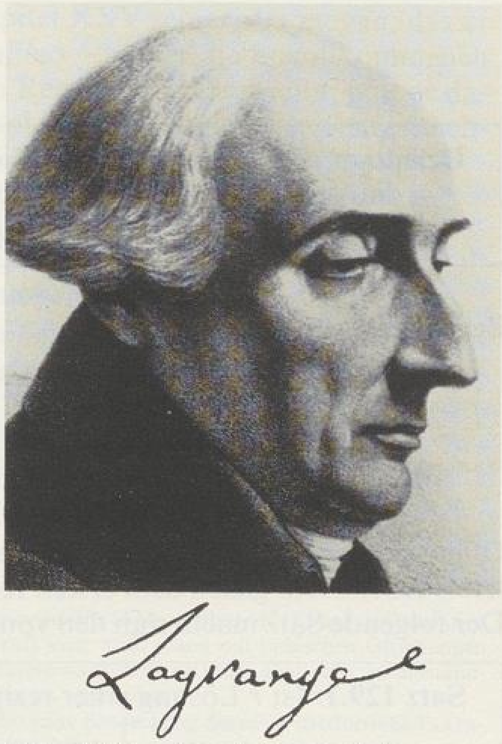


Abb. 130.1 Joseph Louis de LAGRANGE (25.1.1736 Turin–10.4.1813 Paris)

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \vee x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$$

was durch Multiplikation mit dem Hauptnenner auf zwei reziproke quadratische Gleichungen führt:

$$3x^2+10x+3=0 \quad \vee \quad 2x^2-5x+2=0$$
$$x=-3 \vee x=-\tfrac{1}{3} \quad \vee \quad x=\tfrac{1}{2} \vee x=2.$$

Die gesuchte Lösungsmenge lautet somit $L=\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$.

Ist der Grad einer reziproken Gleichung 1. Art ungerade, dann gilt

Satz 131.1: Eine reziproke Gleichung 1. Art ungeraden Grades hat stets die Lösung -1.

Beweis: $ax^3+bx^2+bx+a=0$ ist eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 3. Setzt man -1 ein, so erhält man $-a+b-b+a=0$, was zu zeigen war. Der allgemeine Beweis verläuft analog.

In Satz 125.1 haben wir gezeigt, dass man eine kubische Gleichung faktorisieren kann, wenn man eine Lösung kennt. Dieser Satz gilt allgemein, wenn der Gleichungsterm ein Polynom ist.* Damit lässt sich eine reziproke Gleichung 1. Art ungeraden Grades auf eine Gleichung kleineren Grades reduzieren. Dazu

Beispiel 2: $12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=0$

Die Division durch $(x-(-1))$ liefert

$12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=$
$=(x+1)(12x^4-4x^3-41x^2-4x+12)$,

wie du leicht nachrechnen kannst. Setzen wir den 2. Faktor null, so haben wir in $12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0$ wieder eine reziproke Gleichung 1. Art vor uns. Dieser Sachverhalt gilt allgemein, wie man beweisen kann. Wie in Beispiel 1 substituiert man $z:=x+\frac{1}{x}$ und erhält

$12z^2-4z-65=0 \Leftrightarrow z=-\frac{13}{6} \vee z=\frac{5}{2}$.

Daraus gewinnt man, indem man die Substitution rückgängig macht, schließlich die beiden quadratischen reziproken Gleichungen 1. Art

$$6x^2+13x+6=0 \quad \vee \quad 2x^2-5x+2=0$$

mit $\{-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\}$ bzw. $\{\frac{1}{2}, 2\}$ als Lösungsmengen, sodass man nun die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung 5. Grades angeben kann zu

$L=\{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$.

* Beweis: Dividiert man ein Polynom $P(x)$ durch $(x-x_0)$, so erhält man ein Polynom $Q(x)$ und einen Rest R; es gilt also $P(x)=(x-x_0)Q(x)+R$. Den Rest R kann man aber leicht bestimmen. Setzt man nämlich an Stelle von x den Wert x_0 ein, so erhält man $P(x_0)=(x_0-x_0)Q(x_0)+R=0+R=R$, d.h., R ist der Wert des Polynoms $P(x)$ an der Stelle x_0. Ist nun x_0 eine Nullstelle des Polynoms, dann ist $P(x_0)=0$, also auch $R=0$, und es gilt $P(x)=(x-x_0)Q(x)$; das Polynom ist faktorisiert.

Die eingangs angekündigte Erweiterung des Begriffs der reziproken Gleichung liefert

Definition 132.1: Eine Gleichung heißt **reziproke Gleichung 2. Art**, wenn die vom Anfang und vom Ende des Gleichungspolynoms gleich weit entfernten Koeffizienten dem Betrage nach jeweils gleich sind, aber verschiedenes Vorzeichen haben.

Folgerung: Ist der Grad einer reziproken Gleichung 2. Art gerade, z. B. $2k$, so muss für den mittleren Koeffizienten a_k gelten $a_k = -a_k$, d.h., der mittlere Koeffizient muss den Wert null haben.

Beispiele:

1) $3x^2 - 3 = 0$ — Der erste und der letzte Koeffizient unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

2) $-\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$

3) $5x^4 - 3x^3 + 3x - 5 = 0$

(zu 2) und 3)) Der erste und der letzte Koeffizient unterscheiden sich nur im Vorzeichen, ebenso der zweite und der vorletzte.

Satz 129.1 gilt auch für reziproke Gleichungen 2. Art, wie du selbst leicht beweisen kannst (Aufgabe 133/**1**). An Stelle von Satz 131.1 gilt

Satz 132.1: Jede reziproke Gleichung 2. Art hat die Lösung $+1$.

Von der Richtigkeit dieses Satzes kannst du dich durch Einsetzen in die obigen Beispiele überzeugen; der Beweis ist leicht (Aufgabe 133/**2**).

Dividiert man eine reziproke Gleichung 2. Art durch $x - 1$, so erhält man immer, wie man zeigen kann, eine reziproke Gleichung 1. Art. Wir begnügen uns zum Nachweis auch hier mit einem Beispiel, nämlich

Beispiel 3:

$x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$ ist eine reziproke Gleichung 2. Art. Somit lässt sich der links stehende Term durch $x - 1$ dividieren und man erhält die Faktorisierung

$(x-1)(x^3 - 5x^2 - 5x - 1) = 0$.

Setzt man die Klammer null, so erhält man eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 3. Diese hat -1 als Lösung. Daher kann man das Polynom in der Klammer durch $x + 1$ dividieren und erhält die Faktorisierung

$(x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 1) = 0$.

Setzt man nun den 3. Faktor null, so erhält man eine quadratische Gleichung – sie ist reziprok von 1. Art – mit den Lösungen $3 \pm \sqrt{8}$. Die Ausgangsgleichung $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$ hat also die Lösungsmenge $L = \{3 - \sqrt{8}, -1, 1, 3 + \sqrt{8}\}$.

Aufgaben

1. Beweise die Gültigkeit von Satz 129.1 für eine reziproke Gleichung 2. Art. Unterscheide dabei, ob sie geraden oder ungeraden Grades ist, und führe den Beweis für eine Gleichung 3. und für eine Gleichung 4. Grades.

2. Zeige, dass eine reziproke Gleichung 2. Art stets 1 als Lösung besitzt. Führe den Beweis für eine Gleichung 3. und für eine Gleichung 4. Grades.

3. a) $12x^3 - 13x^2 - 13x + 1 = 0$ **b)** $x^3 - 5x^2 + 5x + 1 = 0$

4. a) $20x^4 + 19x^3 - 402x^2 + 19x + 20 = 0$
b) $20x^4 - 189x^3 + 482x^2 - 189x + 20 = 0$

5. a) $18x^4 + 51x^3 - 334x^2 + 51x + 18 = 0$
b) $36x^4 - 9x^3 - 103x^2 - 9x + 36 = 0$

6. a) $7x^4 + 36x^3 - 86x^2 + 36x + 7 = 0$
b) $10x^4 - 29x^3 + 20x^2 - 29x + 10 = 0$

7. a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$
b) $20x^4 + 16x^3 + 19x^2 + 16x + 20 = 0$

8. a) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 1 = 0$

9. a) $16x^4 - 72x^3 + 113x^2 - 72x + 16 = 0$
b) $2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 9x + 2 = 0$

10. Beweise für reziproke Gleichungen 1. Art vom Grad 4:

a) Die Lösungsmenge einer solchen Gleichung ist genau dann nicht leer, wenn die durch die Substitution $z := x + \frac{1}{x}$ gewonnene Hilfsgleichung mindestens eine Lösung hat, welche die Bedingung $|z| \geqq 2$ erfüllt.

b) Eine Doppellösung tritt genau dann auf, wenn die Hilfsgleichung die Lösung 2 oder -2 hat. Wie heißt die zugehörige Doppellösung?

c) Löst z_1 die Hilfsgleichung, so haben die zugehörigen Lösungen der Ausgangsgleichung stets dasselbe Vorzeichen wie z_1, wenn $|z_1| > 2$ ist.

11. a) $12x^5 + 23x^4 - 135x^3 - 135x^2 + 23x + 12 = 0$
b) $2x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$
c) $2x^6 - 13x^5 + 34x^4 - 46x^3 + 34x^2 - 13x + 2 = 0$

12. a) $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$ **b)** $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

13. a) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ **b)** $x^4 - 10x^3 + 10x - 1 = 0$
c) $x^4 - 1 = 0$

14. a) $12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + 16x - 12 = 0$
b) $5x^5 - 31x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 31x - 5 = 0$ **c)** $x^5 - 1 = 0$

15. a) $x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$
b) $2x^8 - 5x^7 - 4x^6 + 15x^5 - 15x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0$