Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3.7.1 Wurzelgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

3.7 Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Es gibt Gleichungen, die sich durch geeignete Umformungen auf quadratische zurückführen lassen. Einige der wichtigsten Typen wollen wir im Folgenden betrachten.

3.7.1 Wurzelgleichungen

Wie in **2.5** gezeigt, kann man Wurzelgleichungen durch das Verfahren »Isolieren – Quadrieren« lösen. In der Definitionsmenge der Wurzelgleichung ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, wenn beide Seiten gleiches Vorzeichen haben; andernfalls muss man die Probe machen, weil womöglich die Lösungsmenge vergrößert wurde. Kennt man die Definitionsmenge nicht, dann muss man die Probe auf alle Fälle machen.

Beispiel 1:

$5\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2x+5} = \sqrt{3x-5}; \qquad D = [\tfrac{5}{3}; +\infty[$

$\Rightarrow\; 25(x-1) + 4(2x+5) - 20\sqrt{(x-1)(2x+5)} = 3x-5$

$-20\sqrt{2x^2+3x-5} = -30x$

$2\sqrt{2x^2+3x-5} = 3x.$ Wir erkennen, x kann nicht negativ sein.

$4(2x^2+3x-5) = 9x^2$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$x_1 = 10;\; x_2 = 2$

Probe:

$x_1 = 10$:

$\left.\begin{array}{l} \text{LS} = 5\sqrt{10-1} - 2\sqrt{2\cdot 10+5} = 5\cdot 3 - 2\cdot 5 = 5 \\ \text{RS} = \sqrt{3\cdot 10-5} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ 10 ist Lösung.

$x_2 = 2$:

$\left.\begin{array}{l} \text{LS} = 5\sqrt{2-1} - 2\sqrt{2\cdot 2+5} = 5\cdot 1 - 2\cdot 3 = -1 \\ \text{RS} = \sqrt{3\cdot 2-5} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ 2 ist keine Lösung.

Lösungsmenge $L = \{10\}$

Beispiel 2:

Aufgabe IX aus Kapitel V der *Ars Magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):
Zerlege die Zahl 10 so in zwei Teile, dass der größere, vermindert um das Doppelte seiner Wurzel, gleich ist dem kleineren, vermehrt um das Doppelte seiner Wurzel.

Bezeichnen wir den größeren Teil mit x, dann muss gelten:

$x - 2\sqrt{x} = (10 - x) + 2\sqrt{10 - x}; \quad D = [0; 10]$

$\sqrt{10 - x} = (x - 5) - \sqrt{x}$

$\Rightarrow 10 - x = (x - 5)^2 - 2(x - 5)\sqrt{x} + x$

$2(x - 5)\sqrt{x} = (x - 5)^2 + 2x - 10$

$(x - 5)(2\sqrt{x} - (x - 5) - 2) = 0$

$(x - 5)(2\sqrt{x} - x + 3) = 0$

$\underline{x = 5} \vee 2\sqrt{x} = x - 3.$ Für $x \geqq 3$ gilt weiter:

$$\begin{aligned} 4x &= x^2 - 6x + 9 \\ x^2 - 10x + 9 &= 0 \\ (x - 9)(x - 1) &= 0 \\ \underline{x = 9} & \end{aligned}$$

Beachte: $x - 1$ kann nicht null werden, da $x \geqq 3$ gilt.

Probe:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = 5\text{: } \mathrm{LS} &= 5 - 2\sqrt{5} \\ \mathrm{RS} &= (10 - 5) + 2\sqrt{10 - 5} = 5 + 2\sqrt{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{5 ist keine Lösung.}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 = 9\text{: } \mathrm{LS} &= 9 - 2\sqrt{9} = 9 - 6 = 3 \\ \mathrm{RS} &= (10 - 9) + 2\sqrt{10 - 9} = 1 + 2 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{9 ist Lösung.}$$

Die gesuchte Zerlegung lautet also: $10 = 9 + 1$.

Beispiel 3:

$\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x} = 2\sqrt{a - b}$; $D = [0; a]$ für $a \geqq 0$; für $a < 0$ ist die Gleichung unsinnig. Wegen $a - b \geqq 0$ muss $b \leqq a$ sein. Für $x \in D$ sind beide Seiten nicht negativ und wir ändern die Lösungsmenge beim Quadrieren nicht:

$a + x + a - x - 2\sqrt{a^2 - x^2} = 4(a - b)$

$2b - a = \sqrt{a^2 - x^2}$

Für $a > 2b$ gibt es keine Lösung. Für $0 \leqq b \leqq a \leqq 2b$ erhält man durch Quadrieren der letzten Gleichung (Äquivalenzumformung!):

$4b^2 + a^2 - 4ab = a^2 - x^2$

$x^2 = 4b(a - b)$

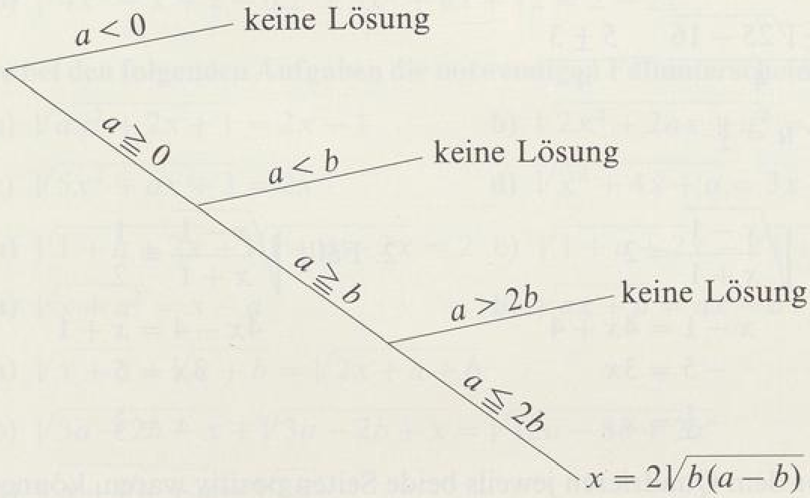
Die rechte Seite ist unter unseren Voraussetzungen sicher nicht negativ, also ergibt sich

$|x| = 2\sqrt{b(a-b)}$

Wegen $x \in D$ ist $x \geqq 0$, und es gilt schließlich

$x = 2\sqrt{b(a-b)}$.

Einen Überblick über die betrachteten Fälle gibt der Lösungsbaum:



Manchmal ist es von Vorteil, eine Wurzel durch eine neue Variable zu ersetzen und die Gleichung mit der neuen Variablen zu lösen. Eine solche Ersetzung heißt **Substitution***.

Beispiel 4:

$2x - 5\sqrt{x} - 12 = 0$ Substitution: $u := \sqrt{x}$

$2u^2 - 5u - 12 = 0$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

$u = 4 \vee u = -\frac{3}{2}$.

Um x zu erhalten machen wir die Substitution rückgängig. Die letzte Zeile liefert die beiden Gleichungen

$\sqrt{x} = 4 \vee \sqrt{x} = -\frac{3}{2}$.

Die zweite ist widersprüchlich, die erste liefert $x = 16$.
Also: $L = \{16\}$

* substituere (lat.) = an die Stelle einer Person oder Sache setzen

Beispiel 5:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\frac{5}{2}=0 \qquad \text{Substitution: } u:=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$u+\frac{1}{u}-\frac{5}{2}=0$$

$$2u^2-5u+2=0$$

$$u=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

$$u=2 \vee u=\tfrac{1}{2}$$

1\. Fall: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=2$

$$x-1=4x+4$$
$$-5=3x$$
$$-\tfrac{5}{3}=x$$

2\. Fall: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{1}{2}$

$$4x-4=x+1$$
$$3x=5$$
$$x=\tfrac{5}{3}$$

Weil vor dem Quadrieren jeweils beide Seiten positiv waren, können wir auf die Probe verzichten; es gilt also $L=\{\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\}$.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{11-5x}=3-x$ **b)** $\sqrt{3x+7}+x=7$

2. a) $\sqrt{4x-15}=3-x$ **b)** $\sqrt{2x+3}=x+1$

3. a) $\sqrt{2x+9}+x+3=2\sqrt{2x+9}$ **b)** $3\cdot\sqrt{3x+1}-2x=6-\sqrt{3x+1}$

4. a) $\sqrt{4x+3}-3=3x-2\sqrt{3+4x}$

b) $2\sqrt{19+5x}-2x+4\sqrt{5x+19}=\sqrt{5x+19}+22$

5. a) $\sqrt{5x^2+2x+6}=x+4$ •**b)** $\sqrt{x^2-3x+3}=4x+7$

6. a) $\sqrt{12x^2+20x+3}=4x+2$ **b)** $\sqrt{3x^2-16x+3}=3x-2$

7. a) $\sqrt{2x+1}+2=2\sqrt{x+9}-3$ **b)** $\sqrt{2x+1}+2=3-2\sqrt{x+9}$

8. a) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{5-4x}=4$ **b)** $2-3\sqrt{x+2}=2\sqrt{2x+3}-3$

9. a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+10}$ **b)** $\sqrt{5x-1}-2\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1}$

10. a) $\sqrt{x+2}+2\sqrt{x}-\sqrt{13x+3}=0$ **b)** $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-5}-2\sqrt{2-x}=0$

11. a) $\sqrt{x+4+\sqrt{3x-5}}=3$ **b)** $\sqrt{\sqrt{x-15}+1}-x=4$

12. a) $\sqrt{7{,}5+x-\sqrt{5+4x}}=2{,}5$ **b)** $\sqrt{3+\sqrt{3-2x}}+x=2$

13. a) $\sqrt{2x+5+\sqrt{x^2+3x+3}}=2$ **b)** $\sqrt{\sqrt{3x^2+5x-1}-1}-0{,}5x=0{,}5$

14. a) $\sqrt{x^2+2+\sqrt{7-6x}}+x=1$

b) $\sqrt{4x^2-x+2-0{,}2\cdot\sqrt{5x^2+8x+12}}=2-2x$

Führe bei den folgenden Aufgaben die notwendigen Fallunterscheidungen durch.

•**15. a)** $\sqrt{ax^2+2x+1}=2x-1$ **b)** $\sqrt{2x^2+2ax+a^2}=x+2a$

c) $\sqrt{5x^2+ax+3}=2x$ **d)** $\sqrt{x^2+4x+a}=3x+2$

•**16. a)** $\sqrt{1+a+2x}+\sqrt{1+a-2x}=2$ **b)** $\sqrt{1+a+2x-\sqrt{1+a-2x}}=2$

:**17. a)** $\sqrt{x+a^2}=x-a$ **b)** $\sqrt{ax+a}=ax-a$

•**18. a)** $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{2x+a+b}$

b) $\sqrt{3a-2b-x}+\sqrt{3a-2b+x}=\sqrt{12a-8b+2x}$

•**19. a)** $\sqrt{x+\sqrt{x+a}}=\sqrt{2x}$

:**b)** $\sqrt{\sqrt{a^2x^2+abx+b^2}-ax}=\sqrt{ax+b}$

20. Angeregt durch die *Practica Arithmeticae et Mensurandi singularis* – »Einzigartige Handhabung der Arithmetik und des Messens« – des Geronimo CARDANO (1501–1576) aus dem Jahre 1539 stellte Michael STIFEL (1487? bis 1567) in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – 1544 folgende Aufgabe:
Ein Spieler gewinnt am 1. Tag so viel, wie er hatte, am 2. Tag die Quadratwurzel aus dem Ganzen und dazu noch 2 Gulden, am 3. Tag das Quadrat dessen, was er am 2. Tag hatte, sodass er schließlich 5550 Gulden besaß. Wie viel hatte er anfangs?

21. Aufgabe IV aus Kapitel V der *Ars Magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576):
Addiert man zu einer Zahl das Doppelte ihrer Wurzel und dazu die doppelte Wurzel dieser Summe, dann erhält man 15. Wie heißt diese Zahl?*

22. a) $x-2\sqrt{x}+1=0$ **b)** $x+5\sqrt{x}=14$ **c)** $3\sqrt{x}=-2-x$

23. a) $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}=3$ **b)** $\sqrt{\dfrac{7x^2+2x}{2-x^2}}=2+3\sqrt{\dfrac{2-x^2}{7x^2+2x}}$

* In der Originalaufgabe von CARDANO steht 10 statt 15. Wer Mut hat, rechne die Aufgabe mit diesem Wert.

24. a) $2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+5=3\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ **b)** $\frac{7\sqrt{\frac{x+1}{x}}+5}{7\sqrt{\frac{x}{x+1}}-5}=6$

25. Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240):

a) $x-(\frac{7}{12}x+4)=\sqrt{x}$ **b)** $3x+4\sqrt{x^2-3x}=20$

c) $3x+4\sqrt{x^2-3x}=x^2+4$ **d)** $x^2=\sqrt{6x}\sqrt{5x}+10x+20$

26. Aus *Lilavati* – »Die Schöne« – von BHĀSKARA II (1115 – nach 1178):

a) § 67: Ardschuna, Prithas Sohn, im Kampf gereizt, schoss einen Köcher Pfeile um Karna zu töten. Mit der Hälfte seiner Pfeile parierte er die seines Gegners, mit dem Vierfachen der Wurzel seines Köcherinhalts tötete er dessen Pferde, mit 6 Pfeilen Salya, und mit 3 Pfeilen zerstörte er Schirm, Standarte und Bogen, mit einem schließlich trennte er den Kopf seines Feindes vom Rumpf. Wie viele Pfeile ließ Ardschuna fliegen?

b) § 68: Die Wurzel aus der Hälfte eines Bienenschwarms flog zu einem Jasminbusch. $\frac{8}{9}$ des Schwarms blieben im Stock. Ein Weibchen schließlich umschwirrte eine Lotosblume, in der ein Männchen gefangen saß, das vom Duft zur Nachtzeit angelockt worden war*. Sag mir, wunderschöne Frau, die Anzahl der Bienen!

c) § 69: Eine Zahl, vermehrt um ihr Drittel und um das 18fache ihrer Wurzel, ergibt 1200. Wie heißt die Zahl?

3.7.2 Die biquadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form $ax^4+bx^2+c=0$ mit $a \neq 0$ lässt sich durch die Substitution $u := x^2$ auf eine quadratische Gleichung der Form $au^2+bu+c=0$ zurückführen. Weil $u^2=(x^2)^2$ ist, nennen wir und auch andere Autoren eine solche Gleichung **biquadratisch****. Gleichungen dieser Art lösten bereits die Babylonier im Zusammenhang mit Gleichungssystemen (siehe **3.8**). Die folgenden zwei Beispiele stammen aus Kapitel I der *Ars magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576).

* Der Lotos öffnet sich nachts und schließt sich bei Tage.

** *bis* (lat.) = *zweimal, auf doppelte Weise.* – Bei DESCARTES (1596–1650) findet man 1628/29 *biquadratum* an Stelle von *quadratumquadratum* zur Bezeichnung der 4. Potenz, bei Christian VON WOLFF (1679 bis 1754) in seinen *Die Anfangsgründe Aller Mathematischen Wissenschaften* 1710 den Ausdruck *biquadratische Aequation* als Bezeichnung für eine allgemeine Gleichung 4. Grades, also eine Gleichung der Form $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, wie es auch heute noch bei manchen Autoren üblich ist. In der 2. Auflage erfolgte dann die Eindeutschung *biquadratische Gleichung*.