# Algebra

**Barth, Friedrich**

**München, 2001**

3.7.2 Die biquadratische Gleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

**24. a)** $2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+5=3\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ **b)** $\frac{7\sqrt{\frac{x+1}{x}}+5}{7\sqrt{\frac{x}{x+1}}-5}=6$

**25.** Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):

**a)** $x-(\frac{7}{12}x+4)=\sqrt{x}$ **b)** $3x+4\sqrt{x^2-3x}=20$

**c)** $3x+4\sqrt{x^2-3x}=x^2+4$ **d)** $x^2=\sqrt{6x}\sqrt{5x}+10x+20$

**26.** Aus *Lilavati* – »Die Schöne« – von BHĀSKARA II (1115–nach 1178):

**a)** § 67: Ardschuna, Prithas Sohn, im Kampf gereizt, schoss einen Köcher Pfeile um Karna zu töten. Mit der Hälfte seiner Pfeile parierte er die seines Gegners, mit dem Vierfachen der Wurzel seines Köcherinhalts tötete er dessen Pferde, mit 6 Pfeilen Salya, und mit 3 Pfeilen zerstörte er Schirm, Standarte und Bogen, mit einem schließlich trennte er den Kopf seines Feindes vom Rumpf. Wie viele Pfeile ließ Ardschuna fliegen?

**b)** § 68: Die Wurzel aus der Hälfte eines Bienenschwarms flog zu einem Jasminbusch. $\frac{8}{9}$ des Schwarms blieben im Stock. Ein Weibchen schließlich umschwirrte eine Lotosblume, in der ein Männchen gefangen saß, das vom Duft zur Nachtzeit angelockt worden war*. Sag mir, wunderschöne Frau, die Anzahl der Bienen!

**c)** § 69: Eine Zahl, vermehrt um ihr Drittel und um das 18fache ihrer Wurzel, ergibt 1200. Wie heißt die Zahl?

### 3.7.2 Die biquadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form $ax^4+bx^2+c=0$ mit $a \neq 0$ lässt sich durch die Substitution $u := x^2$ auf eine quadratische Gleichung der Form $au^2+bu+c=0$ zurückführen. Weil $u^2=(x^2)^2$ ist, nennen wir und auch andere Autoren eine solche Gleichung **biquadratisch****. Gleichungen dieser Art lösten bereits die Babylonier im Zusammenhang mit Gleichungssystemen (siehe **3.8**). Die folgenden zwei Beispiele stammen aus Kapitel I der *Ars magna* (1545) des Geronimo CARDANO (1501–1576).

* Der Lotos öffnet sich nachts und schließt sich bei Tage.

** *bis* (lat.) = *zweimal, auf doppelte Weise.* – Bei DESCARTES (1596–1650) findet man 1628/29 *biquadratum* an Stelle von *quadratumquadratum* zur Bezeichnung der 4. Potenz, bei Christian VON WOLFF (1679 bis 1754) in seinen *Die Anfangsgründe Aller Mathematischen Wissenschaften* 1710 den Ausdruck *biquadratische Aequation* als Bezeichnung für eine allgemeine Gleichung 4. Grades, also eine Gleichung der Form $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, wie es auch heute noch bei manchen Autoren üblich ist. In der 2. Auflage erfolgte dann die Eindeutschung *biquadratische Gleichung*.

**Beispiel 1:**

$x^4 + 12 = 7x^2$ Substitution: $u := x^2$

$u^2 - 7u + 12 = 0$

$u = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(7 \pm 1)$

$u = 3 \vee u = 4.$

Somit muss gelten

$x^2 = 3 \vee x^2 = 4$

$|x| = \sqrt{3} \vee |x| = 2$

$x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} \vee x = -2 \vee x = 2.$

Wir erhalten eine 4-elementige Lösungsmenge: $\{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$.

**Beispiel 2:**

$x^4 + 3x^2 = 28$ Substitution: $u := x^2$

$u^2 + 3u - 28 = 0$

$u = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{121}) = \frac{1}{2}(-3 \pm 11)$

$u = -7 \vee u = 4.$

Somit muss gelten

$x^2 = -7 \vee x^2 = 4$

$x^2 = -7 \vee |x| = 2.$

Da die erste Gleichung widersprüchlich ist, erhalten wir eine 2-elementige Lösungsmenge, nämlich $L = \{\} \cup \{-2; 2\} = \{-2; 2\}$.

Mit einiger Übung kann man sich die Schreibarbeit der Substitution ersparen, wenn man gleich $x^2$ als neue Variable nimmt. Dann schreibt sich Beispiel 1 wie folgt:

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

$(x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{1})$

$x^2 = 3 \vee x^2 = 4$, woraus man wie oben erhält

$|x| = \sqrt{3} \vee |x| = 2$, also $L = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$.

Manchmal lassen sich auch Gleichungen höheren Grades durch eine geeignete Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Auch hierzu wieder ein Beispiel von Geronimo CARDANO, diesmal aus Kapitel VI seiner *Ars magna*.

**Beispiel 3:**

$x^8 + x^4 = 12$ Substitution: $u := x^4$

$u^2 + u - 12 = 0$

$u = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{49}) = \frac{1}{2}(-1 \pm 7)$

$u = -4 \vee u = 3.$

Somit muss gelten

$x^4 = -4 \vee x^4 = 3$ || radizieren

$x^2 = \sqrt{3}$ || radizieren

$|x| = \sqrt{\sqrt{3}}$

$x = -\sqrt{\sqrt{3}} \vee x = \sqrt{\sqrt{3}}.$

Da $x^4 = -4$ eine widersprüchliche Gleichung ist, erhält man als Lösungsmenge $\{-\sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{3}}\}$.

**Aufgaben**

**1.** Aus der *Arithmetica integra* (1544) des Michael Stifel (1487?–1567):
**a)** $2x^4 = 1450 - 8x^2$ **b)** $x^4 = 18x^2 + 648$ **c)** $x^4 - 4x^2 = 2205$
**d)** $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 2538$ **e)** $x^8 = 214\,651\,701 - 20x^4$
**f)** $x^8 = 2000x^4 + 185\,076\,881$ **g)** $x^8 = 20\,000x^4 - 78\,461\,119$

**2.** Aus Kapitel I, VI und XXIV der *Ars magna* (1545) das Geronimo Cardano (1501–1576):
**a)** $x^4 + 12 = 7x^2$ **b)** $x^4 + 12 = 6x^2$ **c)** $x^4 = 2x^2 + 8$
**d)** $x^4 + x^2 = 12$ **e)** $x^4 + 2x^2 = 10$

**3. a)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ **c)** $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$
**d)** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **e)** $x^4 - 20x^2 = 125$ **f)** $12x^4 - 81x^2 - 21 = 0$

**4. a)** $3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ **b)** $9x^4 + 64x^2 = -7$ **c)** $2x^4 - 11x^2 + 16 = 0$

**5. a)** $2x^5 - 39x^3 - 245x = 0$ **b)** $32x^4 - 82x^2 - 405 = 0$

**6.** Aus dem *liber abaci* (1202) des Leonardo von Pisa (um 1170–nach 1240):
$(\frac{1}{3}x^2 + 1)(\frac{1}{4}x^2 + 2) = x^2 + 13$

•**7. a)** $\dfrac{9x^4 - 325x^2 + 36}{3x^2 + 17x - 6} = 0$ **b)** $\dfrac{x^6 - 16x^2}{5x^4 - 19x^2 - 4} = 0$

**8. a)** Beweise: Wenn die drei Koeffizienten einer biquadratischen Gleichung dasselbe Vorzeichen haben, dann ist $L = \{\}$.
**b)** Ist der vorausgehende Satz über biquadratische Gleichungen umkehrbar? (Vgl. Aufgabe **2a** und **4c**.)