Algebra

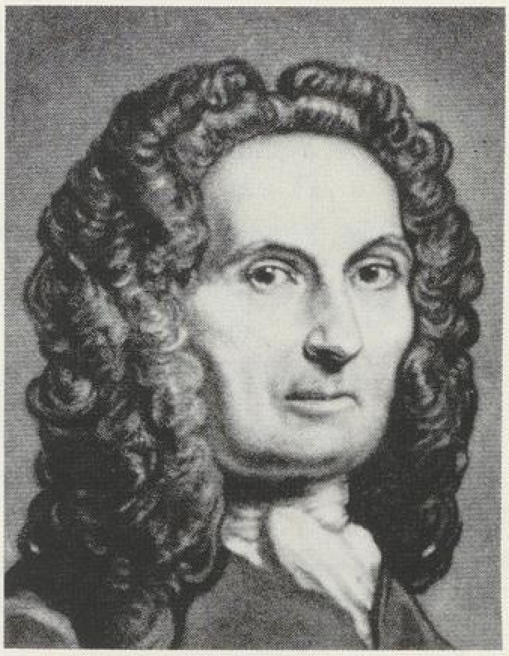
Barth, Friedrich

München, 2001

3.7.4 Reziproke Gleichungen

**3.7.4 Reziproke Gleichungen

Abraham DE MOIVRE (1667–1754) stieß bei seinen Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einen besonderen Typ von Gleichungen, den er 1711 in seiner Abhandlung *De mensura sortis* – »Über ein Maß des Zufalls« – beschrieb und für den er 1730 in seinen *Miscellanea Analytica* – »Allerlei zur Analysis« – wichtige Sätze herleitete. 1733 beschäftigte sich Leonhard EULER (1707–1783) mit diesen Gleichungen und nannte sie wegen einer wichtigen Eigenschaft, die wir gleich beweisen wollen, reziproke Gleichungen. Da sie einer Verallgemeinerung fähig sind, fügt man heute noch »1. Art« bei. Unter Benützung der von DE MOIVRE gegebenen Beschreibung legen wir also fest



1736

Abb. 129.1 Abraham DE MOIVRE (26.5.1667 Vitry-le-François bis 27.11.1754 London) – Gemälde von Joseph HIGHMORE (1692–1780)

Definition 139.1: Eine Gleichung heißt **reziproke Gleichung 1. Art**, wenn die vom Anfang und vom Ende des Gleichungspolynoms gleich weit entfernten Koeffizienten jeweils gleich sind.

Beispiele:

1) $3x^2 + 5x + 3 = 0$ Der erste und der letzte Koeffizient sind gleich.

2) $-\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$

3) $5x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 0$

(zu 2 und 3:) Der erste und der letzte Koeffizient sind gleich, ebenso der zweite und der vorletzte.

Offensichtlich kann 0 nicht Lösung einer reziproken Gleichung sein, da der letzte Koeffizient gleich dem ersten Koeffizienten und damit ungleich null ist. Der folgende Satz macht nun den von EULER gegebenen Namen verständlich.

Satz 129.1: Ist r Lösung einer reziproken Gleichung 1. Art, so ist auch der reziproke Wert $\frac{1}{r}$ Lösung dieser Gleichung.

Beweis: Der Beweis sei beispielhaft für eine Gleichung 4. Grades vorgeführt. Der allgemeine Beweis verläuft analog.

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (mit $a \neq 0$) ist eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 4. Wenn r Lösung dieser Gleichung ist, dann gilt

$ar^4 + br^3 + cr^2 + br + a = 0$.

Da $r \neq 0$ ist, können wir r^4 ausklammern und erhalten

$$r^4\left(a + b\left(\frac{1}{r}\right) + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right)^3 + a\left(\frac{1}{r}\right)^4\right) = 0.$$

Da r^4 nicht null werden kann, muss die Klammer null sein. In der Klammer steht aber, von rechts nach links gelesen, der gegebene Gleichungsterm, in den an Stelle von x der Wert $\frac{1}{r}$ eingesetzt wurde. Also ist $\frac{1}{r}$ Lösung, was zu zeigen war.

Wie findet man aber nun die Lösungsmenge einer reziproken Gleichung 1. Art? Auch hier wollen wir das Wesentliche wieder anhand von Beispielen zeigen.

Beispiel 1: Der Grad der reziproken Gleichung 1. Art ist gerade.

$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

Da null keine Lösung ist, dürfen wir durch x^2 dividieren und erhalten

$$6x^2 + 5x - 38 + 5 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

Joseph Louis de Lagrange (1736–1813) schlug 1770 die Substitution

$x + \frac{1}{x} =: z$ vor.

Durch Quadrieren erhält man

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2$, sodass die letzte Gleichung übergeht in

$6(z^2 - 2) + 5z - 38 = 0$

$6z^2 + 5z - 50 = 0$

$z = -\frac{10}{3} \vee z = \frac{5}{2}$.

Machen wir die Substitution wieder rückgängig, dann erhalten wir

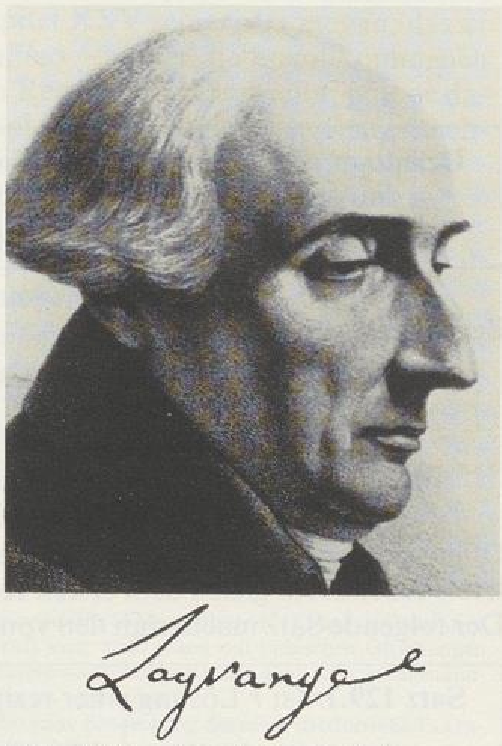


Abb. 130.1 Joseph Louis de Lagrange (25.1.1736 Turin–10.4.1813 Paris)

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \vee x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$$

was durch Multiplikation mit dem Hauptnenner auf zwei reziproke quadratische Gleichungen führt:

$$3x^2+10x+3=0 \quad \vee \quad 2x^2-5x+2=0$$
$$x=-3 \vee x=-\tfrac{1}{3} \quad \vee \quad x=\tfrac{1}{2} \vee x=2.$$

Die gesuchte Lösungsmenge lautet somit $L=\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$.

Ist der Grad einer reziproken Gleichung 1. Art ungerade, dann gilt

Satz 131.1: Eine reziproke Gleichung 1. Art ungeraden Grades hat stets die Lösung -1.

Beweis: $ax^3+bx^2+bx+a=0$ ist eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 3. Setzt man -1 ein, so erhält man $-a+b-b+a=0$, was zu zeigen war. Der allgemeine Beweis verläuft analog.

In Satz 125.1 haben wir gezeigt, dass man eine kubische Gleichung faktorisieren kann, wenn man eine Lösung kennt. Dieser Satz gilt allgemein, wenn der Gleichungsterm ein Polynom ist.* Damit lässt sich eine reziproke Gleichung 1. Art ungeraden Grades auf eine Gleichung kleineren Grades reduzieren. Dazu

Beispiel 2: $12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=0$

Die Division durch $(x-(-1))$ liefert
$12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=$
$=(x+1)(12x^4-4x^3-41x^2-4x+12)$,
wie du leicht nachrechnen kannst. Setzen wir den 2. Faktor null, so haben wir in $12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0$ wieder eine reziproke Gleichung 1. Art vor uns. Dieser Sachverhalt gilt allgemein, wie man beweisen kann. Wie in Beispiel 1 substituiert man $z := x+\frac{1}{x}$ und erhält
$12z^2-4z-65=0 \Leftrightarrow z=-\frac{13}{6} \vee z=\frac{5}{2}$.

Daraus gewinnt man, indem man die Substitution rückgängig macht, schließlich die beiden quadratischen reziproken Gleichungen 1. Art
$6x^2+13x+6=0 \quad \vee \quad 2x^2-5x+2=0$
mit $\{-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\}$ bzw. $\{\frac{1}{2}, 2\}$ als Lösungsmengen, sodass man nun die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung 5. Grades angeben kann zu
$L=\{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$.

* Beweis: Dividiert man ein Polynom $P(x)$ durch $(x-x_0)$, so erhält man ein Polynom $Q(x)$ und einen Rest R; es gilt also $P(x)=(x-x_0)Q(x)+R$. Den Rest R kann man aber leicht bestimmen. Setzt man nämlich an Stelle von x den Wert x_0 ein, so erhält man $P(x_0)=(x_0-x_0)Q(x_0)+R=0+R=R$, d.h., R ist der Wert des Polynoms $P(x)$ an der Stelle x_0. Ist nun x_0 eine Nullstelle des Polynoms, dann ist $P(x_0)=0$, also auch $R=0$, und es gilt $P(x)=(x-x_0)Q(x)$; das Polynom ist faktorisiert.

Die eingangs angekündigte Erweiterung des Begriffs der reziproken Gleichung liefert

Definition 132.1: Eine Gleichung heißt **reziproke Gleichung 2. Art**, wenn die vom Anfang und vom Ende des Gleichungspolynoms gleich weit entfernten Koeffizienten dem Betrage nach jeweils gleich sind, aber verschiedenes Vorzeichen haben.

Folgerung: Ist der Grad einer reziproken Gleichung 2. Art gerade, z. B. $2k$, so muss für den mittleren Koeffizienten a_k gelten $a_k = -a_k$, d.h., der mittlere Koeffizient muss den Wert null haben.

Beispiele:

1) $3x^2 - 3 = 0$ — Der erste und der letzte Koeffizient unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

2) $-\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$

3) $5x^4 - 3x^3 + 3x - 5 = 0$

Der erste und der letzte Koeffizient unterscheiden sich nur im Vorzeichen, ebenso der zweite und der vorletzte.

Satz 129.1 gilt auch für reziproke Gleichungen 2. Art, wie du selbst leicht beweisen kannst (Aufgabe 133/**1**). An Stelle von Satz 131.1 gilt

Satz 132.1: Jede reziproke Gleichung 2. Art hat die Lösung $+1$.

Von der Richtigkeit dieses Satzes kannst du dich durch Einsetzen in die obigen Beispiele überzeugen; der Beweis ist leicht (Aufgabe 133/**2**).

Dividiert man eine reziproke Gleichung 2. Art durch $x - 1$, so erhält man immer, wie man zeigen kann, eine reziproke Gleichung 1. Art. Wir begnügen uns zum Nachweis auch hier mit einem Beispiel, nämlich

Beispiel 3:

$x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$ ist eine reziproke Gleichung 2. Art. Somit lässt sich der links stehende Term durch $x - 1$ dividieren und man erhält die Faktorisierung

$(x-1)(x^3 - 5x^2 - 5x - 1) = 0$.

Setzt man die Klammer null, so erhält man eine reziproke Gleichung 1. Art vom Grad 3. Diese hat -1 als Lösung. Daher kann man das Polynom in der Klammer durch $x + 1$ dividieren und erhält die Faktorisierung

$(x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 1) = 0$.

Setzt man nun den 3. Faktor null, so erhält man eine quadratische Gleichung – sie ist reziprok von 1. Art – mit den Lösungen $3 \pm \sqrt{8}$. Die Ausgangsgleichung $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$ hat also die Lösungsmenge $L = \{3 - \sqrt{8}, -1, 1, 3 + \sqrt{8}\}$.

Aufgaben

1. Beweise die Gültigkeit von Satz 129.1 für eine reziproke Gleichung 2. Art. Unterscheide dabei, ob sie geraden oder ungeraden Grades ist, und führe den Beweis für eine Gleichung 3. und für eine Gleichung 4. Grades.

2. Zeige, dass eine reziproke Gleichung 2. Art stets 1 als Lösung besitzt. Führe den Beweis für eine Gleichung 3. und für eine Gleichung 4. Grades.

3. a) $12x^3 - 13x^2 - 13x + 1 = 0$ **b)** $x^3 - 5x^2 + 5x + 1 = 0$

4. a) $20x^4 + 19x^3 - 402x^2 + 19x + 20 = 0$
b) $20x^4 - 189x^3 + 482x^2 - 189x + 20 = 0$

5. a) $18x^4 + 51x^3 - 334x^2 + 51x + 18 = 0$
b) $36x^4 - 9x^3 - 103x^2 - 9x + 36 = 0$

6. a) $7x^4 + 36x^3 - 86x^2 + 36x + 7 = 0$
b) $10x^4 - 29x^3 + 20x^2 - 29x + 10 = 0$

7. a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$
b) $20x^4 + 16x^3 + 19x^2 + 16x + 20 = 0$

8. a) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 1 = 0$

9. a) $16x^4 - 72x^3 + 113x^2 - 72x + 16 = 0$
b) $2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 9x + 2 = 0$

10. Beweise für reziproke Gleichungen 1. Art vom Grad 4:

a) Die Lösungsmenge einer solchen Gleichung ist genau dann nicht leer, wenn die durch die Substitution $z := x + \frac{1}{x}$ gewonnene Hilfsgleichung mindestens eine Lösung hat, welche die Bedingung $|z| \geqq 2$ erfüllt.

b) Eine Doppellösung tritt genau dann auf, wenn die Hilfsgleichung die Lösung 2 oder -2 hat. Wie heißt die zugehörige Doppellösung?

c) Löst z_1 die Hilfsgleichung, so haben die zugehörigen Lösungen der Ausgangsgleichung stets dasselbe Vorzeichen wie z_1, wenn $|z_1| > 2$ ist.

11. a) $12x^5 + 23x^4 - 135x^3 - 135x^2 + 23x + 12 = 0$
b) $2x^5 - 7x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$
c) $2x^6 - 13x^5 + 34x^4 - 46x^3 + 34x^2 - 13x + 2 = 0$

12. a) $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$ **b)** $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

13. a) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ **b)** $x^4 - 10x^3 + 10x - 1 = 0$
c) $x^4 - 1 = 0$

14. a) $12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + 16x - 12 = 0$
b) $5x^5 - 31x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 31x - 5 = 0$ **c)** $x^5 - 1 = 0$

15. a) $x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$
b) $2x^8 - 5x^7 - 4x^6 + 15x^5 - 15x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0$