Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

3.8 Gleichungssysteme, die auf quadratische Gleichungen führen

**3.8 Gleichungssysteme, die auf quadratische Gleichungen führen

Im letzten Jahr hast du lineare Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten kennen gelernt. Dabei kamen die Variablen nur in der 1. Potenz vor und, ohne dass es dir vielleicht aufgefallen ist, auch nicht durch Multiplikation miteinander verbunden. Tritt also ein Term der Form x^2, y^2 oder xy auf, dann handelt es sich um ein quadratisches und nicht mehr um ein lineares Gleichungssystem. Besonders einfach sind solche Systeme, die aus einer linearen und einer quadratischen Gleichung bestehen. Dass die Lösung solcher Systeme erst mit Hilfe von quadratischen Gleichungen möglich ist, zeigt

Beispiel 1:

Auf Seite I des Keilschrifttextes AO 8862, der um 2000 v. Chr. entstanden ist und zu den ältesten babylonischen Texten gehört*, steht:
NISABA [Schutzpatronin der Wissenschaften] Länge, Breite. Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Was die Länge über die Breite hinausgeht, habe ich zur Fläche addiert, und es macht 183. Wiederum Länge und Breite addiert, gibt 27. Länge, Breite und Fläche ist was?
Der Text führt zu Beginn die beiden Unbekannten »Länge« und »Breite« ein; ihr Produkt heißt »Fläche«. Wählen wir x für »Länge« und y für »Breite«, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & xy + (x - y) = 183 \\ \text{II} & x + y = 27 \end{array} \qquad \text{Nebenbedingung: } x > y$$

Hier löst man am besten II z. B. nach y auf und setzt $y = 27 - x$ in I ein.

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & x(27 - x) + (x - 27 + x) = 183 \\ \text{II}' & y = 27 - x \\ \hline \text{I}' & x^2 - 29x + 210 = 0 \\ \text{II}' & y = 27 - x \\ \hline \text{I}' & x = 14 \quad \vee \quad x = 15 \\ \text{II}' & y = 27 - x \end{array}$$

Die Lösungsmenge $L_{\text{I}'}$ kann in einem x-y-Koordinatensystem (Abbildung 134.1) durch ein Parallelenpaar dargestellt werden, $L_{\text{II}'}$ durch eine Gerade. Die Lösungsmenge L des Gleichungssystems ergibt sich als Schnittmenge $L_{\text{I}'} \cap L_{\text{II}'}$ zu
$L = \{(14|13), (15|12)\}$.

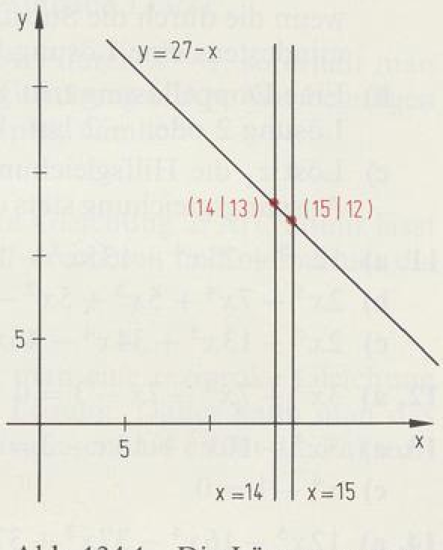

Abb. 134.1 Die Lösungsmenge von Beispiel 1

* gefunden in Larsa, aufbewahrt in Paris im Louvre in der Abteilung Antiquités Orientales. Es handelt sich um ein vierseitiges, auf allen Seiten beschriebenes Prisma der Höhe 16,8 cm und der Basisseite 7,3 cm.

Praktisch geht man so vor, dass man zu jedem aus I′ erhaltenen x-Wert den zugehörigen y-Wert aus II′ errechnet:

$x = 14 \Rightarrow y = 13$ und $x = 15 \Rightarrow y = 12$.

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems besteht also aus 2 Paaren. Wir erhalten somit zwei verschiedene Antworten auf die gestellte Frage:

Lösung 1: Länge = 14, Breite = 13, Fläche = 182,

Lösung 2: Länge = 15, Breite = 12, Fläche = 180.

Die Nebenbedingung ist jedesmal erfüllt. Eine Probe ist nicht nötig, da nur Äquivalenzumformungen vorgenommen wurden. – Auf der Keilschrifttafel ist übrigens nur Lösung 2 angegeben.

Der hier eingeschlagene Lösungsweg führt bei jedem derartigen Gleichungssystem zum Ziel. Die lineare Gleichung wird nach einer der beiden Unbekannten aufgelöst und der gefundene Ausdruck in die quadratische Gleichung eingesetzt. Man hat dann als neues äquivalentes System im Allgemeinen eine quadratische Gleichung mit nur einer Unbekannten und die lineare Gleichung. Je nachdem, ob die quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösung hat, besteht die Lösungsmenge des Systems aus zwei, einem oder keinem Zahlenpaar.
Besteht hingegen das System aus zwei quadratischen Gleichungen, dann kann der Lösungsweg schließlich bis zu einer Gleichung 4. Grades für eine Unbekannte führen, die du unter Umständen nicht lösen kannst. Sehr leicht lassen sich dagegen Systeme lösen, in deren Gleichungen nur die Quadrate der Unbekannten vorkommen. Dazu die folgenden beiden Beispiele.

Beispiel 2:

I $2x^2 - y^2 = -7$
II $6x^2 + 2y^2 = 104$

Durch die Substitution $u := x^2$, $v := y^2$ wird daraus ein lineares System:

I′ $2u - v = -7$
II′ $6u + 2v = 104$

I″ $u = 9$
II″ $v = 25$

Das Ausgangssystem ist also äquivalent mit

I″ $x^2 = 9$
II″ $y^2 = 25$

I″ $x = -3 \quad \vee \quad x = 3$
II″ $y = -5 \quad \vee \quad y = 5$.

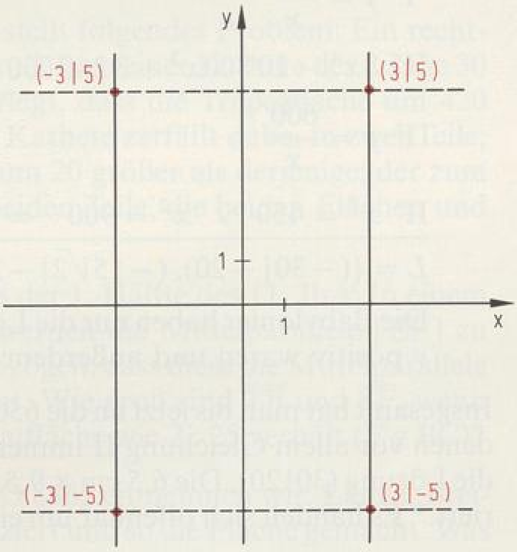

Abb. 135.1 Die Lösungsmenge von Beispiel 2
——— $L_{I''}$ ----- $L_{II''}$

$L_{\mathrm{I}''}$ lässt sich als Parallelenpaar zur y-Achse, $L_{\mathrm{II}''}$ als Parallelenpaar zur x-Achse graphisch darstellen (Abbildung 135.1). Für L erhält man $L = L_{\mathrm{I}''} \cap L_{\mathrm{II}''} = \{(-3|-5), (-3|5), (3|-5), (3|5)\}$.

Ebenso wie in Beispiel 2 geht man vor in

Beispiel 3:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I}\ 3x^2 - 5y^2 = 20 & \mathrm{I}'\ x^2 = 5 \\ \mathrm{II}\ 7x^2 + 9y^2 = 26 & \Leftrightarrow \quad \mathrm{II}'\ y^2 = -1 \end{array}$$

Da $L_{\mathrm{II}'} = \{\ \}$, ist auch $L = L_{\mathrm{I}'} \cap L_{\mathrm{II}'} = \{\ \}$.

Zum Abschluss behandeln wir noch ein Gleichungssystem, das auf eine biquadratische Gleichung führt. Es stammt von der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 8390.

Beispiel 4:

Länge und Breite habe ich multipliziert, 600 ist die Fläche. Die Länge habe ich mit sich selbst multipliziert. Das ergibt eine Fläche, die das 9fache der Fläche ist, die man erhält, wenn man das, was die Länge über die Breite hinausgeht, mit sich selbst multipliziert. Länge und Breite ist was?

Bedeute x die »Länge« und y die »Breite«, dann erhält man

$$\mathrm{I}\ \ xy = 600$$
$$\mathrm{II}\ \ x^2 = 9(x-y)^2$$

$$\mathrm{I}'\ \ y = \frac{600}{x}$$
$$\mathrm{II}'\ \ 8x^4 - 10\,800x^2 + 3\,240\,000 = 0$$

$$\mathrm{I}'\ \ y = \frac{600}{x}$$
$$\mathrm{II}'\ \ x^2 = 450 \ \vee\ x^2 = 900 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 15\sqrt{2} \ \vee\ x = \pm 30$$

$$L = \{(-30|-20), (-15\sqrt{2}|-20\sqrt{2}), (15\sqrt{2}|20\sqrt{2}), (30|20)\}.$$

Die Babylonier haben nur die Lösung (30|20) angegeben, da für sie x und y positiv waren und außerdem $x > y$ gelten sollte.

Insgesamt hat man bis jetzt an die 650 Aufgaben von diesem Typ gefunden, bei denen vor allem Gleichung II immer wieder verändert wird. Alle aber haben die Lösung (30|20). Die 6,5 cm × 9,5 cm großen Täfelchen sind durchnummeriert.* Es handelt sich offenbar um einen Satz von Übungsaufgaben, der einst

* Da sie aus Raubgrabungen stammen, lassen sie sich nur schwer datieren. Man vermutet, dass sie mittelbabylonisch sind, d.h. aus der Zeit der Kassiten stammen (ca. 1530–1160 v. Chr.). Sie enthalten fast keinen Worttext mehr, sondern nur mehr mathematische Zeichen, stellen also eine Art babylonischer Zeichenalgebra dar.

aus mindestens 14 solcher Täfelchen bestand. Wir dürfen daraus wohl schließen, dass bereits die Babylonier erkannt hatten, dass Mathematik nur dadurch gelernt werden kann, dass man viel übt. Für dich folgt daher eine Reihe von

Aufgaben

1. a) $x + y = 7$, $xy = 10$ **b)** $xy = 6$, $3x - y = 3$ **c)** $x + 3 = 4 + y$, $xy = 2$

2. a) $xy = 9 + x$, $2x - y = 2$ **b)** $2xy - x + 2y = 1$, $x + 2y = 0$ **c)** $3x + 2y - 4xy = -5$, $5x + 2y = 12$

3. Seite I und Seite III des Keilschrifttextes AO 8862 liefern die Systeme

a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + xy = 15$, $x + y = 7$ **b)** $x + y = xy$, $x + y + xy = 9$

4. In Susa fand man folgende Keilschrifttexte aus altbabylonischer Zeit:

a)* $\frac{1}{7}x + \frac{1}{7}y + \frac{1}{7}xy = 2$, $x + y = 5\frac{5}{6}$ **b)** $xy + x + y = 1$, $\frac{1}{17}(3x + 4y) + y = \frac{1}{2}$

5. Eine interessante Aufgabe enthält der altbabylonische Keilschrifttext** VAT 7528, der, auf unser Maßsystem umgerechnet, lautet:
Gebaut wurde ein kleiner Kanal von 2160 m Länge und $\frac{3}{4}$ m Tiefe. Sein Querschnitt ist trapezförmig und misst oben 1 m, unten $\frac{1}{2}$ m. Ein Arbeiter konnte täglich 6 m^3 Erde ausheben. Die Anzahl der Arbeiter zu der der Arbeitstage addiert ergibt $29\frac{1}{4}$. Wie viele Leute haben wie viele Tage gearbeitet?

6. VAT 8512, ebenfalls altbabylonisch, stellt folgendes Problem: Ein rechtwinkliges Dreieck wird durch eine Parallele zu einer Kathete der Länge 30 in ein Dreieck und ein Trapez so zerlegt, dass die Trapezfläche um 420 größer ist als die Dreiecksfläche. Die Kathete zerfällt dabei in zwei Teile; der Teil, der zum Dreieck gehört, ist um 20 größer als derjenige, der zum Trapez gehört. Wie groß sind diese beiden Teile, die beiden Flächen und die parallele Strecke?

7. Aus einer arabischen Handschrift aus der 1. Hälfte des 11. Jh.s: In einem Quadrat ABCD der Seitenlänge 10 werden die Mittelparallele [EF] zu [AB] und von A aus eine Gerade so gezogen, dass diese die Mittelparallele in S und die Seite [BC] in T schneidet. Wie groß sind $\overline{TF}$ und $\overline{SF}$, wenn die Fläche von ΔSTF sich zur Quadratfläche wie 2 : 25 verhält (F ∈ BC)?

8. Der Seite II des Keilschriftprismas AO 8862 entnehmen wir: Länge, Breite. Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Was die Länge über die Breite hinausgeht, habe ich mit der Summe aus Länge

* SKT 362, Straßburger Keilschrift-Texte, aufbewahrt in Straßburg, Bibliothèque Nationale et Universitaire.
** aufbewahrt in Berlin, Staatliche Museen: Vorderasiatische Abteilung; Tontafeln.

und Breite multipliziert; dazu habe ich meine Fläche addiert. Es macht 4400. Dann habe ich Länge und Breite addiert, das ergibt 100.

9. Die Aufgaben 8–10, 14 und 19 aus der altbabylonischen Keilschrifttafel BM 13901 (siehe Seite 88f. und Aufgabe 97/**24**):

a) $x^2 + y^2 = 1300$, $x + y = 50$ **b)** $x^2 + y^2 = 1300$, $x - y = 10$ **c)** $x^2 + y^2 = 21\frac{1}{4}$, $y - x = -\frac{1}{7}x$

d) $x^2 + y^2 = 1525$, $y = \frac{2}{3}x + 5$ **e)** $x^2 + y^2 + (x - y)^2 = 1400$, $x + y = 50$

10. Aus der altbabylonischen Keilschrifttafel SKT 363:

a) $x^2 + y^2 = 1000$, $y = \frac{2}{3}x - 10$ **b)** $x^2 + y^2 = 2225$, $y = \frac{2}{3}(x - 10) + 5$ **c)** $x^2 + y^2 = 3125$, $y = \frac{2}{3}(x - 20) + 5$

11. a) $x^2 - 3x + y = 2$, $x + 3y = 6$ **b)** $2y^2 - 5x + 3y = 0$, $-2x + 7y = 5$

c) $3x + 2y = 3$, $2x^2 - y^2 = -7$ **d)** $4x - 3y = 11$, $2x^2 + 3y^2 = 11$

12. a) Aus dem *liber abaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240):

$x + y = 10 \wedge \dfrac{xy}{x - y} = \sqrt{6}$. Mache die Probe!

b) $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$, $\dfrac{y - 1{,}8}{x - 4} = \dfrac{9}{20}$ **c)** $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{9}y^2 = 1$, $\dfrac{y + 4}{x - 4} = -\dfrac{3}{4}$

13. a) $x^2 - 2xy - y^2 = -4$, $x - 5y = 6$ (!)**b)** $x^2 - 2xy + y^2 + 4 = 0$, $x - 5y - 6 = 0$

14. a) $2x^2 + xy + y^2 - 2x + y = 6$, $2x - 3y = 9$

b) $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 24x + 68y - 41 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$

15. a) $x^2 + 2y^2 = 9$, $3x^2 - y^2 = -1$ **b)** $2x^2 + 5y^2 = 47$, $5x^2 + 2y^2 = 23$

16. a) $7x^2 - 2y^2 + 32 = 0$, $3x^2 + 5y^2 - 80 = 0$ **b)** $6x^2 + 2y^2 = 6$, $4x^2 - 3y^2 = 43$

17. a) $11x^2 - 7y^2 = 0$, $-8x^2 + 5y^2 = 0$ **b)** $11x^2 - 7y^2 = -2$, $-8x^2 + 5y^2 = 0$

18. a) $x^2 + 3y^2 = 3$
$6x^2 - 2y^2 = 13$

b) $5x^2 + 9y^2 - 32{,}2 = 0$
$4x^2 - 3y^2 + \frac{193}{75} = 0$

19. a) $3x^2 - 5y^2 = 0$
$2x^2 - 7y^2 = 11$

b) $4x^2 - 3y^2 = 7$
$3x^2 + 5y^2 = 56$

•**20. a)** $2x^2 - 3x + 2y - 3 = 0$
$5x^2 - 0{,}5x + 3y - 7 = 0$

b) $2x + 5y + 2xy = 3$
$x - 3y - 4xy = 33$

c) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$
$(x+2)^2 + (y-7)^2 = 25$

d) $x + 2x^2 + 3y - 6y^2 = 28$
$x - x^2 - 2y + 3y^2 = -20$

21. a) $x^2 + 2x + 4y - 47 = 0$
$5x^2 - 25x + 6y - 18 = 0$

b) $2x^2 + y^2 - 10x = 13$
$5x^2 - 2y^2 + 15x = 0$

c) $y^2 + 2xy + 3y = 0$
$3y^2 - 3xy - y = 30$

•**d)** $(x-2)^2 - (y+1)^2 = -24$
$3x^2 + y^2 - 12x + 2y = 87$

22. Die auf Seite 136 erwähnte Aufgabensammlung aus kassitischer Zeit befindet sich fast vollständig in der Yale Babylonian Collection von New Haven (USA). Die auf der Tafel YBC 4697 angegebenen Gleichungssysteme löst man am besten mit der Substitution $x := u + v$ und $y := u - v$. Die erste Gleichung heißt immer $xy = 600$, die zweite dagegen

a) $\frac{1}{3}(x+y) + \frac{1}{60}(x-y)^2 = 18\frac{2}{3}$,

b) $\frac{1}{3}(x+y) - \frac{1}{60}(x-y)^2 = 15$,

c) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}(x+y) + \frac{1}{60}(x-y)^2 = 3\frac{1}{3}$.

23. a) $x^2 + y^2 = 10$
$x^2 y^2 = 9$

b) $x^2 - 8y^2 = 23$
$4(xy)^2 = 25$

c) $x^4 - 3x^2 + 2y^2 = 6$
$4x^2 - 5y^2 = -16$

d) $x^4 - y^4 = 65$
$2x^2 + 3y^2 = 30$

24. a) $(x+1)^2 + 3(y+3)^2 = 12$
$2(x+1) - 7(y+3) = -1$

:b) $2(2x - 3y + 7)^2 - 3(4x - 2y + 5)^2 = 5$
$5(2x - 3y + 7)^2 - 7(4x - 2y + 5)^2 = 13$

25. a) $3 \cdot \dfrac{1}{x} - 2 \cdot \dfrac{1}{y} = 4$

$3 \cdot \dfrac{1}{x^2} + 8 \cdot \dfrac{1}{y^2} = 5$

•**b)** $18 \cdot \dfrac{1}{x^2} - 7 \cdot \dfrac{1}{y^2} = 2$

$6 \cdot \dfrac{1}{x^2} + 3 \cdot \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{2}{3}$

26. a) Aufgabe 12 aus dem Keilschrifttext BM 13901 ergibt das System
$x^2 + y^2 = 1300 \quad \wedge \quad xy = 600$.

b) Aufgabe 22 der Tafel YBC 4668 aus kassitischer Zeit ergibt

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=2\tfrac{1}{6} \quad \wedge \quad xy=600.$$

c) Aufgabe 25 der Tafel YBC 4668 aus kassitischer Zeit ergibt

$$\frac{x}{y}-\frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=1\tfrac{1}{6} \quad \wedge \quad xy=600.$$

27. In Susa fand man auf einer Keilschrifttafel den Text XIX, Problem D:
$xy=1200 \quad \wedge \quad x\cdot x^2\sqrt{x^2+y^2}=3\,200\,000.$

28. a) $x+2=y-1$
$\sqrt{3x+2y}=2x$

b) $2-2x=(y+4)^2$
$\sqrt{x^2+y^2}=7-x$

29. a) $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \qquad \sqrt{x^2-6x-y^2}=\frac{1}{3}y$

•b) $\sqrt{3x+y}+\sqrt{2x-y}=\sqrt{7x+2y}$
$\sqrt{\sqrt{4x^2+y^2+4xy}-2x}-3+x-y=\sqrt{3x-1}$

30. Besteht ein Gleichungssystem mit zwei Variablen nur aus einer Gleichung, so ist es unterbestimmt. Stelle die Lösungsmengen der folgenden unterbestimmten Systeme graphisch dar.

a) $x^2+y^2=0$
b) $(x-3)^2+(y+2)^2=0$
c) $x^2-y^2=0$
d) $(x+y)^2=4$
e) $x(x-2y)=0$
f) $y^2-3xy+2y=0$
•g) $\sqrt{x^2}+y=1$
•h) $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=1$

•31. Die beiden folgenden ersten Aufgaben sind die Nr. 94 bzw. 96 aus Kapitel LXVI der 1539 erschienenen *Practica Arithmeticae* des Geronimo Cardano (1501–1576). Michael Stifel (1487?–1567) bringt sie 1544 in seiner *Arithmetica integra* und fügt als weitere Beispiele die beiden anderen Aufgaben an. – Zur Lösung raten wir, zuerst xy zu berechnen.

a) $(x-y)^2=xy$
$x^2+y^2=20$

b) $x+y=xy$
$x^2+y^2+(x+y)=20$

c) $x^2+y^2=52$
$xy-x-y=14$

d) $x^2+y^2=52$
$xy+x+y=34$

32. In Kapitel LXI seiner *Practica Arithmeticae* behandelt Cardano ein überbestimmtes Gleichungssystem, für das Stifel bessere Zahlen wählt, damit die Aufgabe aufgeht:
Zerlege 468 in zwei Summanden. Das Produkt aus dem größeren Teil und dem Quadrat des kleineren Teils soll 5 359 375 ergeben, das Produkt aus dem kleineren Teil und dem Quadrat des größeren hingegen 14 706 125. Wie heißen die Summanden?

Die folgenden Aufgaben ergeben Gleichungssysteme für 3 und mehr Unbekannte. Sie stammen aus Kapitel LXVI der *Practica Arithmeticae* (1539) des Geronimo CARDANO (1501–1576). Michael STIFEL (1487?–1567) fand sie so interessant, dass er sie ganz am Ende seiner *Arithmetica integra* (1544) bringt. Angeregt durch sie, fügt er gelegentlich ergänzende Aufgaben hinzu.

33. *Aufgabe 78:* Zerlege 14 so in 3 Summanden, dass sie in stetiger Proportion zueinander stehen* und dass die Summe aus dem 2fachen des ersten, dem 3fachen des zweiten und dem 4fachen des dritten 36 ergibt.

Abb. 141.1 Titelblatt der *Practica Arithmeticae* von 1539 des Geronimo CARDANO (1501–1576)** und dessen Unterschrift.

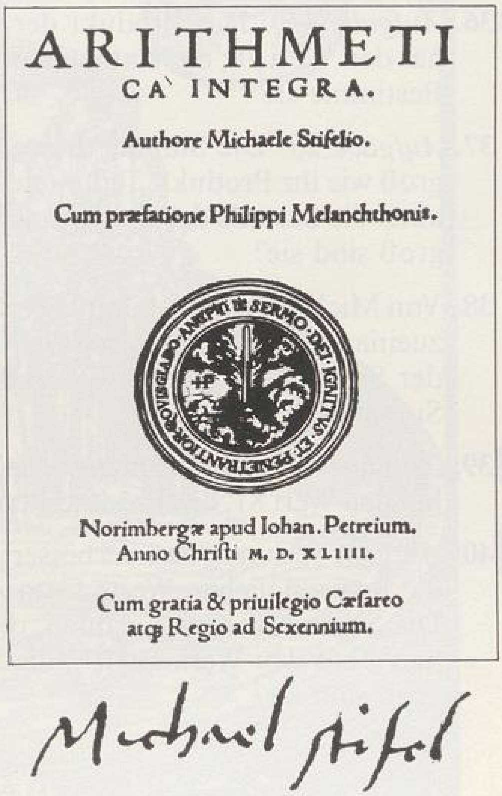

Abb. 141.2 Titelblatt der *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – (1544) von Michael STIFEL (1487? Esslingen bis 19.4.1567 Jena) und dessen Unterschrift. Ein Bildnis ist nicht überliefert.***

* 3 Größen a, b, c bzw. 4 Größen a, b, c, d stehen in stetiger Proportion zueinander oder verhalten sich stetig, wenn $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = c : d$ gilt.

** Des Hieronimus C. CARDANUS mailändischen Arztes, einzigartige Handhabung der Arithmetik und des Messens. Was in ihr unter anderen enthalten ist, legt er auf der nächsten Seite dar.
Die Umschrift NEMO PROPHETA ACCEPTUS IN PATRIA um das Bildnis ist eine Anspielung auf Matth. 13,57, das im Deutschen zu »Der Prophet gilt nichts in seinem Vaterlande« verkürzt wird.

*** Auf dem Titelblatt liest man ferner: Mit einem Vorwort Philipp MELANCHTHONS. Zu Nürnberg bei Johann PETREIUS. Im Jahre Christi 1544. Mit der Gunst und dem kaiserlichen und königlichen Privileg für einen Zeitraum von sechs Jahren. Die Umschrift um das Flammenschwert lautet SERMO DEI IGNITUS ET PENETRANTIOR QUOVIS GLADIO ANCIPITI, d.h.: Die Sprache Gottes ist feurig und durchdringender als jedes zweischneidige Schwert. – Am Ende schreibt STIFEL, dass er das Manuskript mehr als ein Jahrfünft zurückgehalten habe; es war also bereits 1539 fertig. – Die in der 1. und 2. Auflage wiedergegebene Unterschrift ist kein Autograph STIFELS.

34. Michael Stifel verwandelt die vorstehende Aufgabe in:
Zerlege 182 so in 3 Summanden, dass sie in stetiger Proportion zueinander stehen*. Bildet man dann die Summe der 3 möglichen Produkte aus je zweien von ihnen, so erhält man 7644. Wie heißen die Teile?

35. Michael Stifel ergänzt die vorstehende Aufgabe durch:
Zerlege 78 in 3 Summanden, die sich stetig verhalten* und für die gilt: Teilt man 78 durch jeweils einen der Summanden, so ist die Summe dieser drei Quotienten $18\frac{7}{9}$. Wie groß sind die Summanden?

36. *Aufgabe 110:* Das Produkt der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks hat den Wert 10; die Katheten und die Hypotenuse verhalten sich stetig*. Bestimme sie.

37. *Aufgabe 28:* Die Summe dreier Zahlen, die sich stetig verhalten*, ist so groß wie ihr Produkt. Teilt man 25 durch jeweils eine von ihnen, so ergibt auch die Summe der drei Quotienten die Summe dieser drei Zahlen. Wie groß sind sie?

38. Von Michael Stifel stammt: Zerlege 76 in drei Summanden, die sich stetig zueinander verhalten*, sodass das Produkt aus dem mittleren Glied mit der Summe der beiden äußeren Glieder 1248 ergibt. Wie groß sind die Summanden?

39. *Aufgabe 112:* Vier Zahlen verhalten sich stetig zueinander*. Ihr Produkt hat den Wert 81, das Produkt der beiden ersten den Wert 6. Wie heißen sie?

40. *Aufgabe 95* hat Stifel verbessert, sodass sie aufgeht. In Klammern stehen die ursprünglichen Werte Cardanos:
Die Summe von vier Zahlen, die in stetiger Proportion zueinander stehen*, hat den Wert 45 (10); die Summe ihrer Quadrate ist 765 (60). Wie groß sind sie?

* 3 Größen a, b, c bzw. 4 Größen a, b, c, d stehen in stetiger Proportion zueinander oder verhalten sich stetig, wenn $a : b = b : c$ bzw. $a : b = b : c = c : d$ gilt.