Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

4 Quadratfunktion und Wurzelfunktion

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

4 Quadratfunktion und Wurzelfunktion

NOVA SCIENTIA INVENTA DA NICOLO TARTALEA.B.

Disciplinæ Mathematicæ loquuntur.
Qui cupitis Rerum uarias cognoscere causas
Discite nos: Cunctis hac patet una uia.

Titelblatt von *Nova Scientia* – »Neue Wissenschaft« –, die Niccolò TARTAGLIA (1499 bis 1557) im Jahre 1537 herausbrachte, weil Sultan SULAIMAN II. DER PRÄCHTIGE (reg. 1520–1556) weiter zum Krieg gegen die Christenheit rüstete.
Das Buch handelt vorwiegend von der Schießkunst. TARTAGLIA beweist darin, dass man am weitesten schießen könne, wenn das Geschütz 45° über den Horizont aufgerichtet wird. Die im Titelbild dargestellte Flugbahn des Geschosses sieht wie eine Parabel aus. TARTAGLIA wusste aber noch nicht, dass Geschosse sich wirklich auf einer Parabel bewegen (Abbildung 159). Erst Galileo GALILEI (1564–1642) erbrachte rund 70 Jahre später den Beweis dafür (siehe Seite 174).
Die beiden Wappen sind nicht sehr genau gezeichnet. Das linke ist das Wappen von FRANZ MARIA I. (1490–1538) aus dem Hause DELLA ROVERE. Er war Herzog von Urbino (1508–1538) und Generalkapitän von Venedig, ferner Autor der *Discorsi militari*. An ihn ist der Brief gerichtet, der das Werk einleitet. Das rechte Wappen ist das seiner Ehefrau ELEONORE († 1570) aus dem Hause GONZAGA, das in Mantua regierte.
Der Wahlspruch AURUM PROBATUR IGNI, ET INGENIUM MATHEMATICIS – Gold wird auf Echtheit geprüft durch das Feuer, der Geist durch die Mathematik – sei, so Luca PACIOLI (um 1445–1517) in seiner *Divina Proportione* (1498, gedruckt 1509), unter den Gelehrten sprichwörtlich geworden um auszudrücken, dass »mathematische Begabung hervorragend für jede andere Wissenschaft geeignet mache«.
Der Ausspruch der mathematischen Wissenschaften, die, durch Damen symbolisiert, in einem Garten stehen, ist ein Distichon, das VERGILS (70–19 v. Chr.) *rerum cognoscere causas* – das Wesen der Welt erkennen – (*Georgica* II, 490 – »Landleben«) aufgreift.

Die mathematischen Wissenschaften sprechen:
Ihr, die Ihr den Wunsch habt, die mannigfaltigen Ursachen der Dinge zu erkennen,
Lernet uns; für alle ist hierher nur ein einziger Weg gangbar.

Spielt TARTAGLIA damit vielleicht auf den Spruch des MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) an – du findest ihn auf der Titelseite dieses Buches –, dass es in der Mathematik keinen Königsweg, sondern nur einen Weg für alle gibt?*
TARTAGLIA selbst steht in diesem Garten, zu dem EUKLID einlässt, umgeben von der Musik, der Arithmetik, der Geometrie, der Perspektive und der Astronomie. Auf den Spruchbändern sind noch die Architektur und die Astrologie entzifferbar, darüber hinaus die verschiedenen Künste des Wahrsagens, so die durch das Los (sortilegio), die durch Befragung der Seelen Verstorbener (necromantia), die durch Beschau des Opferfeuers (pyromantia), der Leber der Opfertiere (aruspitio), des Fluges der Wahrsagevögel (auspitio), die durch Beobachtung der Mäuse (myomanteia) und schließlich die Wahrsagung durch Beobachtung und Deutung von Wahrzeichen (augurio).
Der Zugang zur Philosophie ist nur möglich über ARISTOTELES und PLATON, auf dessen Band wir

NEMO HUC GEOMETRIAE EXPERS INGREDIATUR

lesen, die lateinische Version jener Inschrift, die über dem Eingangstor seiner Akademie geschrieben stand**:

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

Kein der Mathematik Unkundiger trete hier ein

* Dem Distichon stellt Luca PACIOLI in der *Divina Proportione* die Zeile »Corpora loquuntur« (Die Körper sprechen) voran.

** ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω (ageométretos medeís eisítō) – Die von PLATON (428–348 v. Chr.) um 385 v. Chr. gegründete Philosophenschule ist nach einem in der Nähe befindlichen Heiligtum des Helden AKADEMOS benannt. Geschlossen wurde sie 529 n. Chr. durch Kaiser JUSTINIAN (reg. 527–565). Die Inschrift überlieferte uns ELIAS PHILOSOPHUS (6. Jh. n. Chr.) in seinen *Ad Aristotelis Categorias commentaria*. – Nicolaus COPERNICUS (1473–1543) wählte sie als Motto seines *De revolutionibus orbium coelestium* (1543).

4 Quadratfunktion und Wurzelfunktion

4.1 Quadratfunktion und Normalparabel

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ kann man als die Nullstellen einer Funktion f mit dem Term $f(x) = ax^2 + bx + c$ deuten. Da $f(x)$ ein quadratischer Term ist, heißt f **quadratische Funktion**. Die einfachste quadratische Funktion hat den Term $f(x) = x^2$. Man gibt ihr einen besonderen Namen:

> **Definition 145.1:** Die Funktion $f: x \mapsto x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, heißt **Quadratfunktion**, ihr Graph heißt **Normalparabel***.

Um die Normalparabel zeichnen zu können berechnen wir eine Wertetabelle:

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$-0{,}3$	0	$0{,}3$	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	3
y	9	4	2,25	1	0,25	0,09	0	0,09	0,25	1	2,25	4	9

Abbildung 145.1 gibt die Normalparabel wieder. Da man sie sehr oft zeichnen muss, lohnt sich eine Zeichenschablone**.

Wir stellen einige wichtige Eigenschaften der Normalparabel zusammen:

1. Die Normalparabel ist eine gekrümmte Kurve, die sich nach oben öffnet.
Sie ist symmetrisch zur y-Achse, da zu entgegengesetzten Abszissen x und $-x$ wegen $(-x)^2 = x^2$ gleiche Ordinaten gehören. Die

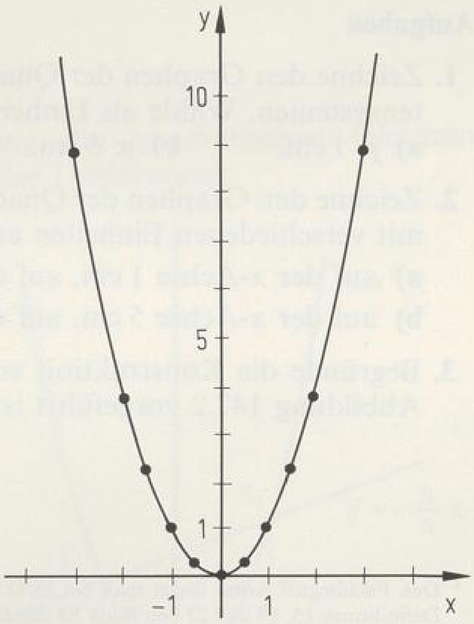

Abb. 145.1 Die Normalparabel

* ή παραβολή (he parabolē) = *die Nebeneinanderstellung, die Vergleichung, die Gleichheit*. Das Wort wurde bereits von den PYTHAGOREERN benutzt (siehe Aufgabe 110/**25**). Den Graphen der Funktion $x \mapsto ax^2$ bezeichnete als erster APOLLONIOS VON PERGE (um 262 bis um 190 v. Chr.) in seinen *Κωνικά* (Konikà) – »Die Kegelschnitte« – als Parabel (siehe **5.2**).
Das Adjektiv **normal** erscheint in Deutschland zu Anfang des 18. Jh.s. Es geht zurück auf das lateinische *normalis*, das zum Substantiv *norma* gehört. Dieses bedeutete ursprünglich *Winkelmaß*, später dann aber auch – so z. B. bei CICERO (106–43 v. Chr.) – *Richtschnur, Regel, Vorschrift*, sodass *normalis* im übertragenen Sinn *der Regel entsprechend* bedeutet.

** Das französische Wort *échantillon* (Probe, Muster) gelangt an den Niederrhein und ergibt unter Einfluss des mittelniederländischen *scampen* (behauen) in Kleve 1477 *sc(h)amplioen*, im 16. Jh. niederdeutsch *schampelūn* im Sinne von *Vorbild, Muster, Modell*. Unter dem Einfluss des Verbums *schaben* verliert es sein *m*. Die Form *Schablon* ist 1783 in Berlin belegt.

y-Achse heißt Symmetrieachse oder kurz **Achse*** der Normalparabel.

2. Aus $y = x^2 \geqq 0$ folgt, dass es keine Kurvenpunkte unter der x-Achse gibt. Auf der x-Achse liegt nur der tiefste Kurvenpunkt $(0|0)$. Er ist auch der Schnittpunkt der Achse mit der Normalparabel und heißt **Scheitel**** der Normalparabel.
3. Aus $0 \leqq x_1 < x_2$ folgt $0 < x_2 - x_1$. Multipliziert man mit $x_2 + x_1$, dann ergibt sich $0 < x_2^2 - x_1^2$ und somit $0 \leqq x_1^2 < x_2^2$, d.h., mit wachsenden positiven Abszissen nehmen auch die entsprechenden Ordinaten zu. Die Kurve steigt im 1. Quadranten und fällt auf Grund ihrer Symmetrie im 2. Quadranten.
4. Wenn x beliebig groß wird, dann wird erst recht x^2 beliebig groß. Also erstreckt sich die Normalparabel nach oben ins Unendliche. Die Wertemenge der Quadratfunktion ist demnach nicht nach oben beschränkt. Sie besteht aus allen nicht negativen reellen Zahlen, weil man aus jeder nicht negativen reellen Zahl die Wurzel ziehen kann, deren Quadrat wieder die Zahl liefert (Abbildung 147.1). Also gilt $W = \mathbb{R}_0^+$.

Aufgaben

1. Zeichne den Graphen der Quadratfunktion in verschiedenen Koordinatensystemen. Wähle als Einheiten auf den beiden Achsen
   a) je 1 cm, **b)** je 5 cm.
2. Zeichne den Graphen der Quadratfunktion in einem Koordinatensystem mit verschiedenen Einheiten auf den Achsen, und zwar
   a) auf der x-Achse 1 cm, auf der y-Achse 5 cm;
   b) auf der x-Achse 5 cm, auf der y-Achse 1 cm.
3. Begründe die Konstruktion von Punkten P der Normalparabel, die in Abbildung 147.2 vorgeführt ist.

* Den Fachbegriff **Achse** findet man bei Euklid (um 300 v. Chr.) als ὁ ἄξων (ho áxōn) lediglich in den Definitionen 15, 19 und 22 von Buch XI der *Elemente* für diejenige Gerade, um die sich ein Halbkreis, ein Dreieck oder ein Parallelogramm drehen müssen, damit eine Halbkugel, ein Kegel oder ein Zylinder entsteht. Das zugehörige lateinische *axis* wird durch Conradt von Megenburg 1349 in seiner Übersetzung der *De sphaera mundi* des Johannes de Sacro Bosco (1200?–1256?) als *achs* wiedergegeben, das aus dem althochdeutschen *ahsa* herkommt. Apollonios (um 262–um 190 v. Chr.) benützt ἄξων = *Achse* in unserem Sinn.

** Archimedes (um 287–212 v. Chr.) nannte diesen Punkt ἡ κορυφή (he koryphē) = *Spitze, Gipfel, Scheitel*, was Johann Christoph Sturm (1635–1703) mit *Scheitelpunkt* in seinem 1670 erschienenen *Des Unvergleichlichen Archimedes Kunst-Bücher, Teutscher Archimedes* übersetzte.

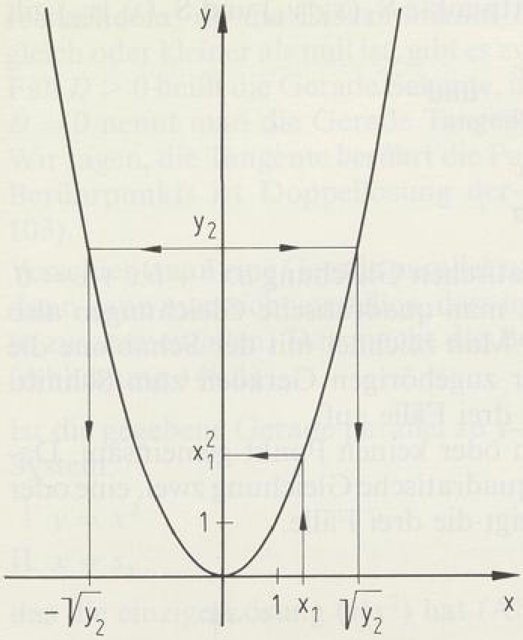

Abb. 147.1 Quadrieren und Radizieren mit Hilfe der Normalparabel

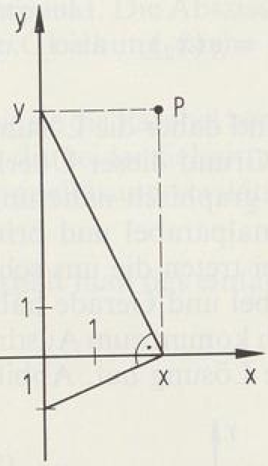

Abb. 147.2 Konstruktion von Punkten der Normalparabel

4.2 Normalparabel und Gerade

Ein graphisches Verfahren zur Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ beruht auf der Umformung

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Wir fassen die beiden Seiten als Terme von zwei Funktionen f und g auf, nämlich

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Der Graph von f ist die Normalparabel, der von g eine Gerade mit der Steigung $-\frac{b}{a}$ und dem y-Achsenabschnitt $-\frac{c}{a}$. (Siehe Abbildung 147.3.)

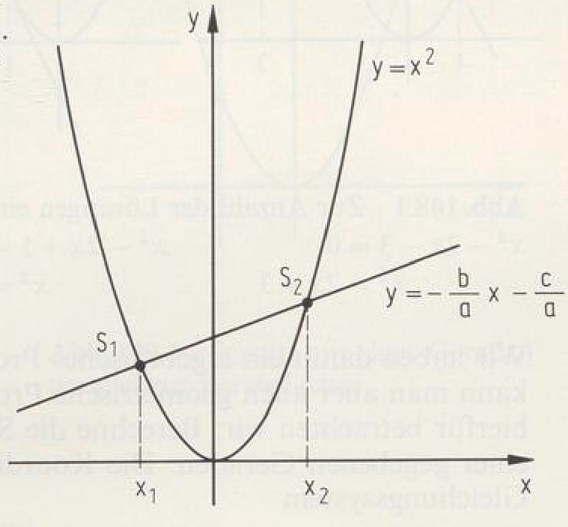

Abb. 147.3 Graphische Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

Für die Abszissen x_1 und x_2 der Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$ und $S_2(x_2|y_2)$ gilt

$$f(x_1) = g(x_1), \quad \text{also} \quad x_1^2 = -\frac{b}{a}x_1 - \frac{c}{a} \quad \text{und}$$

$$f(x_2) = g(x_2), \quad \text{also} \quad x_2^2 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}.$$

Sie sind daher die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Auf Grund dieser Überlegungen kann man quadratische Gleichungen also auch graphisch näherungsweise lösen: Man zeichnet mit der Schablone die Normalparabel und bringt sie mit der zugehörigen Geraden zum Schnitt. Dabei treten die uns schon bekannten drei Fälle auf:
Parabel und Gerade haben zwei, einen oder keinen Punkt gemeinsam. Dadurch kommt zum Ausdruck, dass die quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösung hat. Abbildung 148.1 zeigt die drei Fälle.

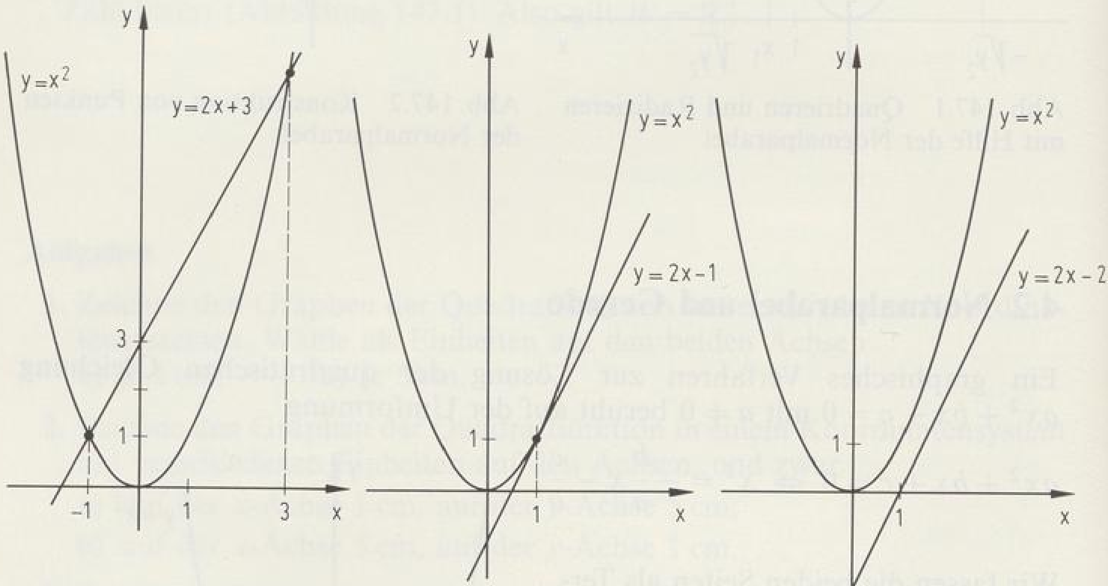

Abb. 148.1 Zur Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung

$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x^2 - 2x + 2 = 0$
$x^2 = 2x + 3$	$x^2 = 2x - 1$	$x^2 = 2x - 2$

Wir haben damit ein algebraisches Problem geometrisch gelöst. Umgekehrt kann man aber auch geometrische Probleme algebraisch lösen. Als Beispiel hierfür betrachten wir: Berechne die Schnittpunkte der Normalparabel mit einer gegebenen Geraden. Die Koordinaten der Schnittpunkte müssen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y = x^2 \\ \text{II} & y = mx + t \end{array} \quad \text{erfüllen, das mit} \quad \begin{array}{ll} \text{I}' & x^2 - mx - t = 0 \\ \text{II}' & y = mx + t \end{array} \quad \text{äquivalent ist.}$$

Je nachdem, ob die Diskriminante $D = m^2 + 4t$ der Gleichung I′ größer, gleich oder kleiner als null ist, gibt es zwei, einen oder keinen Schnittpunkt. Im Fall $D > 0$ heißt die Gerade **Sekante**, im Fall $D < 0$ heißt sie **Passante**; im Fall $D = 0$ nennt man die Gerade **Tangente***.
Wir sagen, die Tangente **berührt** die Parabel im **Berührpunkt**. Die Abszisse des Berührpunkts ist Doppellösung der quadratischen Gleichung (siehe Seite 103).
Verschiebt man eine Gerade parallel zu sich so weit, bis sie die Parabel berührt, dann kann man sich vorstellen, dass im Berührpunkt die beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Das macht die Bezeichnung Doppellösung verständlich (Abbildung 149.1).

Ist die gegebene Gerade parallel zu y-Achse, dann erhält man das einfachere System

I $y = x^2$
II $x = s$,

das die einzige Lösung $(s|s^2)$ hat (Abbildung 149.2).

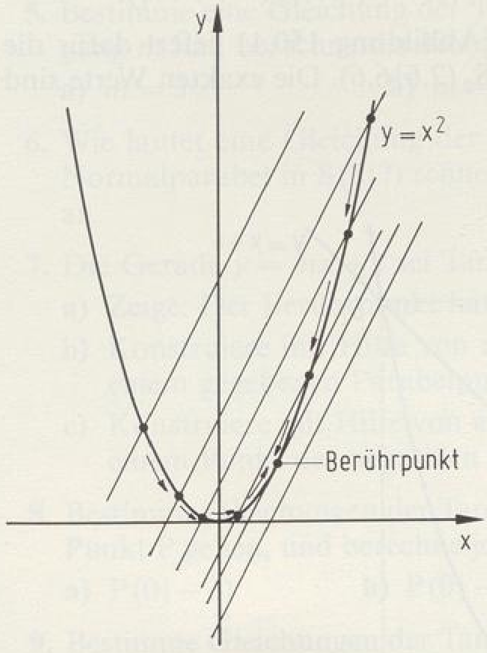

Abb. 149.1 Zur Erklärung des Begriffs »Doppellösung«

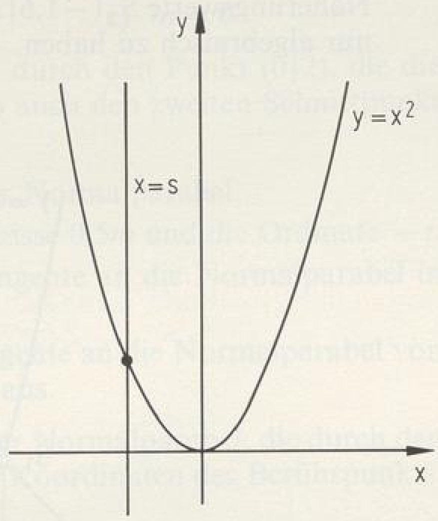

Abb. 149.2 Schnitt mit einer Geraden parallel zur Parabelachse

* secans (lat.) = schneidend; tangens (lat.) = berührend.
Passante ist eine Analogiebildung zu den vorherigen Begriffen. Aus *passus* (lat.) = *das Ausspreizen der Füße beim Gehen* wird das französische *passer* = *vorübergehen, vorbeikommen*, das wir in unserem *passieren* wiederfinden.

Ein Zahlenbeispiel soll dir zeigen, wie man im konkreten Fall vorgeht.

Beispiel:

Berechne die Schnittpunkte der Geraden $y = x + 4$ mit der Normalparabel.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y = x^2 \\ \text{II} & y = x + 4 \\ \hline \text{I}' & x^2 - x - 4 = 0 \\ \text{II}'' & y = x + 4 \\ \hline \text{I}' & x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \\ \text{II}'' & y = x + 4 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) + 4 = \tfrac{1}{2}(9 - \sqrt{17})$$

$$x = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) + 4 = \tfrac{1}{2}(9 + \sqrt{17})$$

Das ergibt die Schnittpunkte

$S_1(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) | \frac{1}{2}(9 - \sqrt{17}))$ und $S_2(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) | \frac{1}{2}(9 + \sqrt{17}))$.

Das graphische Lösungsverfahren (Abbildung 150.1) liefert dafür die Näherungswerte $S_1(-1{,}6 | 2{,}4)$ und $S_2(2{,}6 | 6{,}6)$. Die exakten Werte sind nur algebraisch zu haben.

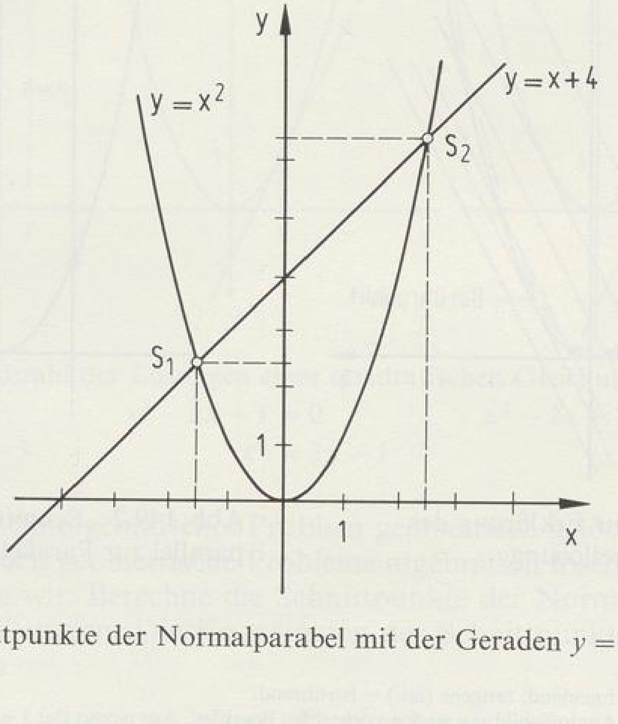

Abb. 150.1 Schnittpunkte der Normalparabel mit der Geraden $y = x + 4$

Aufgaben

1. Löse zuerst graphisch und dann rechnerisch.

a) $x^2 - 2x = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 6x = -11$ **d)** $2x^2 + 24 = 16x$

2. Löse zuerst graphisch und dann rechnerisch.

a) $x^2 - 1{,}6x - 2{,}6 = 0$ **b)** $3x^2 - 2x - 12 = 0$

c) $0{,}25x^2 + 0{,}5x - 0{,}5 = 0$ **d)** $6x^2 + 2x - 25 = 0$

e) $8x^2 - 14x + 1 = 0$ **f)** $0{,}1x^2 + 0{,}32x + 0{,}12 = 0$

3. Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Normalparabel mit der Geraden

a) $y = -0{,}5x + 5$, **b)** $y = 6x - 3$.

4. Überprüfe, ob die Gerade Sekante, Tangente oder Passante der Normalparabel ist, und berechne gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte.

a) $y = x - 1$ **b)** $y = -4x - 4$ **c)** $y = 20x - 100$

d) $y = 100x - 20$ **e)** $y = 3x + 4$ **f)** $y = 2{,}5x - 1{,}5625$

5. Bestimme eine Gleichung der Tangente der Normalparabel, die die Steigung m hat; berechne die Koordinaten des Berührpunkts.

a) $m = 3$ **b)** $m = -6$ **c)** $m = 0$

6. Wie lautet eine Gleichung der Geraden durch den Punkt $(0|2)$, die die Normalparabel in $S(3|?)$ schneidet? Gib auch den zweiten Schnittpunkt an.

7. Die Gerade $y = mx + t$ sei Tangente der Normalparabel.

a) Zeige: Der Berührpunkt hat die Abszisse $0{,}5m$ und die Ordinate $-t$.

b) Konstruiere mit Hilfe von **a)** die Tangente an die Normalparabel in einem gegebenen Parabelpunkt.

c) Konstruiere mit Hilfe von **a)** die Tangente an die Normalparabel von einem Punkt der negativen y-Achse aus.

8. Bestimme Gleichungen der Tangenten der Normalparabel, die durch den Punkt P gehen, und berechne jeweils die Koordinaten des Berührpunkts.

a) $P(0|-3)$ **b)** $P(0|-10{,}24)$

9. Bestimme Gleichungen der Tangenten der Normalparabel, die durch den Punkt P gehen, und berechne jeweils die Koordinaten des Berührpunkts.

a) $P(1|-3)$ **b)** $P(-3|8)$

4.3 Die Wurzelfunktion

4.3.1 Definition der Wurzelfunktion

Ordnet man jeder nicht negativen Zahl x ihre Quadratwurzel $\sqrt{x}$ zu, so hat man eine Funktion; sie heißt Quadratwurzelfunktion oder kurz Wurzelfunktion. Wir merken uns

> **Definition 152.1:**
> Die Funktion $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$ heißt **Wurzelfunktion.**

Zum Zeichnen des Graphen der Wurzelfunktion berechnen wir eine Wertetabelle, auf Zehntel gerundet.

x	0	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{x}$	0	0,5	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

Abbildung 152.1 gibt den Graphen wieder.
Wegen $0 \leqq x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ (vergleiche Seite 53) ist die Wurzelfunktion echt monoton wachsend. Die Wertemenge der Wurzelfunktion ist $\mathbb{R}_0^+$. Wäre die Wertemenge nämlich nach oben beschränkt, dann müsste es eine Zahl N geben, sodass $\sqrt{x} < N$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ gälte. Aus $\sqrt{x} < N$ folgt aber $x < N^2$, und das ist ein Widerspruch, weil x beliebig groß werden kann.

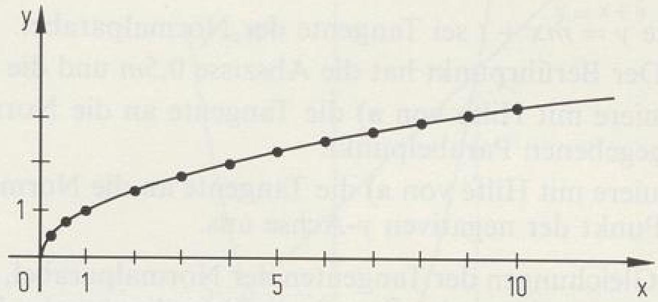

Abb. 152.1 Der Graph der Wurzelfunktion

Aufgaben

1. Bestimme die maximale Definitionsmenge der folgenden Funktionsterme und berechne eine Wertetabelle, sodass du die Graphen der zugehörigen Funktionen zeichnen kannst.

a) $\sqrt{-x}$ **b)** $-\sqrt{-x}$ **c)** $\sqrt{|x|}$ **d)** $-\sqrt{|x|}$

2. Löse wie in Aufgabe **1**:

a) $\sqrt{x^2}$ **b)** $-\sqrt{x^2}$ **c)** $\sqrt{-x^2}$

4.3.2 Die Umkehrfunktion

Eine Funktion $f\colon x \mapsto y$ mit $y = f(x)$ ordnet jeder Zahl x ihrer Definitionsmenge D genau eine Zahl y ihrer Wertemenge W zu.

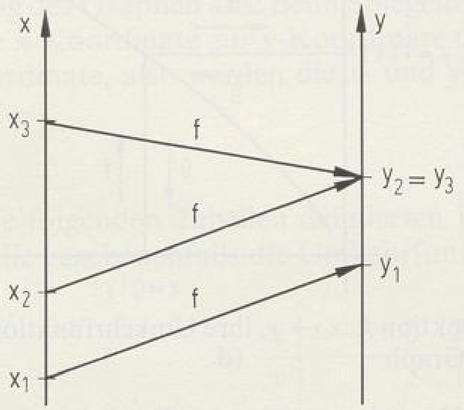

Abb. 153.1 Veranschaulichung einer Funktion $f\colon x \mapsto y$

Abbildung 153.1 zeigt, dass dabei auch verschiedene x-Werte denselben y-Wert als Funktionswert haben können. Zu einem solchen y-Wert gehört also mehr als ein x-Wert. Kehrt man die Zuordnung um, dann erhält man keine Funktion, weil die umgekehrte Zuordnung nicht eindeutig ist. Es gibt aber Funktionen f, bei denen die Umkehrung der Zuordnung wieder eindeutig ist, also eine neue Funktion g ergibt. f heißt in einem solchen Fall **umkehrbar**, und g nennt man die **Umkehrfunktion** von f (Abbildung 153.2).
Die Umkehrbarkeit einer Funktion bedeutet, dass ihr Graph von jeder Parallelen zur x-Achse höchstens einmal geschnitten wird; denn jedes $y \in W$ darf nur einem einzigen $x \in D$ zugeordnet sein. Die Umkehrfunktion g zur Funktion $f\colon x \mapsto y$ entsteht dann einfach durch Umkehren der Abbildungsrichtung $g\colon y \mapsto x$ (Abbildung 154.1). Die Definitionsmenge der Umkehrfunktion g ist die Wertemenge W der ursprünglichen Funktion f. Die Wertemenge von g ist dann natürlich die Definitionsmenge D von f.

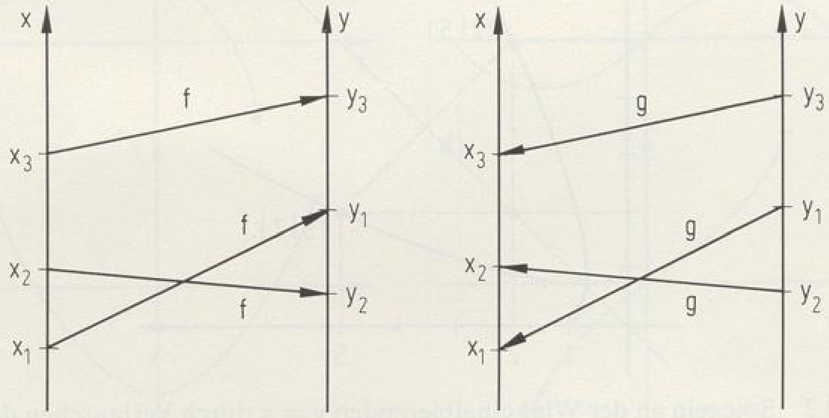

Abb. 153.2 Die Funktion f und ihre Umkehrfunktion g

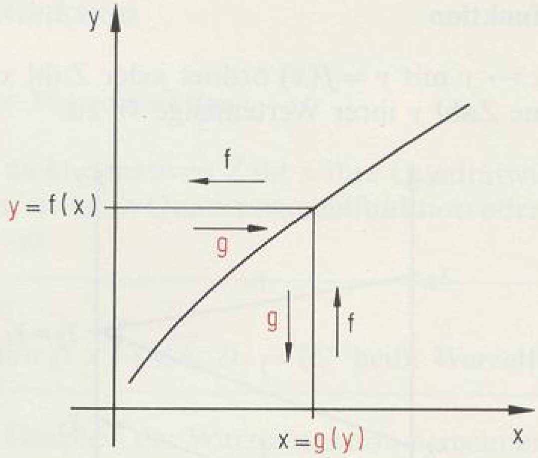

Abb. 154.1 Die Funktion f: $x \mapsto y$, ihre Umkehrfunktion g: $y \mapsto x$ und ihr gemeinsamer Graph

Schreibt man den Funktionswert y der Funktion f: $x \mapsto y$ in der Form $f(x)$, so hat die Funktion f die Funktionsgleichung $y = f(x)$. Hat f eine Umkehrfunktion g: $y \mapsto x$ und bezeichnet man ihren Funktionswert mit $g(y)$, so gilt die Gleichung $x = g(y)$. Die Gleichungen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ stellen denselben Zusammenhang zwischen den Elementen der Mengen D und W dar. Bei $y = f(x)$ wird lediglich die Zuordnungsrichtung $x \mapsto y$, bei $x = g(y)$ die Zuordnung $y \mapsto x$ hervorgehoben. In beiden Fällen ergibt sich derselbe Graph.

Bei der Schreibweise $x = g(y)$ für die Umkehrfunktion g: $y \mapsto x$ ist y die unabhängige und x die abhängige Variable. Betrachtet man die Funktion g für sich allein, so wird man wie üblich die unabhängige Variable mit x und die abhängige mit y bezeichnen. Diese Änderung der Bezeichnungsweise führt zur

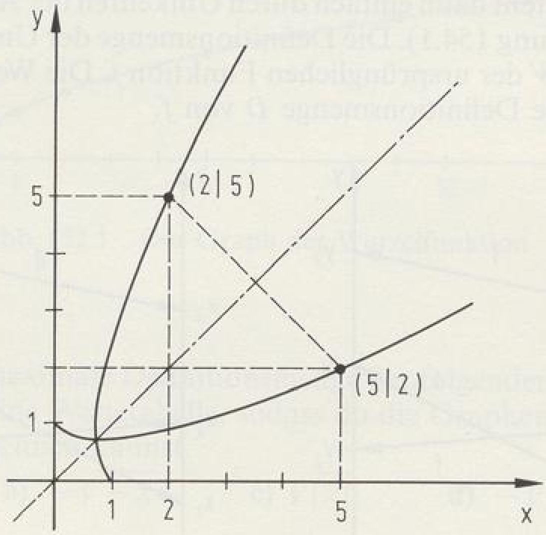

Abb. 154.2 Spiegeln an der Winkelhalbierenden $y = x$ durch Vertauschen der Koordinaten

Gleichung $y = g(x)$. Der zugehörige Graph entsteht aus dem Graphen von $x = g(y)$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ (Abb. 154.2). Wie man die unabhängige Variable bezeichnet, ist eine reine Äußerlichkeit; sie hat nichts mit der durch die Funktion gegebenen Zuordnung zu tun. Sie wirkt sich nur auf die Zeichnung des Graphen aus: Beim Spiegeln an der Winkelhalbierenden $y = x$ wird die x-Koordinate zur y-Koordinate und umgekehrt die y-Koordinate zur x-Koordinate, also werden die x- und y-Koordinaten einfach vertauscht.

Aufgaben

1. Welche der durch die folgenden Tabellen definierten Funktionen $x \mapsto y$ sind umkehrbar? Stelle gegebenenfalls die Umkehrfunktion $y \mapsto x$ durch ihren Graphen dar.

a)

x	-2	0	3
y	1	2	-1

b)

x	-2	0	3
y	1	2	1

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3

d)

x	1	$2{,}7$	$-0{,}5$	4
y	$0{,}25$	$1{,}25$	$-0{,}25$	$-1{,}25$

2. Durch die Gleichungen
   a) $5x + 2y - 10 = 0$ **b)** $x - y - 1 = 0$
   c) $x + y - 3 = 0$ **d)** $y - 5 = 0$
   wird jeweils auf der Menge der reellen Zahlen eine Funktion $f\colon x \mapsto y$ erklärt. Welche dieser Funktionen sind umkehrbar? Stelle gegebenenfalls die Umkehrfunktion g sowohl in der Form $g\colon y \mapsto x$ als auch in der Form $g\colon x \mapsto y$ durch eine Gleichung dar und zeichne die Graphen.

3. Welche der in Abbildung 155.1 angegebenen Graphen definieren umkehrbare Funktionen?

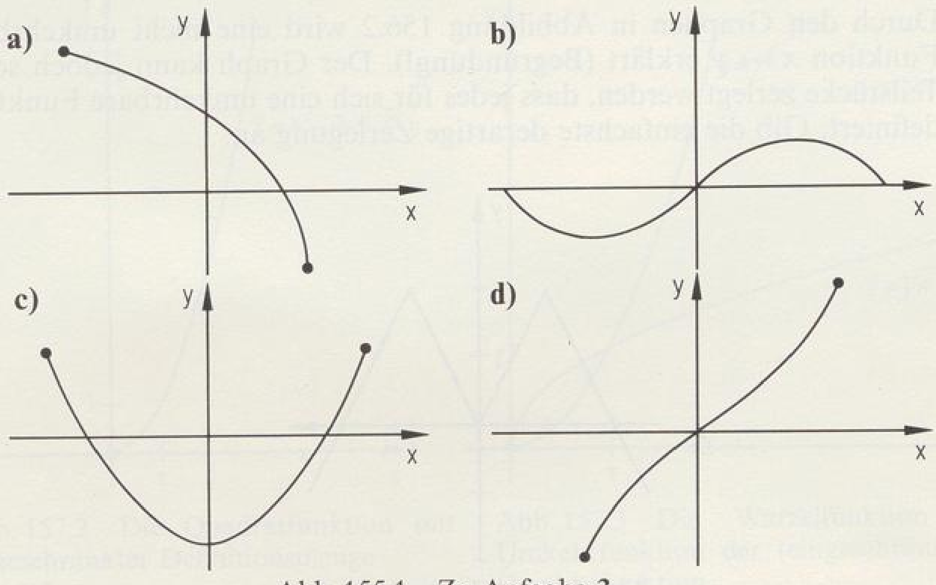

Abb. 155.1 Zu Aufgabe 3

4. Die Graphen der Abbildung 156.1 stellen umkehrbare Funktionen $f\colon x \mapsto y$ dar. Begründe dies! Übertrage sie vergrößert in dein Heft und zeichne jeweils den Graphen der Umkehrfunktion g in der Form $g\colon x \mapsto y$.

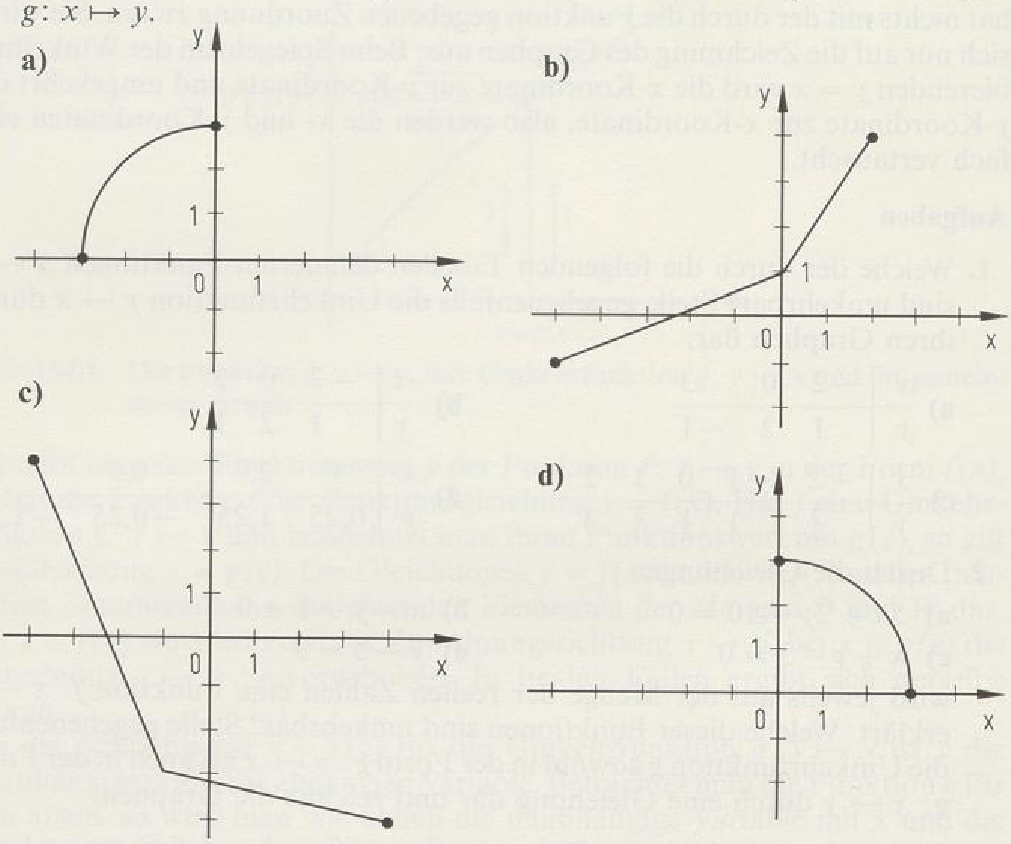

Abb. 156.1 Zu Aufgabe 4

5. Durch den Graphen in Abbildung 156.2 wird eine nicht umkehrbare Funktion $x \mapsto y$ erklärt (Begründung!). Der Graph kann jedoch so in Teilstücke zerlegt werden, dass jedes für sich eine umkehrbare Funktion definiert. Gib die einfachste derartige Zerlegung an.

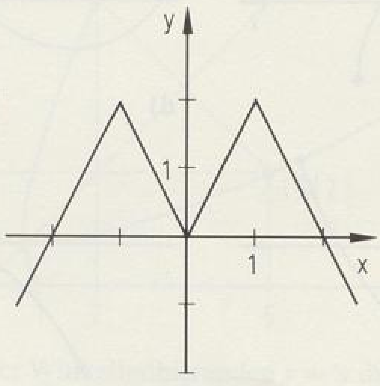

Abb. 156.2 Zu Aufgabe 5

6. Kann man die Graphen **a** und **b** der Abbildung 157.1 in Teilstücke zerlegen, welche umkehrbare Funktionen definieren (vgl. Aufgabe **5**)? Wie könnte die Zerlegung gegebenenfalls vorgenommen werden?

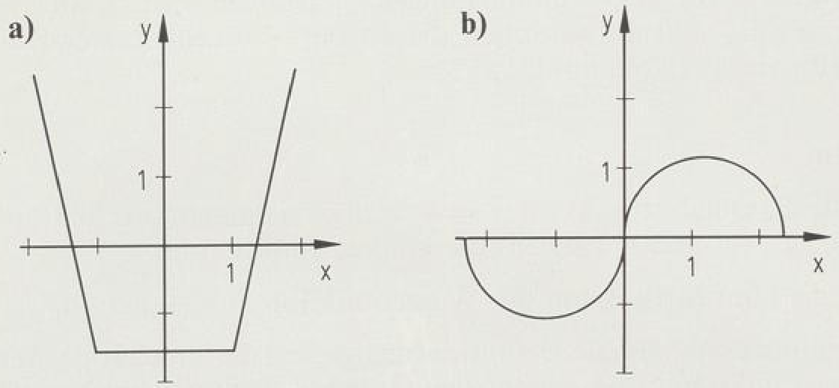

Abb. 157.1 Zu Aufgabe **6**

4.3.3 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Hat die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ eine Umkehrfunktion? Der Graph der Quadratfunktion ist die Normalparabel. Sie wird von allen Parallelen zur x-Achse, die oberhalb der x-Achse laufen, zweimal geschnitten. Also hat die Quadratfunktion keine Umkehrfunktion. Schränkt man jedoch die Definitionsmenge so ein, dass der Graph nur aus dem steigenden oder nur aus dem fallenden Teil der Parabel besteht, dann kann man die Funktion umkehren. Jetzt trifft jede Parallele zur x-Achse den Graphen höchstens einmal. So hat z. B. die Funktion $x \mapsto x^2$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ eine Umkehrfunktion (Abbildung 157.2). Aus $y = x^2$ mit $x \geqq 0$ folgt $x = \sqrt{y}$ mit $y \geqq 0$. Die Funktion

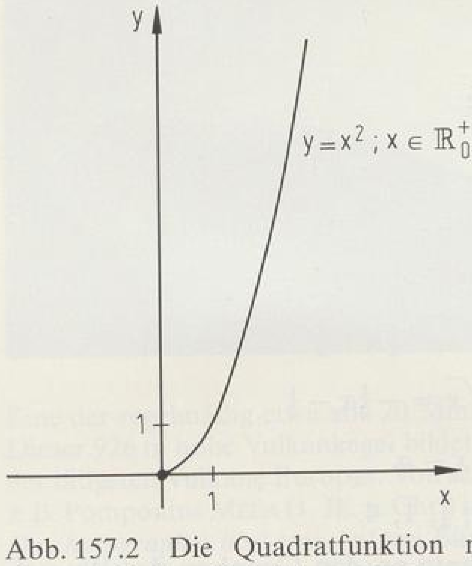

Abb. 157.2 Die Quadratfunktion mit eingeschränkter Definitionsmenge $D = \mathbb{R}_0^+$

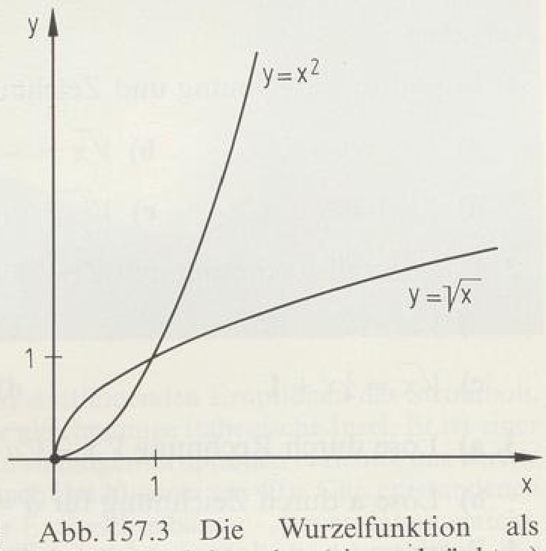

Abb. 157.3 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der (eingeschränkten) Quadratfunktion

$g: y \mapsto \sqrt{y}$; $y \in \mathbb{R}_0^+$ ist also die Umkehrfunktion zu $f: x \mapsto x^2$; $x \in \mathbb{R}_0^+$. g ist aber die Wurzelfunktion, die wir in **4.3.1** kennen gelernt haben. Ihr Graph ist demnach die halbe Normalparabel und kann auch mit der Schablone gezeichnet werden. Mit der unabhängigen Variablen x erhält man g: $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ und als Graphen die an der Winkelhalbierenden gespiegelte Halbparabel (Abbildung 157.3).

Aufgaben

1. Spalte die Quadratfunktion f: $x \mapsto x^2$ in zwei umkehrbare Teilfunktionen f_1 und f_2 auf und gib jeweils die Umkehrfunktion an.
2. Gib die Umkehrfunktion der Wurzelfunktion f: $x \mapsto \sqrt{x}$ an.
3. Bestimme die maximale Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge der Funktion f und zeichne den Graphen. Ermittle gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

   a) $f(x) = \sqrt{|x|}$ **b)** $f(x) = \sqrt{-x}$ **c)** $f(x) = -\sqrt{|x|}$ **d)** $f(x) = -\sqrt{-x}$

**4.3.4 Graph der Wurzelfunktion und Gerade

Wie bei Normalparabel und Gerade kann man auch bei der Wurzelfunktion die Lage des Graphen zu einer Geraden untersuchen. Die Schnittbedingung liefert eine Wurzelgleichung der Bauart $\sqrt{x} = mx + t$. Sie kann eine Doppellösung (Tangente), eine oder zwei einfache Lösungen (Sekante) oder keine Lösung (Passante) haben.

Aufgaben

1. Löse durch Rechnung und Zeichnung:

   a) $\sqrt{x} = x$ **b)** $\sqrt{x} = -x$ **c)** $\sqrt{x} = |x|$

   d) $\sqrt{|x|} = x$ **e)** $\sqrt{|x|} = -x$ **f)** $\sqrt{|x|} = |x|$

2. Löse durch Rechnung und Zeichnung:

   a) $\sqrt{x} = 2x - 6$ **b)** $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

   c) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}x + 1$ **d)** $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

3. **a)** Löse durch Rechnung $\sqrt{x} - \sqrt{a} = x - a$.

   b) Löse **a** durch Zeichnung für $a = 0; \frac{1}{4}; 1; 4$.

4. Bestimme t so, dass $y = \frac{1}{3}x + t$ Tangente an den Graphen der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist.