UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

4.1 Quadratfunktion und Normalparabel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

Visual Library

4 Quadratfunktion und Wurzelfunktion

4.1 Quadratfunktion und Normalparabel

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ kann man als die Nullstellen einer Funktion f mit dem Term $f(x) = ax^2 + bx + c$ deuten. Da $f(x)$ ein quadratischer Term ist, heißt f **quadratische Funktion**. Die einfachste quadratische Funktion hat den Term $f(x) = x^2$. Man gibt ihr einen besonderen Namen:

> **Definition 145.1:** Die Funktion $f: x \mapsto x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, heißt **Quadratfunktion**, ihr Graph heißt **Normalparabel***.

Um die Normalparabel zeichnen zu können berechnen wir eine Wertetabelle:

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$-0{,}3$	0	$0{,}3$	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	3
y	9	4	2,25	1	0,25	0,09	0	0,09	0,25	1	2,25	4	9

Abbildung 145.1 gibt die Normalparabel wieder. Da man sie sehr oft zeichnen muss, lohnt sich eine Zeichenschablone**.

Wir stellen einige wichtige Eigenschaften der Normalparabel zusammen:

1. Die Normalparabel ist eine gekrümmte Kurve, die sich nach oben öffnet.
Sie ist symmetrisch zur y-Achse, da zu entgegengesetzten Abszissen x und $-x$ wegen $(-x)^2 = x^2$ gleiche Ordinaten gehören. Die

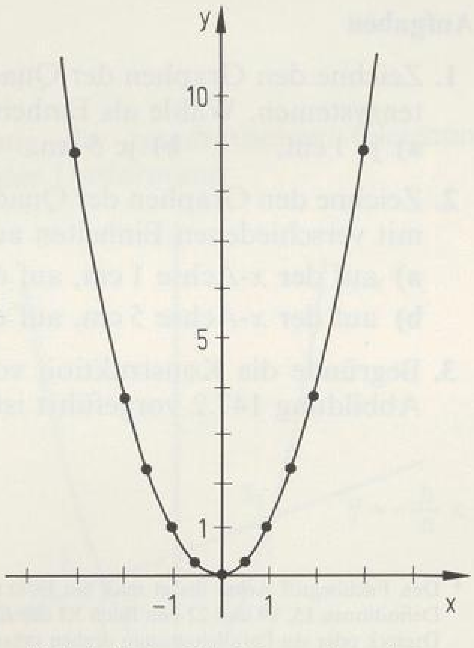

Abb. 145.1 Die Normalparabel

* ἡ παραβολή (he parabolḗ) = *die Nebeneinanderstellung, die Vergleichung, die Gleichheit*. Das Wort wurde bereits von den PYTHAGOREERN benutzt (siehe Aufgabe 110/**25**). Den Graphen der Funktion $x \mapsto ax^2$ bezeichnete als erster APOLLONIOS VON PERGE (um 262 bis um 190 v. Chr.) in seinen *Κωνικά* (Konikà) – »Die Kegelschnitte« – als Parabel (siehe **5.2**).
Das Adjektiv **normal** erscheint in Deutschland zu Anfang des 18. Jh.s. Es geht zurück auf das lateinische *normalis*, das zum Substantiv *norma* gehört. Dieses bedeutete ursprünglich *Winkelmaß*, später dann aber auch – so z. B. bei CICERO (106–43 v. Chr.) – *Richtschnur, Regel, Vorschrift*, sodass *normalis* im übertragenen Sinn *der Regel entsprechend* bedeutet.

** Das französische Wort *échantillon* (Probe, Muster) gelangt an den Niederrhein und ergibt unter Einfluss des mittelniederländischen *scampen* (behauen) in Kleve 1477 *sc(h)amplioen*, im 16. Jh. niederdeutsch *schampelūn* im Sinne von *Vorbild, Muster, Modell*. Unter dem Einfluss des Verbums *schaben* verliert es sein *m*. Die Form *Schablon* ist 1783 in Berlin belegt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

y-Achse heißt Symmetrieachse oder kurz **Achse*** der Normalparabel.

2. Aus $y = x^2 \geqq 0$ folgt, dass es keine Kurvenpunkte unter der x-Achse gibt. Auf der x-Achse liegt nur der tiefste Kurvenpunkt $(0|0)$. Er ist auch der Schnittpunkt der Achse mit der Normalparabel und heißt **Scheitel**** der Normalparabel.

3. Aus $0 \leqq x_1 < x_2$ folgt $0 < x_2 - x_1$. Multipliziert man mit $x_2 + x_1$, dann ergibt sich $0 < x_2^2 - x_1^2$ und somit $0 \leqq x_1^2 < x_2^2$, d.h., mit wachsenden positiven Abszissen nehmen auch die entsprechenden Ordinaten zu. Die Kurve steigt im 1. Quadranten und fällt auf Grund ihrer Symmetrie im 2. Quadranten.

4. Wenn x beliebig groß wird, dann wird erst recht x^2 beliebig groß. Also erstreckt sich die Normalparabel nach oben ins Unendliche. Die Wertemenge der Quadratfunktion ist demnach nicht nach oben beschränkt. Sie besteht aus allen nicht negativen reellen Zahlen, weil man aus jeder nicht negativen reellen Zahl die Wurzel ziehen kann, deren Quadrat wieder die Zahl liefert (Abbildung 147.1). Also gilt $W = \mathbb{R}_0^+$.

Aufgaben

1. Zeichne den Graphen der Quadratfunktion in verschiedenen Koordinatensystemen. Wähle als Einheiten auf den beiden Achsen
a) je 1 cm, **b)** je 5 cm.

2. Zeichne den Graphen der Quadratfunktion in einem Koordinatensystem mit verschiedenen Einheiten auf den Achsen, und zwar
a) auf der x-Achse 1 cm, auf der y-Achse 5 cm;
b) auf der x-Achse 5 cm, auf der y-Achse 1 cm.

3. Begründe die Konstruktion von Punkten P der Normalparabel, die in Abbildung 147.2 vorgeführt ist.

* Den Fachbegriff **Achse** findet man bei EUKLID (um 300 v. Chr.) als ὁ ἄξων (ho áxōn) lediglich in den Definitionen 15, 19 und 22 von Buch XI der *Elemente* für diejenige Gerade, um die sich ein Halbkreis, ein Dreieck oder ein Parallelogramm drehen müssen, damit eine Halbkugel, ein Kegel oder ein Zylinder entsteht. Das zugehörige lateinische *axis* wird durch CONRADT VON MEGENBURG 1349 in seiner Übersetzung der *De sphaera mundi* des JOHANNES DE SACRO BOSCO (1200?–1256?) als *achs* wiedergegeben, das aus dem althochdeutschen *ahsa* herkommt. APOLLONIOS (um 262–um 190 v. Chr.) benützt ἄξων = *Achse* in unserem Sinn.

** ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) nannte diesen Punkt ἡ κορυφή (he koryphē) = *Spitze*, *Gipfel*, *Scheitel*, was Johann Christoph STURM (1635–1703) mit *Scheitelpunkt* in seinem 1670 erschienenen *Des Unvergleichlichen Archimedes Kunst-Bücher, Teutscher Archimedes* übersetzte.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

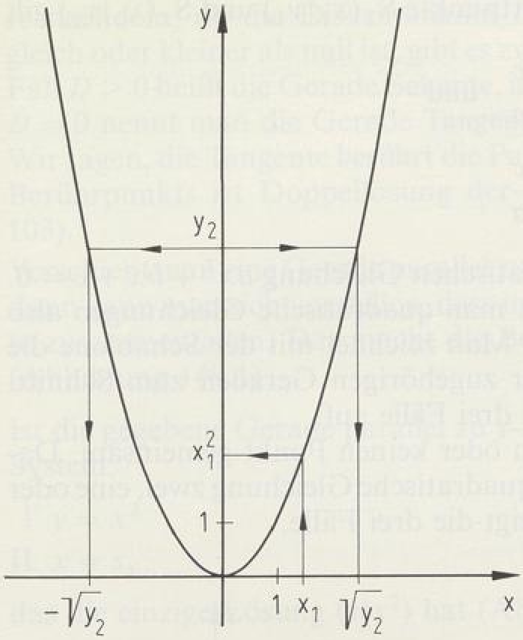

Abb. 147.1 Quadrieren und Radizieren mit Hilfe der Normalparabel

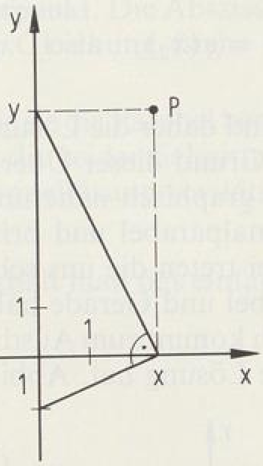

Abb. 147.2 Konstruktion von Punkten der Normalparabel

4.2 Normalparabel und Gerade

Ein graphisches Verfahren zur Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ beruht auf der Umformung

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Wir fassen die beiden Seiten als Terme von zwei Funktionen f und g auf, nämlich

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Der Graph von f ist die Normalparabel, der von g eine Gerade mit der Steigung $-\frac{b}{a}$ und dem y-Achsenabschnitt $-\frac{c}{a}$. (Siehe Abbildung 147.3.)

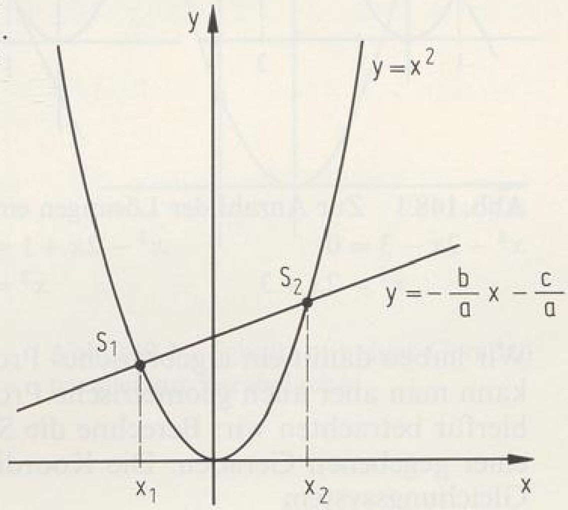

Abb. 147.3 Graphische Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$