Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

4.2 Normalparabel und Gerade

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

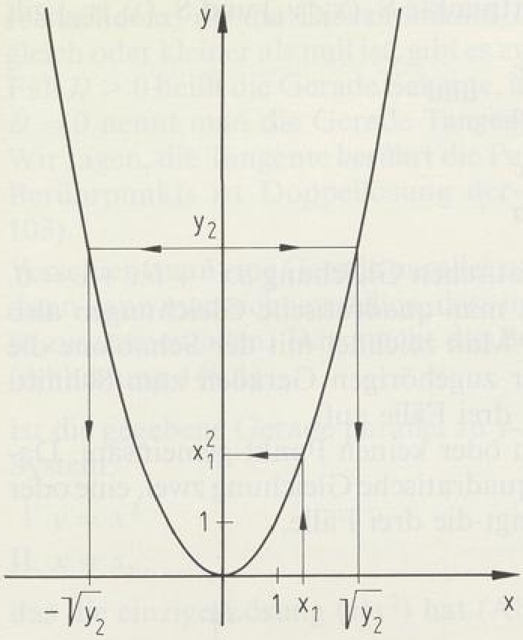

Abb. 147.1 Quadrieren und Radizieren mit Hilfe der Normalparabel

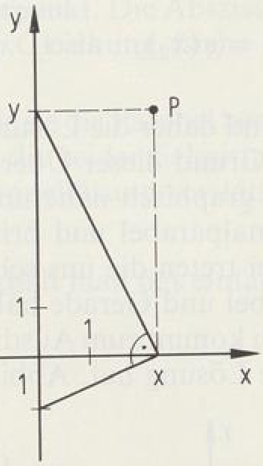

Abb. 147.2 Konstruktion von Punkten der Normalparabel

4.2 Normalparabel und Gerade

Ein graphisches Verfahren zur Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ beruht auf der Umformung

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Wir fassen die beiden Seiten als Terme von zwei Funktionen f und g auf, nämlich

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Der Graph von f ist die Normalparabel, der von g eine Gerade mit der Steigung $-\frac{b}{a}$ und dem y-Achsenabschnitt $-\frac{c}{a}$. (Siehe Abbildung 147.3.)

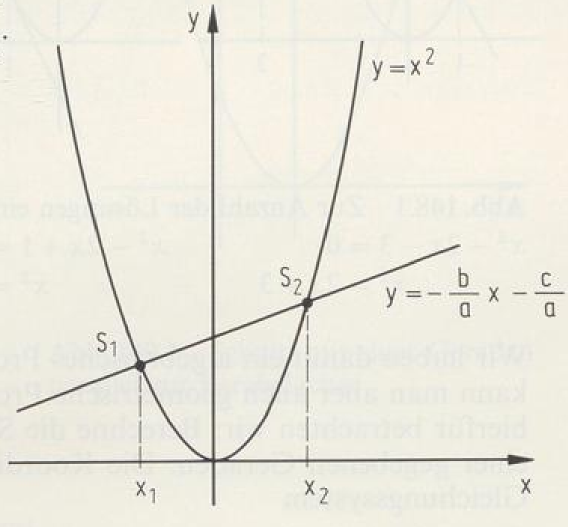

Abb. 147.3 Graphische Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

Für die Abszissen x_1 und x_2 der Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1)$ und $S_2(x_2|y_2)$ gilt

$$f(x_1) = g(x_1), \quad \text{also} \quad x_1^2 = -\frac{b}{a}x_1 - \frac{c}{a} \quad \text{und}$$

$$f(x_2) = g(x_2), \quad \text{also} \quad x_2^2 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}.$$

Sie sind daher die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.
Auf Grund dieser Überlegungen kann man quadratische Gleichungen also auch graphisch näherungsweise lösen: Man zeichnet mit der Schablone die Normalparabel und bringt sie mit der zugehörigen Geraden zum Schnitt. Dabei treten die uns schon bekannten drei Fälle auf:
Parabel und Gerade haben zwei, einen oder keinen Punkt gemeinsam. Dadurch kommt zum Ausdruck, dass die quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösung hat. Abbildung 148.1 zeigt die drei Fälle.

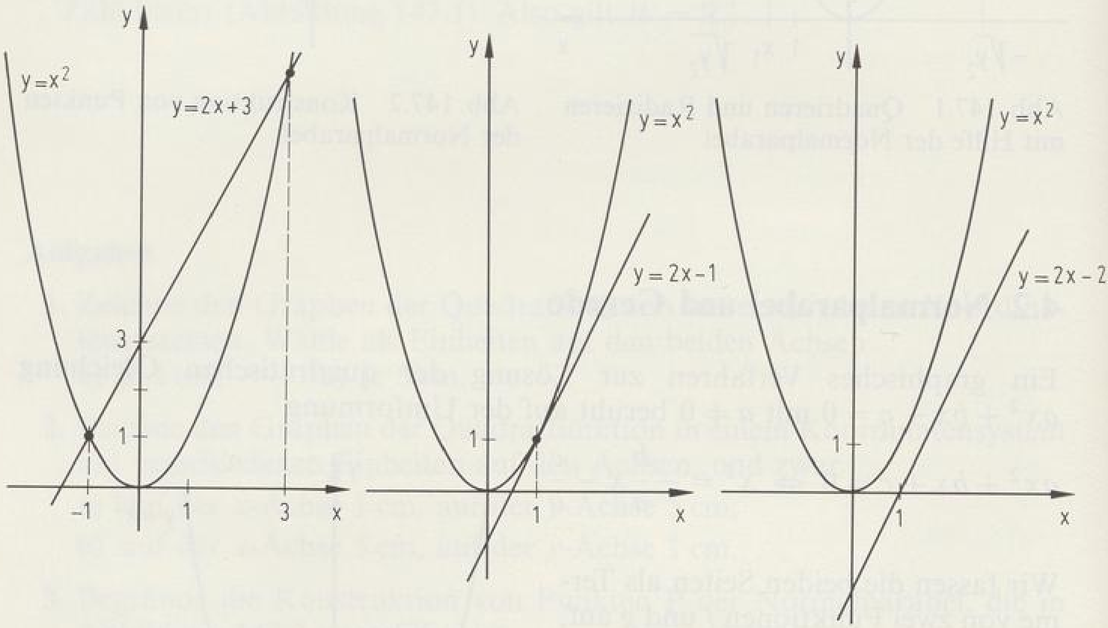

Abb. 148.1 Zur Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung

$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x^2 - 2x + 2 = 0$
$x^2 = 2x + 3$	$x^2 = 2x - 1$	$x^2 = 2x - 2$

Wir haben damit ein algebraisches Problem geometrisch gelöst. Umgekehrt kann man aber auch geometrische Probleme algebraisch lösen. Als Beispiel hierfür betrachten wir: Berechne die Schnittpunkte der Normalparabel mit einer gegebenen Geraden. Die Koordinaten der Schnittpunkte müssen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y = x^2 \\ \text{II} & y = mx + t \end{array} \quad \text{erfüllen, das mit} \quad \begin{array}{ll} \text{I}' & x^2 - mx - t = 0 \\ \text{II}' & y = mx + t \end{array} \quad \text{äquivalent ist.}$$

Je nachdem, ob die Diskriminante $D = m^2 + 4t$ der Gleichung I′ größer, gleich oder kleiner als null ist, gibt es zwei, einen oder keinen Schnittpunkt. Im Fall $D > 0$ heißt die Gerade **Sekante**, im Fall $D < 0$ heißt sie **Passante**; im Fall $D = 0$ nennt man die Gerade **Tangente***.
Wir sagen, die Tangente **berührt** die Parabel im **Berührpunkt**. Die Abszisse des Berührpunkts ist Doppellösung der quadratischen Gleichung (siehe Seite 103).
Verschiebt man eine Gerade parallel zu sich so weit, bis sie die Parabel berührt, dann kann man sich vorstellen, dass im Berührpunkt die beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Das macht die Bezeichnung Doppellösung verständlich (Abbildung 149.1).

Ist die gegebene Gerade parallel zu y-Achse, dann erhält man das einfachere System

I $y = x^2$
II $x = s$,

das die einzige Lösung $(s|s^2)$ hat (Abbildung 149.2).

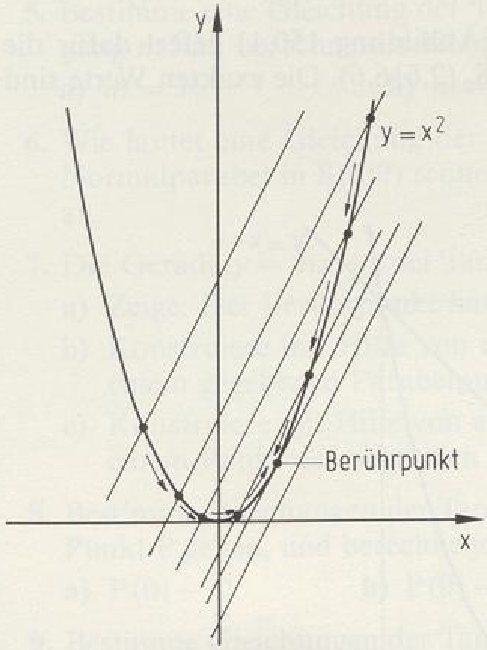

Abb. 149.1 Zur Erklärung des Begriffs »Doppellösung«

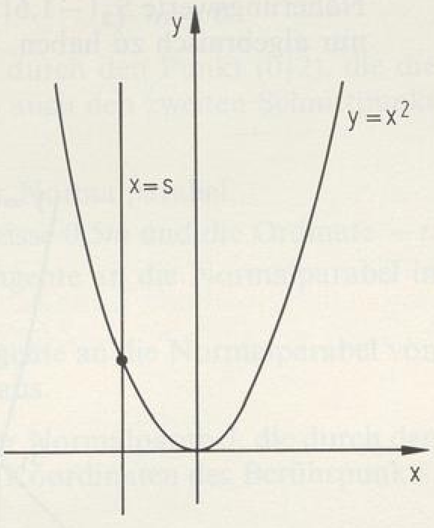

Abb. 149.2 Schnitt mit einer Geraden parallel zur Parabelachse

* secans (lat.) = schneidend; tangens (lat.) = berührend.
Passante ist eine Analogiebildung zu den vorherigen Begriffen. Aus *passus* (lat.) = *das Ausspreizen der Füße beim Gehen* wird das französische *passer* = *vorübergehen, vorbeikommen*, das wir in unserem *passieren* wiederfinden.

Ein Zahlenbeispiel soll dir zeigen, wie man im konkreten Fall vorgeht.

Beispiel:

Berechne die Schnittpunkte der Geraden $y = x + 4$ mit der Normalparabel.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y = x^2 \\ \text{II} & y = x + 4 \\ \hline \text{I}' & x^2 - x - 4 = 0 \\ \text{II}'' & y = x + 4 \\ \hline \text{I}' & x = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) \quad \vee \quad x = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \\ \text{II}'' & y = x + 4 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) + 4 = \tfrac{1}{2}(9 - \sqrt{17})$$

$$x = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) + 4 = \tfrac{1}{2}(9 + \sqrt{17})$$

Das ergibt die Schnittpunkte

$S_1(\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) | \tfrac{1}{2}(9 - \sqrt{17}))$ und $S_2(\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) | \tfrac{1}{2}(9 + \sqrt{17}))$.

Das graphische Lösungsverfahren (Abbildung 150.1) liefert dafür die Näherungswerte $S_1(-1{,}6|2{,}4)$ und $S_2(2{,}6|6{,}6)$. Die exakten Werte sind nur algebraisch zu haben.

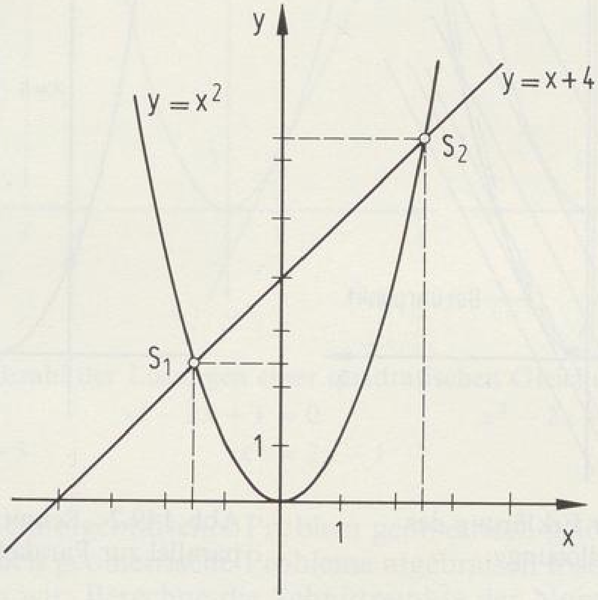

Abb. 150.1 Schnittpunkte der Normalparabel mit der Geraden $y = x + 4$

Aufgaben

1. Löse zuerst graphisch und dann rechnerisch.
   a) $x^2 - 2x = 0$ b) $x^2 + 2x - 3 = 0$
   c) $x^2 + 6x = -11$ d) $2x^2 + 24 = 16x$

2. Löse zuerst graphisch und dann rechnerisch.
   a) $x^2 - 1{,}6x - 2{,}6 = 0$ b) $3x^2 - 2x - 12 = 0$
   c) $0{,}25x^2 + 0{,}5x - 0{,}5 = 0$ d) $6x^2 + 2x - 25 = 0$
   e) $8x^2 - 14x + 1 = 0$ f) $0{,}1x^2 + 0{,}32x + 0{,}12 = 0$

3. Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Normalparabel mit der Geraden
   a) $y = -0{,}5x + 5$, b) $y = 6x - 3$.

4. Überprüfe, ob die Gerade Sekante, Tangente oder Passante der Normalparabel ist, und berechne gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte.
   a) $y = x - 1$ b) $y = -4x - 4$ c) $y = 20x - 100$
   d) $y = 100x - 20$ e) $y = 3x + 4$ f) $y = 2{,}5x - 1{,}5625$

5. Bestimme eine Gleichung der Tangente der Normalparabel, die die Steigung m hat; berechne die Koordinaten des Berührpunkts.
   a) $m = 3$ b) $m = -6$ c) $m = 0$

6. Wie lautet eine Gleichung der Geraden durch den Punkt $(0|2)$, die die Normalparabel in $S(3|?)$ schneidet? Gib auch den zweiten Schnittpunkt an.

7. Die Gerade $y = mx + t$ sei Tangente der Normalparabel.
   a) Zeige: Der Berührpunkt hat die Abszisse $0{,}5m$ und die Ordinate $-t$.
   b) Konstruiere mit Hilfe von **a)** die Tangente an die Normalparabel in einem gegebenen Parabelpunkt.
   c) Konstruiere mit Hilfe von **a)** die Tangente an die Normalparabel von einem Punkt der negativen y-Achse aus.

8. Bestimme Gleichungen der Tangenten der Normalparabel, die durch den Punkt P gehen, und berechne jeweils die Koordinaten des Berührpunkts.
   a) $P(0|-3)$ b) $P(0|-10{,}24)$

9. Bestimme Gleichungen der Tangenten der Normalparabel, die durch den Punkt P gehen, und berechne jeweils die Koordinaten des Berührpunkts.
   a) $P(1|-3)$ b) $P(-3|8)$