Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten

500.000.000.000 Mark

Banknote der Reichsbank im Wert von 500 Milliarden Mark. Aus Gründen der Sparsamkeit ist sie nur einseitig bedruckt. Es handelt sich um einen Entwurf, der nicht zur Ausgabe gelangte und durch die zweifache Perforation »Wertlos Reichsbank« entwertet wurde. Entworfen und gedruckt hat sie die österreichische Staatsdruckerei zu Wien, da 1923 die Reichsdruckerei und 30 weitere Druckereien im Deutschen Reich der Nachfrage nach immer neuen Banknoten nicht mehr nachkommen konnten. Originalgröße 17,4 cm × 9,4 cm. – Durch Verordnung vom 15.10.1923 wurde am 15.11.1923 die Rentenmark (RM) als Zahlungsmittel eingeführt; Umtauschkurs 1 RM = 1 Billion Mark. An diesem Tag notierte der US-Dollar mit 4200000000000 Mark; die höchste im Umlauf befindliche Note lautete auf 100 Billionen Mark, was man natürlich nicht als eine Eins mit 14 Nullen schrieb. Die Rentenmark wurde durch die neugegründete Deutsche Rentenbank ausgegeben. Gedeckt waren die Rentenmarkscheine, die keine Banknoten waren, durch eine Belastung der deutschen Landwirtschaft und Industrie in Höhe von 3,2 Milliarden Goldmark. Durch Gesetz vom 30.8.1924 wurde der Umlauf der Rentenmarkscheine eingeschränkt und die Reichsmark (RM) gesetzliches Zahlungsmittel. Sie wurde einer Rentenmark gleichgesetzt.

1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten

1.1 Große Zahlen

In manchen Bereichen der Wissenschaften und sogar des täglichen Lebens gibt es Zahlen, die so groß sind, daß man sie in der üblichen Schreibweise nicht mehr so ohne weiteres überblicken und handhaben kann.

Beispiele:

Anzahl der Menschen auf der Erde (1990) $\approx 5\,300\,000\,000$
Geldumlauf am 31.1.1988 in der Bundesrepublik Deutschland (Geldscheine) $\approx 151\,424\,000\,000$ DM
1 Astronomische Einheit = Mittlere Entfernung Erde–Sonne $\approx$
$\approx 149\,600\,000\,000$ m
1 Lichtjahr = Weg des Lichts in einem Jahr $= 9\,460\,000\,000\,000\,000$ m
Anzahl der Atome in 1 g Gold $\approx 3\,057\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

Das verwendete Zahlensystem, das Dezimalsystem mit der Grundzahl 10, gibt uns die Möglichkeit, solche Ziffernungetüme mit vielen Endnullen mit Hilfe von Zehnerpotenzen übersichtlicher zu schreiben. In der Wissenschaft stellt man solche Zahlen z dar als Produkt aus einer Zahl a zwischen 1 und 10 und der passenden Zehnerpotenz. Also

$$\boxed{\begin{array}{c} z = a \cdot 10^n \\ \text{mit } 1 \leqq a < 10 \text{ und } n \in \mathbb{N} \end{array}}$$

Eine derartige Darstellung einer Zahl z heißt im Englischen **scientific notation**, d.h. wissenschaftliche Schreibweise. Im Deutschen sagt man auch **Gleitkommadarstellung**. Sie wird auch bei Taschenrechnern und Computern verwendet. Der Faktor a heißt **Mantisse***, die Zahl n **Exponent** der Gleitkommadarstellung.
Die oben angegebenen Zahlen sehen in Gleitkommadarstellung so aus:

Anzahl der Menschen auf der Erde 1990 $\approx 5{,}3 \cdot 10^9$
Geldumlauf in der Bundesrepublik 1988 $\approx 1{,}51 \cdot 10^{11}$ DM
1 Astronomische Einheit $\approx 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m
1 Lichtjahr $= 9{,}46 \cdot 10^{15}$ m
Anzahl der Atome in 1 g Gold $\approx 3{,}057 \cdot 10^{21}$

* mantissa, eigentlich mantisa (römisch-etruskisch) = Zugabe. John Wallis (1616–1703) führt dieses Wort 1693 in seinem *De algebra tractatus* – »Abhandlung über die Algebra« – in die Mathematik ein, als er seinen *Treatise of algebra* von 1685 für seine *Opera mathematica* ins Lateinische übersetzt. Er betrachtet als Beispiel die Dezimalzahl 3,12003416 und nennt 0,12003416 *appendix* ([lat.] = Anhängsel, Beigabe) bzw. *mantissa* der Dezimalzahl. In der englischen Version heißt es nur *appendage*. Obwohl Mantisse später nur mehr im Zusammenhang mit Logarithmen verwendet wird (siehe Seite 167), gebraucht es 1801 Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855) in seinen *Disquisitiones arithmeticae* – »Untersuchungen über höhere Arithmetik« – im Sinne von Wallis.

Bei gerundeten Zahlen hat diese Schreibweise auch noch den Vorteil, daß man die Genauigkeit, d.h. die geltenden Ziffern erkennen kann.

Beispiel:

Die Lichtgeschwindigkeit c beträgt 299 793 km/s. Oft liest man auch den Wert 300 000 km/s und weiß dann nicht, wie vielen der 5 Nullen man trauen kann. In Gleitkommadarstellung kann man die nach der Rundung geltenden Ziffern erkennen:

$c = 2{,}99793 \cdot 10^5$ km/s
$c = 2{,}9979 \cdot 10^5$ km/s
$c = 2{,}998 \cdot 10^5$ km/s
$c = 3{,}00 \cdot 10^5$ km/s

Die letzte Zahl, $c = 3{,}00 \cdot 10^5$ km/s, sagt, daß die Lichtgeschwindigkeit auf 3 Stellen genau angegeben ist. $3 \cdot 10^5$ km/s hat nur noch eine geltende Ziffer.

Für die besonders häufig gebrauchten Zehnerpotenzen mit Exponenten, die ein Vielfaches von 3 sind, hat man eigene Namen. Ist der Exponent sogar ein k-faches von 6, dann enden diese Namen auf -illion, davor steht ein lateinischer Hinweis auf die natürliche Zahl k. Die dazwischenliegenden Vielfachen von 3 enden auf -illiarde.

10^6 = 1 Million = 1 Mio. = 1 Mill.	10^{21} = 1 Trilliarde
10^9 = 1 Milliarde = 1 Mrd.	10^{24} = 1 Quadrillion
10^{12} = 1 Billion = 1 Bio.	10^{27} = 1 Quadrilliarde
10^{15} = 1 Billiarde	10^{30} = 1 Quintillion
10^{18} = 1 Trillion	usw.

In der UdSSR, in den USA und neuerdings auch in Großbritannien verwendet man die -illiarden nicht und zählt:
one billion = 10^9, one trillion = 10^{12}, ...

Bei Benennungen verwendet man aus dem Griechischen entlehnte Vorsätze für Zehnerpotenzen*:

10^1 = da = Deka	10^2 = h = Hekto	10^3 = k = Kilo
10^6 = M = Mega	10^9 = G = Giga	10^{12} = T = Tera
10^{15} = P = Peta	10^{18} = E = Exa	10^{21} = Z = Zetta
10^{24} = Y = Yotta		

* δέκα (déka) = zehn – ἑκατόν (hekatón) = hundert – χίλιοι (chílioi) = tausend – μέγας (mégas) = groß – γίγας (gigas) = riesig – τὸ τέρας (to téras) = das Ungeheuer, das Ungetüm. Die Vorsätze *Peta* und *Exa* wurden auf Grund eines deutschen Vorschlags 1975 von der 15. Generalkonferenz für Maß und Gewicht angenommen. Abgeleitet hat sie 1969 der Kanadier Albert J. Mettler von den griechischen Zahlwörtern πέντε (pénte) für 5 bzw. ἕξ (hex), das in Zusammensetzungen oft zu ἑξα- (hexa-) verlängert wird, für 6, da $10^{15} = (10^3)^5$ und $10^{18} = (10^3)^6$ ist. Um eine Verwechslung mit den seit alters üblichen Vorsätzen *penta* für 5 und *hexa* für 6 zu vermeiden (vgl. Pentagramm und Hexameter), verzichtete Mettler auf das *n* in *Peta* und auf das *h* bei *Exa*. Analog sind wohl die von der 19. Generalkonferenz im Herbst 1991 in Paris zugelassenen Vorsätze *Zetta* und *Yotta* als starke Verfremdung von ἑπτά (heptá) = 7 bzw. ὀκτώ (októ) = 8 zu erklären, da $10^{21} = (10^3)^7$ bzw. $10^{24} = (10^3)^8$ ist.

** Zur Geschichte der großen Zahlen

Um 3000 v. Chr. besaßen die Ägypter für jede der Stufenzahlen 1, 10, 100, ..., 1000000 ein eigenes Zahlwort, wie die Siegeskeule des Königs NARMER belegt. Im Mittleren Reich (ab 1991 v. Chr.) verliert das Wort *ḥḥ*, dessen Hieroglyphe ein Gott ist, der den Luftraum umfaßt (Abbildung 10.1), die Bedeutung von 1 Million und nimmt die von »unendlich viel« an. Umgekehrt ging es bei den Griechen zu, wo μυρίος (myríos) = *unzählig, unendlich viel* zu μύριοι (mýrioi) = 10000 schrumpft, dem höchsten Zahlwort, das sie besaßen. Bei den Germanen und auch bei den Römern war 1000 die höchste Stufenzahl, für die es noch ein eigenes Zahlwort gab, nämlich das althochdeutsche *dusunt* (woraus unser *tausend* wurde) bzw. das lateinische *mille*.

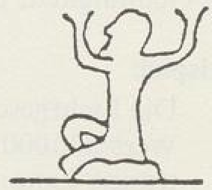

Abb. 10.1 Das ägyptische Zeichen für die Million (Siegeskeule des NARMER)

Natürlich rechneten die Römer mit erheblich größeren Zahlen, die sie aber multiplikativ ausdrücken mußten. $\overline{|X|}$, die **Million**, drückten sie durch *decies centena milia*, d. h. durch »zehnmal jeweils hundert Tausender« aus. Bis ins hohe Mittelalter verfuhr man nach dieser Methode sowohl in Europa wie auch bei den Arabern*. In einem historischen Text von 1250 taucht ein neues lateinisches Zahlwort auf, nämlich *millio*, wohl aus dem Italienischen stammend. *Mille* war dort mit der Vergrößerungssilbe *-on(e)* verbunden worden, so daß das neue Wort die Bedeutung von »vieltausend« bekam. In der Kaufmannssprache erstarrt es dann zur Bezeichnung für den Wert 10^6. In dieser Bedeutung findet es sich wieder im Reisebericht *Le devisement du Monde* – »Die Beschreibung der Welt« – des Venezianers Marco POLO (1254–1324), den während seiner Genueser Gefangenschaft 1298/99 sein Mitgefangener Ser RUSTICHELLO aus Pisa auf mittelfranzösisch niederschrieb. Mathematisch taucht Million in einer 1430/38 auf provenzalisch geschriebenen *Arithmetik* auf: *miell milie vulgarment se exprimissen per aquest vocable: milio* – »tausend Tausend werden volkstümlich durch dies Wort ausgedrückt: Million« –, dann 1478 in der *Treviso-Arithmetik*, dem zweitältesten gedruckten Rechenbuch**. Und noch 1494 erklärt Luca PACIOLI (um 1445–1517) in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita: mille migliara* [...] *che fa secondo il vulgo el milione*. In Deutschland schreibt 1526 Christoff RUDOLFF (um 1500 – vor 1543) kurz »Das tausentmaltausent oder million« in seiner *Kunstliche Rechnung mit der ziffer vnd mit den zal pfennigen*. Durchgesetzt hat sich Million aber erst durch Christian VON WOLFFS (1679–1754) weitverbreitete Werke.

In Frankreich waren jedoch längst Namen für höhere Stufenzahlen im Gebrauch. Jehan ADAM verwendet 1475 in seinem Rechenbuch die Bildungen *bymillion* und *trimillion* für 10^{12} bzw. 10^{18}. Systematisch führt die Namen Nicolas CHUQUET († 1488) ein, ein Pariser Bakkalaureus*** der Medizin. In seinem 1484 vollendeten und nur hand-

* Diese hatten die indischen Zähltürme nicht übernommen. Im *Lalitavistara* aus dem 1. Jh. v. Chr., das legendenhaft das Leben des BUDDHA († vermutlich 480 v. Chr.) erzählt, gibt es als Ausdruck seiner Allmacht eigene Namen für die Stufenzahlen 10^0 bis 10^7 und dann weiter für alle Stufenzahlen der Form $10^7 \cdot 10^{2n}$, $n = 1, 2, \ldots, 23$. Auch der indische Mathematiker MAHAVIRA (9. Jh.) verwendet eigene Namen für alle Zahlen der Form 10^n bis hin zu $n = 23$.

** Älter ist der um 1475 in Trient gedruckte in baierischem späten Mittelhochdeutsch verfaßte *Algorismus*.

*** Niedrigster Grad der Artistenfakultät, in der die sieben artes liberales (Grammatik, Dialektik, Rhetorik [Trivium], Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik [Quadrivium]) gelehrt wurden (s. auch S. 76). Erstmals wurde dieser Grad von Papst GREGOR IX. (1227–1241) an der Sorbonne in Paris eingeführt.

schriftlich überlieferten* *Le Triparty en la science des nombres* – »Die drei Teile in der Wissenschaft der Zahlen« – führt er die zur besseren Lesbarkeit großer Zahlen um 1200 von den Arabern übernommene Gruppierung der Ziffern in einem Beispiel an 6er-Gruppen vor und schreibt dazu:

> 745324˙804300˙700023˙654321
> *le premier point peult signiffier million Le second point byllion Le tiers point tryllion Le quart quadrillion Le cinq^{e} quyllion Le six^{e} sixlion Le sept.^{e} septyllion Le huyt^{e} ottyllion Le neuf^{e} nonyllion et ainsi des aultres se plus oultre on vouloit proceder*,
>
> der erste Punkt soll die Million bezeichnen, der zweite Punkt die Billion, der dritte Punkt die Trillion, der vierte die Quadrillion, der fünfte die Quintillion, der sechste die Sextillion, der siebente die Septillion, der achte die Oktillion, der neunte die Nonillion, und so andere, wenn man darüber hinausgehen will.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) empfiehlt diese Bildungen bis zur Nonillion; »denn weiter braucht man wohl beim Gebrauch der Zahlen nicht zu gehen«.** Christian von Wolff hat auch für Verbreitung dieser Termini gesorgt.
Mit *Milliart*, aus dem unser Wort **Milliarde** wurde, bezeichnet Jacques Peletier (1517 bis 1582) in seiner *L'Arithmétique* von 1552 die Zahl 10^{12}, also unsere Billion. 1558 verwendet es aber Jean Trenchant (um 1525–?) in seiner *L'Arithmétique* bereits als Abkürzung für 10^9. In den allgemeinen Sprachgebrauch ging das Wort in Frankreich jedoch erst im 19. Jh. über. In Deutschland bürgerte es sich nach dem Frankfurter Frieden vom 10. 5. 1871 ein, der den Deutsch-Französischen Krieg von 1870/71 beendete und Frankreich die enorme Kriegskostenentschädigung von 5 Milliarden Francs auferlegte, zahlbar innerhalb von drei Jahren.

Aufgaben

1. Schreibe in Gleitkommadarstellung mit drei geltenden Ziffern:

a) 3140000	**b)** 3140000000	**c)** 314
d) 9999999	**e)** 12345678910	**f)** 2929292929
g) 11061106	**h)** 120000000000	**i)** 100

2. Schreibe in Gleitkommadarstellung mit drei geltenden Ziffern:
   a) Länge des Äquators = 40076000 m
   b) Länge eines Erdjahrs (365,25 d) in Sekunden = ?
   c) Masse der Erde = 5977000000000000000000000 kg
   d) Oberfläche der Erde = 510000000000000 m^2
   e) Volumen der Erde = 1083000000000000000000 m^3
   f) Alter der Erde = 4500000000 a

3. Schreibe in Gleitkommadarstellung:
   a) Alter des Weltalls = 20 Mrd. Jahre

* Estienne de la Roche dict Villefranche war aber im Besitz des Manuskripts und schlachtete es nach Gutdünken für seine 1520 erschienene *Larismetique nouellement composee* aus, die 1538 sogar eine erweiterte Auflage erfuhr.

** *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (zwischen 1700 und 1709 entstanden, 1765 veröffentlicht): »Ainsi je crois, qu'il seroit convenable, qu'en comptant au lieu Million des Millions, on dise Billion pour abreger, et qu'au lieu de Million de Millions de Millions, ou Million de Billions on dise Trilion, et ainsi de suite jusqu'aux Nonilions, car on'a gueres besoin d'aller plus loin dans l'usage des nombres.«

b) Kürzeste Entfernung Erde–Mars = 55 Mio. km
c) Astronomische Längeneinheit Parsec = 1 pc = 30,875 Bio. km
d) Durchmesser der Sonne = 1,39 Mrd. m
e) Größter Geldschein **1)** der deutschen Inflation: 100 Billionen Mark (Kaufkraft Ende November 1923: $\frac{1}{2}$ kg Fleisch kostete 1 Bio. Mark.)
2) der ungarischen Inflation: 100 Quadrilliarden Pengö (Kaufkraft Ende Juli 1946: $\frac{1}{2}$ Laib Brot kostete 100 Quadrilliarden Pengö.)

4. Wie viele Millionen sind
a) $3 \cdot 10^6$ **b)** $2{,}1 \cdot 10^7$ **c)** $3{,}2 \cdot 10^8$ **d)** $5 \cdot 10^9$ **e)** $8 \cdot 10^{12}$ **f)** $10 \cdot 10^{10}$?

5. Wie viele Millionen m sind **a)** 10 Mm **b)** 100 Gm **c)** 0,1 Tm **d)** 100 km ?

6. Kaiser VESPASIAN (9–79 n. Chr.) stellte bei seiner Regierungsübernahme 69 n. Chr. fest, daß die Staatsschulden quadrigenties milies (= vierhundertmal tausendmal) Sesterzen* betrugen. In der Staatsverwaltung ließ man bei hohen Beträgen die Einheit centena milia (= hundert Tausender) weg. Wie groß (in Sesterzen) sind die von SUETON (um 70–130) in *Vesp.* 16 überlieferten Staatsschulden in Gleitkommadarstellung?

Sesterzen in Originalgröße

Abb. 12.1 *Links:* Silber; 0,87 g**, Prägedatum unbekannt. Vs.: II S(emis) [= $2\frac{1}{2}$]; Kopf der Roma mit Helm. – Rs.: ROMA; darüber die Dioskuren CASTOR und POLLUX zu Pferde. Die göttlichen Zwillinge waren ritterliche Nothelfer und Schutzherren der Seefahrer.
Rechts: Messing; 23,89 g, 71 n. Chr. Vs.: Lorbeerbekränztes Haupt VESPASIANS mit der Umschrift IMP(erator) CAES(ar) VESPASIAN(us) AUG(ustus) P(ontifex) M(aximus)TR(ibunicia) P(otestate) P(ater) P(atriae) CO(n)S(ul) III. – Rs.: IUDAEA CAPTA [= Judäa ist erobert] und S(enatus) C(onsulto) [= auf Senatsbeschluß]. Vor einer Dattelpalme sitzt trauernd Judäa, hinter ihr steht der Kaiser in Rüstung. – Die Münze erinnert an die Erstürmung Jerusalems und damit die Eroberung Judäas durch des Kaisers Sohn TITUS.

* *sestertius* (lat.), entstanden aus *semis tertius* = *dritthalb* = $2\frac{1}{2}$. Der Name rührt davon her, daß der Sesterz der 4. Teil des 210 v. Chr. geschaffenen *denarius* war, einer Silbermünze von 4,55 g, die in 10 Asse eingeteilt wurde; der Sesterz war also $2\frac{1}{2}$ Asse wert. Er wog 1,137 g = 1 scripulum (von lat. scrupus = spitzer, kleiner Stein). Er blieb römische Rechnungseinheit bis 293 n. Chr. Nicht gemeint in der Aufgabe ist der unter AUGUSTUS (63 v. Chr.–14 n. Chr.) eingeführte Sesterz, eine Messingmünze von 27,3 g (= 1 uncia).

** Die Abweichung vom Normgewicht 1,137 g ist verständlich, da kleinere Nominale al marco justiert wurden, d. h., eine größere Menge von Münzen wurde auf ihr Gesamtgewicht egalisiert. Die Spannen waren relativ hoch. Bei größeren Werten geschah die Justierung al pezzo, d. h. stückweise.

7. a) Jemand zahlt 100 Bio. Mark in 1-Mark-Münzen aus. Wie viele Jahre braucht er dazu, wenn er in jeder Sekunde eine Münze auszahlt und die Kasse 10 Stunden pro Tag (1a = 365 d) geöffnet ist?

b) Wie lange dauert das Verfahren aus **a)**, wenn man den 100-Quadrilliarden-Schein in einzelne Pengö wechselt?

8. a) Wie hoch wird ein Turm (in km), wenn man 100 Bio. Geldscheine, von denen jeder die Dicke 0,1 mm hat, aufeinanderlegt?
Wie viele Astronomische Einheiten (AE) ergibt das? Wie lang braucht das Licht für diese Strecke?

b) Löse **a)** mit 100 Quadrilliarden Geldscheinen an Stelle von 100 Bio. Geldscheinen.

9. In der Süddeutschen Zeitung vom 31. Januar 1989 liest man: »2,2 Millionen Touristen besuchten 1988 Australien, 43 Prozent mehr als im Jahr zuvor. Sie gaben, so rechnet das australische Fremdenverkehrsamt, drei Billionen australische Dollar aus.« Wie viele Dollar gab demnach ein Tourist im Mittel aus? Welchen Übersetzungsfehler hat der Autor wohl begangen? Wie viele Dollar gab ein Tourist im Mittel vermutlich wirklich aus?

1.2 Wiederholung der Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten

Die Definition der Potenzen und das Rechnen mit ihnen kennst du schon. Zur Erinnerung wiederholen wir:

> **Definition 13.1:** Für das Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren a schreibt man kurz a^n, gesprochen »a hoch n«, und nennt es ***n*-te Potenz** von a; kurz $\boldsymbol{a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$, $n \in \{2, 3, 4 \ldots\}$.
>
> Man sagt: a wird mit n potenziert. a heißt **Grundzahl** oder **Basis**, n heißt **Hochzahl** oder **Exponent**.

Da n die Anzahl der Faktoren im Produkt angibt, muß n eine natürliche Zahl und außerdem größer als 1 sein. Kürzt man den Bruch $\frac{a^n}{a}$ mit a, dann erhält man $\frac{a^n}{a} = a^{n-1}$. Für $n = 2$ ergibt sich formal $\frac{a^2}{a} = a^1$, andererseits ist $\frac{a^2}{a} = \frac{a \cdot a}{a} = a$, also liegt nahe

> **Definition 13.2:** $\boldsymbol{a^1 := a}$

Wir erinnern an die Regel für das Berechnen von Zahlentermen:

Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich

Beispiele:

1) $4 + 3 \cdot 5^2 = 4 + 3 \cdot 25 = 4 + 75 = 79$
2) $(4 + 3) \cdot 5^2 = 7 \cdot 5^2 = 7 \cdot 25 = 175$
3) $4 + (3 \cdot 5)^2 = 4 + 15^2 = 4 + 225 = 229$
4) $(4 + 3 \cdot 5)^2 = (4 + 15)^2 = 19^2 = 361$
5) $((4 + 3) \cdot 5)^2 = (7 \cdot 5)^2 = 35^2 = 1225$

Beachte: Manche Taschenrechner halten sich nicht an diese Vereinbarung. Studiere also jeweils genau die Gebrauchsanweisung!

Rechengesetze

I. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}$$

Also gilt

Satz 14.1: Potenzen gleicher Basis werden miteinander multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält; kurz

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $x^8 \cdot x^{19} = x^{8+19} = x^{27}$
2) $z \cdot z^2 = z^1 \cdot z^2 = z^{1+2} = z^3$
3) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{2+3} \cdot a^4 = a^{(2+3)+4} = a^{2+3+4} = a^9$

II. Potenzieren einer Potenz

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ Summanden } m}} = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}$$

Somit gilt

Satz 14.2: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert und die Basis beibehält; kurz

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$
2) $((z^3)^5)^7 = (z^{3 \cdot 5})^7 = z^{(3 \cdot 5) \cdot 7} = z^{3 \cdot 5 \cdot 7} = z^{105}$

Beachte: $(x^2)^3 \neq x^{2^3}$. Auf der linken Seite wird nämlich die Basis x^2 mit 3 potenziert, und das ergibt x^6. Auf der rechten Seite hingegen wird die Basis x mit dem Exponenten 2^3 potenziert; da x^{2^3} die Kurzschreibweise für $x^{(2^3)}$ ist, erhält man x^8.

III. Potenzieren eines Produkts

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } (a \cdot b)} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } b} = a^n \cdot b^n$$

Satz 15.1: Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert und die entstandenen Potenzen miteinander multipliziert; kurz

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Offensichtlich gilt dieser Satz auch für Produkte aus mehr als zwei Faktoren, z.B.: $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$.

Beispiele:

1) $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4 = 81x^4$
2) $(0{,}3 \cdot x^2)^4 = 0{,}3^4 \cdot (x^2)^4 = 0{,}0081x^8$

IV. Potenzieren eines Quotienten

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Faktoren } \frac{a}{b}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren } b}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Satz 15.2: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert und die Zählerpotenz durch die Nennerpotenz dividiert; kurz

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}} \quad (b \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $\left(\frac{3}{2}xy^3\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 = \frac{3^4}{2^4}\,x^4 y^{12} = \frac{81}{16}\,x^4 y^{12}$

2) $\left(\frac{3ax^2}{4b^3y}\right)^3 = \frac{(3ax^2)^3}{(4b^3y)^3} = \frac{3^3a^3(x^2)^3}{4^3(b^3)^3y^3} = \frac{27a^3x^6}{64b^9y^3}$

V. Division von Potenzen mit gleicher Basis

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}}, \quad a \neq 0$$

Durch Kürzen läßt sich der rechts stehende Bruch vereinfachen:
Ist $m > n$, dann ergibt sich a^{m-n}.
Ist $m = n$, dann ergibt sich 1.
Ist $m < n$, dann ergibt sich $\frac{1}{a^{n-m}}$.

Wir halten die Ergebnisse fest in

> **Satz 16.1:** Für $a \neq 0$ gilt:
>
> Ist $\boldsymbol{m > n}$, dann gilt $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$.
>
> Ist $\boldsymbol{m = n}$, dann gilt $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = 1}$.
>
> Ist $\boldsymbol{m < n}$, dann gilt $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}}$.

Beispiele:

1) $\frac{x^{19}}{x^8} = x^{19-8} = x^{11}$

2) $\frac{y^{13}}{y^{13}} = 1$

3) $\frac{z^3}{z^7} = \frac{1}{z^{7-3}} = \frac{1}{z^4}$

VI. Addition und Subtraktion von Potenzen

Weil sich Terme nur addieren bzw. subtrahieren lassen, wenn sie gleichartig sind, brauchen wir für Potenzen (das sind ja speziell gebaute Terme!) keine besonderen Regeln.

$a^3 + a^4$ kann man nicht zusammenfassen, wohl aber faktorisieren zu $a^3(1 + a)$.

$a^3 + b^3$ kann man nicht zusammenfassen.

$a^3 + a^3$ dagegen ergibt $2a^3$.

Beachte:

$3a = a + a + a \qquad a^3 = a \cdot a \cdot a$

$3a + a = 4a \qquad 3a \cdot a = 3a^2$

$3a^2 + a = a(3a + 1) \qquad 3a^2 \cdot a = 3a^3$

$3a^2 + a^2 = 4a^2 \qquad 3a^2 \cdot a^2 = 3a^4$

Aufgaben

1. Berechne und vergleiche:

a) 2^3 und 3^2 **b)** 3^5 und 5^3

c) $(2 + 5)^2$ und $2^2 + 5^2$ **d)** $(17 - 12)^2$ und $17^2 - 12^2$

e) $(3 \cdot 5)^2$ und $3 \cdot 5^2$ **f)** $(12 : 4)^2$ und $12 : 4^2$

2. a) $(\frac{1}{4})^3$ **b)** $(-\frac{2}{3})^2$ **c)** $(1\frac{2}{5})^4$ **d)** $(-\frac{36}{27})^5$ **e)** $0{,}3^2$

f) $-0{,}3^3$ **g)** $0{,}3^4$ **h)** $0{,}03^2$ **i)** $-2{,}5^2$ **j)** $0{,}25^2$

3. a) $(-1)^2$ **b)** $(-1)^3$ **c)** $(-1)^4$ **d)** $(-1)^5$

e) $(-1)^8$ **f)** $(-1)^{17}$ **g)** $(-1)^{103}$ **h)** $(-1)^{1234}$

i) Welche Werte können Potenzen mit der Grundzahl -1 annehmen? Bei welchen Hochzahlen treten die verschiedenen Potenzwerte auf?

4. a) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2})^2$ **b)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{2})^2$ **c)** $\frac{1}{4} - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$

d) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$ **e)** $((\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2})^2$ **f)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}$

5. a) $(-0{,}1)^2$ **b)** $(-10)^2$ **c)** $(-0{,}1)^3$ **d)** $(-10)^3$

e) $(-0{,}01)^2$ **f)** $(-0{,}01)^3$ **g)** $(-100)^2$ **h)** $(-100)^3$

6. a) $-(-x)^2$ **b)** $-(-x)^3$ **c)** $[-(-x)]^2$ **d)** $[-(-x)]^3$

7. Schreibe als Potenz mit größtmöglichem Exponenten aus $\mathbb{N}$:

a) 216 **b)** -216 **c)** 0,216 **d)** 0,25 **e)** $-0{,}125$

f) $-\frac{1}{8}$ **g)** $-0{,}008$ **h)** $\frac{343}{27}$ **i)** 1024 **j)** 59049

8. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^5$ **b)** $3 \cdot 10^7 \cdot 10^3$ **c)** $-1{,}5 \cdot 10^3 \cdot (-1{,}8 \cdot 10^9)$

d) $6{,}25 \cdot 10^8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^7$ **e)** $9{,}4 \cdot 10^3 \cdot 8{,}7 \cdot 10^5 \cdot 5{,}5 \cdot 10^2$

9. a) $x^2 \cdot x^7$ **b)** $x \cdot x^3 \cdot x^4$ **c)** $(a+b)^3 \cdot (a+b)^5$

d) $(-z)^5 \cdot (-z)$ **e)** $(-ab)^3 \cdot (-ab)^5$ **f)** $\frac{r}{s} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^6$

10. Berechne und vergleiche:

a) $(2^2)^3$ und 2^{2^3} **b)** $(2^3)^2$ und 2^{3^2}

c) $(3^2)^3$ und 3^{2^3} **d)** $(3^3)^2$ und 3^{3^2}

11. Berechne und vergleiche:

a) $(x^2)^3$ und x^{2^3} **b)** $((-x)^2)^3$ und $(-x)^{2^3}$

c) $((-x)^3)^2$ und $(-x)^{3^2}$ **d)** $(-x^3)^2$ und $-x^{3^2}$

12. a) $(x \cdot y \cdot z)^3$ **b)** $(x^2 \cdot y)^4$ **c)** $z^5 \cdot (y^6 \cdot z)^3$

13. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $(3 \cdot 10^2)^4$ **b)** $(1{,}5 \cdot 10^7)^3$ **c)** $(-0{,}6 \cdot 10^9)^5$ **d)** $(-5 \cdot 10^3)^4$

14. Berechne und vergleiche:

a) $(2x^2)^3$ und $(2x)^{2^3}$ **b)** $2(x^2)^3$ und $2x^{2^3}$

c) $(2(-x)^3)^2$ und $(2(-x))^{3^2}$ **d)** $2((-x)^3)^2$ und $2(-x)^{3^2}$

15. a) $\left(\frac{ab}{c}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{a^2 b}{c^3}\right)^5$

d) $\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2$ **e)** $\left(\frac{(ab)^4 \cdot c}{(ac)^3 \cdot b^4}\right)^2$ **f)** $\frac{[a^7 (bc^2)^4]^3}{[(a^3 b^4)^2 \cdot c^6]^4}$

16. a) $\frac{a^5}{a^7}$ **b)** $\frac{a^7}{a^5}$ **c)** $\frac{a \cdot a^6}{a^3 \cdot a^4}$ **d)** $\frac{2^{19}}{2^{22}}$

e) $\frac{3^{26}}{3^{22}}$ **f)** $\frac{2^{41} \cdot 5^{17}}{2^{35} \cdot 5^{20}}$ **g)** $\frac{7^3 \cdot 2^8}{14^5 \cdot 2^3}$ **h)** $\frac{15^5 \cdot 2^3}{3^4 \cdot 20^3}$

17. Berechne unter Beachtung der möglichen Fälle:

a) $\frac{a^2}{a^n}$ **b)** $\frac{a^m}{a^3}$ **c)** $\frac{u^{m+2}}{u^{n+2}}$ **d)** $\frac{v^{n+3}}{v^{m+1}}$

e) $3^{n+1} : 3^4$ **f)** $3^4 : 3^{n+1}$ **g)** $3^{2n+1} : 3^{2n-1}$

18. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $\frac{3 \cdot 10^7}{1{,}5 \cdot 10^3}$ **b)** $\frac{10^{19}}{2{,}5 \cdot 10^5}$ **c)** $\frac{1{,}8 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{10}}$ **d)** $\frac{10}{8 \cdot 10^4}$

19. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6$ **b)** $3{,}1 \cdot 10^4 - 2{,}5 \cdot 10^3$

c) $(4 \cdot 10^3 - 10^4) \cdot 3 \cdot 10^3$ **d)** $10 - 10^2 + 10^3 - 10^4$

20. Vereinfache:

a) $0{,}125^{2+n} \cdot 4^4$ **b)** $\left(2\frac{3}{5}\right)^{2n+1} \cdot \left(-\frac{5}{26}\right)^{2n+1}$

c) $\left(1\frac{8}{9} \cdot \frac{a}{b^2}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{17} \cdot \frac{a^2}{b}\right)^3$ **•d)** $\left(2\frac{4}{5} \cdot \frac{x}{y^2 z}\right)^{k+1} : \left(-0{,}7\frac{x}{yz^2}\right)^k$

21. a) $(1 + a^2 + a^4)(a^2 - 1)$ **b)** $(a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$

c) $(a^4 - a^2 b + b^2)(a^2 + b)$

d) $(a^3 + 2a^2 b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2 b + 2ab^2 - b^3)$

22. a) $(x^8 + x^6 - x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

b) $(a^7 b^2 + 3a^4 b^6 - 2ab^{10})(a^8 b + 4a^5 b^5 - 3a^2 b^9)$

c) $(x^3 y^7 - 5x^5 y^4 - 6x^7 y)(xy^9 + 4x^3 y^6 - 6x^5 y^3)$

23. a) $(a^2 + 5a)^3$ **b)** $(x^4 - 1)^3$ **c)** $(x^3 - 1)^4$ **d)** $(1 + a^2 + a^4)^3$

24. a) Wie viele Astronomische Einheiten ergeben 1 Lichtjahr?

b) Wie viele Lichtjahre ergeben 1 pc? (Vgl. Aufgabe 12/**3.c**).)

c) Wie viele Sekunden braucht das Licht von der Sonne bis

1) zur Erde,

2) zum meist sonnenfernsten Planeten Pluto, der in einer durchschnittlichen Entfernung von $5{,}91 \cdot 10^{12}$ m die Sonne umkreist,

3) zum sonnennächsten Planeten Merkur ($5{,}791 \cdot 10^{10}$ m)?

25. Ein Blatt Papier der Dicke 0,1 mm wird 100mal gefaltet. Wie dick ist das entstandene Gebilde?

26. Aufgabe 79 aus dem *Papyrus Rhind* (entstanden um 1800 v. Chr., geschrieben um 1550 v. Chr.) taucht bis ins hohe Mittelalter in vielen Abwandlungen auf und findet schließlich ihren Niederschlag in einem englischen Kinderreim (Aufgabe 139/**14**):
[In einem Dorf gibt es] 7 Häuser. [In jedem Haus leben] 7 Katzen. [Jede Katze frißt] 7 Mäuse. [Jede Maus frißt] 7 Ähren Dinkel.* [Von jeder Ähre könnte man im nächsten Jahr] 7 Scheffel [ernten.]

a) Wieviel gibt es von jeder Sorte?

b) Wie groß ist die im *Papyrus Rhind* angegebene Summe aller Sorten?

* Dinkel, eine sehr winterharte und anspruchslose alte Kulturform des Weizens, auch Spelt oder Spelz genannt. Unreif geernteter und gedarrter Dinkel heißt Grünkern. – 1 Scheffel = 4,805 l.

1.3 Polynomdivision*

Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Polynomen hast du im Laufe der letzten Jahre gelernt, ferner auch, wie man ein Polynom durch ein Polynom ersten Grades dividiert. Dieses Verfahren soll jetzt auf Divisorpolynome höheren Grades erweitert werden. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß Dividend und Divisor nur eine, und zwar die gleiche Variable enthalten.

Beispiel 1:

$(12x^5 + 12x - 54x^3 - 11x^2 - 12 - 10x^4) : (2x^2 - 6 - 3x) =$

Die Division wird sich leichter durchführen lassen, wenn man die Polynome zuerst in gleicher Weise ordnet, und zwar nach fallenden Potenzen der Variable.

$(12x^5 - 10x^4 - 54x^3 - 11x^2 + 12x - 12) : (2x^2 - 3x - 6) =$

Man beginnt nun bei der vorliegenden Ordnung die Division mit den jeweils höchsten Potenzen, also mit $12x^5 : 2x^2$, und erhält $6x^3$. Das Ergebnis $6x^3$ schreibt man rechts vom Gleichheitszeichen als ersten Summanden des Quotienten an und multipliziert damit dann den Divisor $2x^2 - 3x - 6$. Man erhält als Produkt $12x^5 - 18x^4 - 36x^3$. Dieses wird vom Dividendenpolynom subtrahiert. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis sich als Rest entweder null oder ein Polynom ergibt, dessen Grad niedriger ist als der Grad des Divisorpolynoms.

$$\begin{array}{l}
(12x^5 - 10x^4 - 54x^3 - 11x^2 + 12x - 12) : (2x^2 - 3x - 6) = 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \\
\underline{-(12x^5 - 18x^4 - 36x^3)\qquad\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad 8x^4 - 18x^3 - 11x^2 + 12x - 12 \\
\qquad \underline{-(8x^4 - 12x^3 - 24x^2)\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad -6x^3 + 13x^2 + 12x - 12 \\
\qquad\qquad \underline{-(-6x^3 + 9x^2 + 18x)\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4x^2 - 6x - 12 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-(4x^2 - 6x - 12)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Falls sich nicht null als Rest ergibt, muß das Restpolynom durch das Divisorpolynom dividiert und der Bruchterm zum Ergebnis auf der rechten Seite addiert werden, damit das Gleichheitszeichen zu Recht besteht. Dies entspricht dem Vorgehen bei der Division ganzer Zahlen:

$18 : 7 = 2$ Rest 4, d.h., $18 : 7 = 2 + \frac{4}{7} = 2\frac{4}{7}$.

Hierzu nun

* Die Division von Polynomen erscheint nicht vor dem 16. Jh. Als erster bewältigte sie Michael Stifel (1487?–1567) in seiner *Arithmetica integra* 1544.

Beispiel 2:

$$
\begin{array}{l}
(x^6 - x^3 - x^2 - 2) : (x^3 + x - 3) = x^3 - x + 2 + \dfrac{-5x+4}{x^3+x-3} \\
\underline{-(x^6 + x^4 - 3x^3)} \\
\quad -x^4 + 2x^3 - x^2 - 2 \\
\quad \underline{-(-x^4 \qquad - x^2 + 3x)} \\
\qquad 2x^3 - 3x - 2 \\
\qquad \underline{-(2x^3 + 2x - 6)} \\
\qquad\quad -5x + 4
\end{array}
$$

Nun wenden wir uns dem Fall zu, daß mehr als eine Variable vorkommen. Dann wählt man eine der Variablen aus und ordnet wie in den obigen Beispielen nach fallenden Potenzen dieser Variable. Die Durchführung der Division zeigt

Beispiel 3:

$$
\begin{array}{l}
(6x^4 + 13ax^3 + 2a^2x^2 - a^3x - 2a^4) : (2x^2 + 3ax - 2a^2) = 3x^2 + 2ax + a^2 \\
\underline{-(6x^4 + \ 9ax^3 - 6a^2x^2)} \\
\quad 4ax^3 + 8a^2x^2 - a^3x - 2a^4 \\
\quad \underline{-(4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x)} \\
\qquad 2a^2x^2 + 3a^3x - 2a^4 \\
\qquad \underline{-(2a^2x^2 + 3a^3x - 2a^4)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Hätte man in Beispiel 3 die Polynome nicht nach x, sondern nach a geordnet, so hätte sich

$(-2a^4 - a^3x + 2a^2x^2 + 13ax^3 + 6x^4) : (-2a^2 + 3ax + 2x^2) = a^2 + 2ax + 3x^2$

ergeben, wie du leicht nachrechnen kannst.

Aufgaben

1. a) $(x^3 - 4x^2 + 10x - 12) : (x - 2)$

b) $(-6x^3 + 23x^2 - 23x + 56) : (7 - 2x)$

c) $(10a^4 + 13a^3 - 3a^2 + 2a + 3) : (2a + 3)$

d) $(\frac{9}{25}x^3 - \frac{603}{100}x^2 + \frac{13}{20}x - \frac{5}{2}) : (0{,}3x - 5)$

e) $(84x^2 - 68x + 8) : (2x - \frac{4}{3})$

2. a) $(10x^4 + 15x^3 + 23x^2 - 9x + 9) : (10x^2 - 5x + 3)$

b) $(4x^4 - 17x^2 + 4) : (4x^2 - 1)$

c) $(64a^4 - 8a^3 - 80a^2 + 5a + 25) : (8a^2 - 5)$

d) $(-3b^4 + 8b^3 - 14b^2 + 8b - 3) : (-b^2 + 2b - 3)$

3. a) $(x^5 + 2x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x^2 + 2x - 1)$
b) $(-2x^6 + 12x^3 + 8x^2 + 16x - 10) : (2x^3 + 4x - 2)$
c) $(-2x^6 + 12x^3 + 8x^2 + 16x - 10) : (-x^3 + 2x + 5)$
d) $(2x^6 - 3x^5 + 11x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 14x) : (x^2 - 2x + 7)$
e) $(-0{,}06x^5 + 0{,}13x^4 - 0{,}29x^3 + 0{,}62x^2 - 0{,}3x + 1) : (0{,}3x^2 - 0{,}2x + 1)$

4. a) $(a^2b^2 + 2a^2b + a^2 + 2ab^2 + 4ab + 2a + b^2 + 2b + 1) : (ab + a + b + 1)$
b) $(-a^3 + 3a^2b - 2a^2 - ab^2 + 4ab - a - b^3 + 2b^2 + b - 2) :$
$: (-a^2 + 2ab + b^2 - 1)$
• c) $((a-1)x^4 - (3a-4)ax^3 + 3a^2(a-2)x^2 + a^3(a+2)x + a^4) : (ax + a - x)$
d) $(a^3bc - 2a^2b^2c + 2a^2bc^2 + ab^3c - 2ab^2c^2 + abc^3) : (a - b + c)$
e) $(9x^4 - 4a^2x^2 + 4a^3x - a^4) : (3x^2 - 2ax + a^2)$

5. a) $[(16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1) : (2x - 1)] : (2x - 1)$
b) $(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) : (4x^2 - 4x + 1)$
c) $(x^3 + y^3) : (x + y)$
d) $(x^3 - y^3) : (x - y)$
e) $(x^5 - 1) : (x - 1)$
f) $(128x^7 - 1) : (2x - 1)$
g) $(1 - 0{,}008x^6) : (10 - 2x^2)$

6. Divisionen, die nicht aufgehen:
a) $(2x^5 + 2x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x^3 + 2x - 1)$
b) $(12x^3 + 8x^2 + 16x - 10) : (2x^3 + 4x - 1)$
c) $(-2x^6 - 10) : (-x^3 + 2x + 5)$
d) $(11x^3 - 11x^2 + 14x) : (x^2 - 2x + 7)$
e) $(8x^3 + 2x^2 - 3x + 1) : (2x + 1)$