Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

4.3 Die Wurzelfunktion

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

4.3 Die Wurzelfunktion

4.3.1 Definition der Wurzelfunktion

Ordnet man jeder nicht negativen Zahl x ihre Quadratwurzel $\sqrt{x}$ zu, so hat man eine Funktion; sie heißt Quadratwurzelfunktion oder kurz Wurzelfunktion. Wir merken uns

> **Definition 152.1:**
> Die Funktion $f\colon x \mapsto \sqrt{x},\ D_f = \mathbb{R}_0^+$ heißt **Wurzelfunktion**.

Zum Zeichnen des Graphen der Wurzelfunktion berechnen wir eine Wertetabelle, auf Zehntel gerundet.

x	0	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{x}$	0	0,5	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

Abbildung 152.1 gibt den Graphen wieder.
Wegen $0 \leqq x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ (vergleiche Seite 53) ist die Wurzelfunktion echt monoton wachsend. Die Wertemenge der Wurzelfunktion ist $\mathbb{R}_0^+$. Wäre die Wertemenge nämlich nach oben beschränkt, dann müsste es eine Zahl N geben, sodass $\sqrt{x} < N$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ gälte. Aus $\sqrt{x} < N$ folgt aber $x < N^2$, und das ist ein Widerspruch, weil x beliebig groß werden kann.

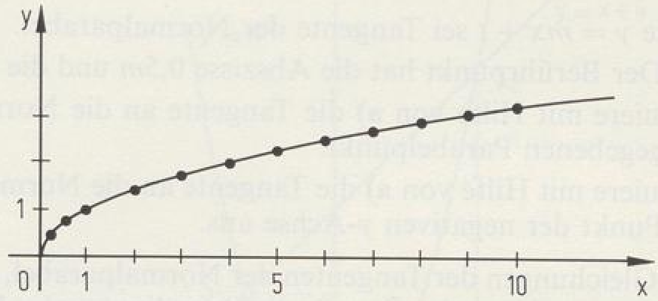

Abb. 152.1 Der Graph der Wurzelfunktion

Aufgaben

1. Bestimme die maximale Definitionsmenge der folgenden Funktionsterme und berechne eine Wertetabelle, sodass du die Graphen der zugehörigen Funktionen zeichnen kannst.
a) $\sqrt{-x}$ **b)** $-\sqrt{-x}$ **c)** $\sqrt{|x|}$ **d)** $-\sqrt{|x|}$

2. Löse wie in Aufgabe **1**:
a) $\sqrt{x^2}$ **b)** $-\sqrt{x^2}$ **c)** $\sqrt{-x^2}$

4.3.2 Die Umkehrfunktion

Eine Funktion $f\colon x \mapsto y$ mit $y = f(x)$ ordnet jeder Zahl x ihrer Definitionsmenge D genau eine Zahl y ihrer Wertemenge W zu.

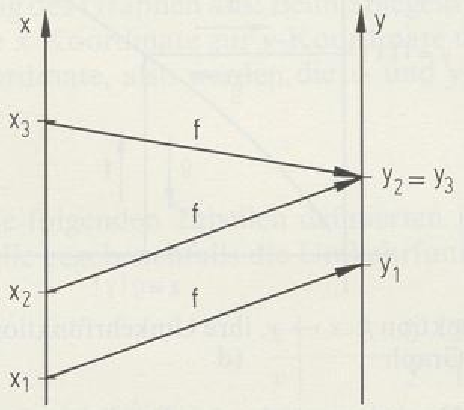

Abb. 153.1 Veranschaulichung einer Funktion $f\colon x \mapsto y$

Abbildung 153.1 zeigt, dass dabei auch verschiedene x-Werte denselben y-Wert als Funktionswert haben können. Zu einem solchen y-Wert gehört also mehr als ein x-Wert. Kehrt man die Zuordnung um, dann erhält man keine Funktion, weil die umgekehrte Zuordnung nicht eindeutig ist. Es gibt aber Funktionen f, bei denen die Umkehrung der Zuordnung wieder eindeutig ist, also eine neue Funktion g ergibt. f heißt in einem solchen Fall **umkehrbar**, und g nennt man die **Umkehrfunktion** von f (Abbildung 153.2).
Die Umkehrbarkeit einer Funktion bedeutet, dass ihr Graph von jeder Parallelen zur x-Achse höchstens einmal geschnitten wird; denn jedes $y \in W$ darf nur einem einzigen $x \in D$ zugeordnet sein. Die Umkehrfunktion g zur Funktion $f\colon x \mapsto y$ entsteht dann einfach durch Umkehren der Abbildungsrichtung $g\colon y \mapsto x$ (Abbildung 154.1). Die Definitionsmenge der Umkehrfunktion g ist die Wertemenge W der ursprünglichen Funktion f. Die Wertemenge von g ist dann natürlich die Definitionsmenge D von f.

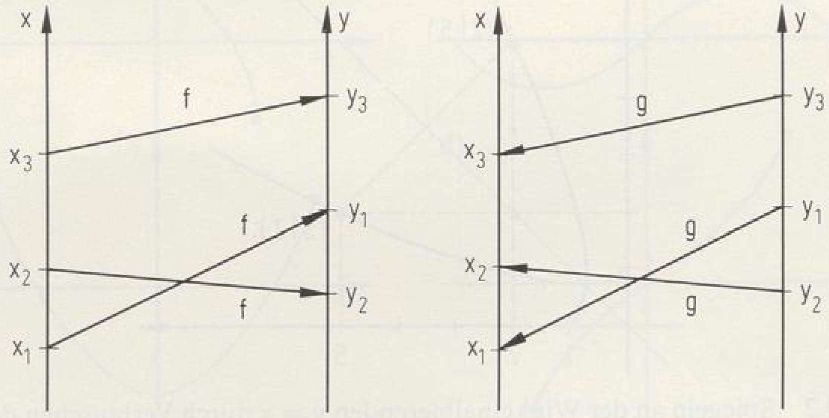

Abb. 153.2 Die Funktion f und ihre Umkehrfunktion g

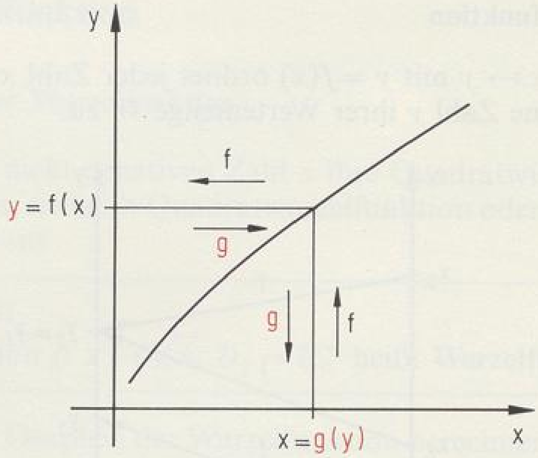

Abb. 154.1 Die Funktion $f\colon x \mapsto y$, ihre Umkehrfunktion $g\colon y \mapsto x$ und ihr gemeinsamer Graph

Schreibt man den Funktionswert y der Funktion $f\colon x \mapsto y$ in der Form $f(x)$, so hat die Funktion f die Funktionsgleichung $y = f(x)$. Hat f eine Umkehrfunktion $g\colon y \mapsto x$ und bezeichnet man ihren Funktionswert mit $g(y)$, so gilt die Gleichung $x = g(y)$. Die Gleichungen $y = f(x)$ und $x = g(y)$ stellen denselben Zusammenhang zwischen den Elementen der Mengen D und W dar. Bei $y = f(x)$ wird lediglich die Zuordnungsrichtung $x \mapsto y$, bei $x = g(y)$ die Zuordnung $y \mapsto x$ hervorgehoben. In beiden Fällen ergibt sich derselbe Graph.
Bei der Schreibweise $x = g(y)$ für die Umkehrfunktion $g\colon y \mapsto x$ ist y die unabhängige und x die abhängige Variable. Betrachtet man die Funktion g für sich allein, so wird man wie üblich die unabhängige Variable mit x und die abhängige mit y bezeichnen. Diese Änderung der Bezeichnungsweise führt zur

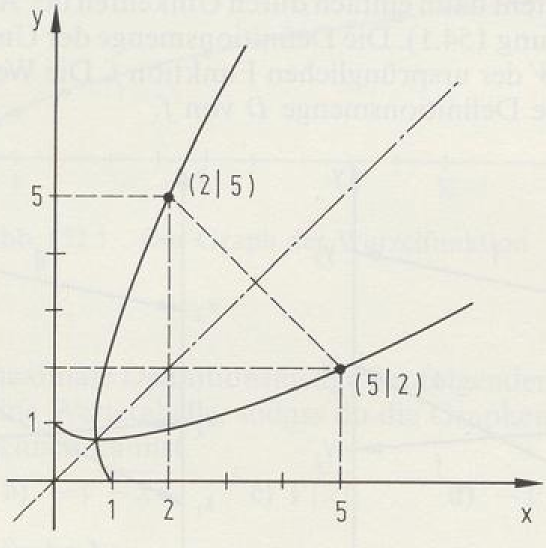

Abb. 154.2 Spiegeln an der Winkelhalbierenden $y = x$ durch Vertauschen der Koordinaten

Gleichung $y = g(x)$. Der zugehörige Graph entsteht aus dem Graphen von $x = g(y)$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ (Abb. 154.2). Wie man die unabhängige Variable bezeichnet, ist eine reine Äußerlichkeit; sie hat nichts mit der durch die Funktion gegebenen Zuordnung zu tun. Sie wirkt sich nur auf die Zeichnung des Graphen aus: Beim Spiegeln an der Winkelhalbierenden $y = x$ wird die x-Koordinate zur y-Koordinate und umgekehrt die y-Koordinate zur x-Koordinate, also werden die x- und y-Koordinaten einfach vertauscht.

Aufgaben

1. Welche der durch die folgenden Tabellen definierten Funktionen $x \mapsto y$ sind umkehrbar? Stelle gegebenenfalls die Umkehrfunktion $y \mapsto x$ durch ihren Graphen dar.

a)

x	-2	0	3
y	1	2	-1

b)

x	-2	0	3
y	1	2	1

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3

d)

x	1	$2{,}7$	$-0{,}5$	4
y	$0{,}25$	$1{,}25$	$-0{,}25$	$-1{,}25$

2. Durch die Gleichungen

a) $5x + 2y - 10 = 0$ **b)** $x - y - 1 = 0$

c) $x + y - 3 = 0$ **d)** $y - 5 = 0$

wird jeweils auf der Menge der reellen Zahlen eine Funktion $f\colon x \mapsto y$ erklärt. Welche dieser Funktionen sind umkehrbar? Stelle gegebenenfalls die Umkehrfunktion g sowohl in der Form $g\colon y \mapsto x$ als auch in der Form $g\colon x \mapsto y$ durch eine Gleichung dar und zeichne die Graphen.

3. Welche der in Abbildung 155.1 angegebenen Graphen definieren umkehrbare Funktionen?

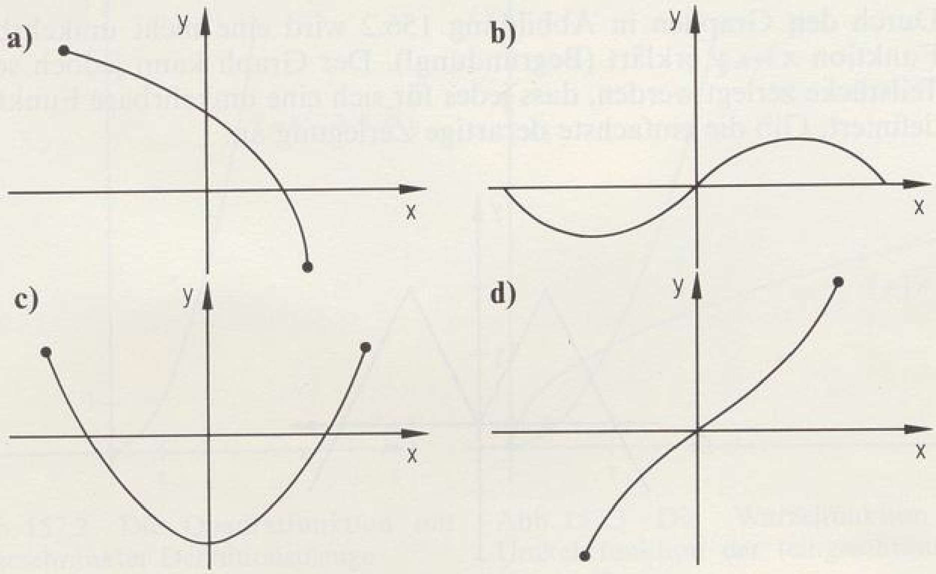

Abb. 155.1 Zu Aufgabe 3

4. Die Graphen der Abbildung 156.1 stellen umkehrbare Funktionen $f\colon x \mapsto y$ dar. Begründe dies! Übertrage sie vergrößert in dein Heft und zeichne jeweils den Graphen der Umkehrfunktion g in der Form $g\colon x \mapsto y$.

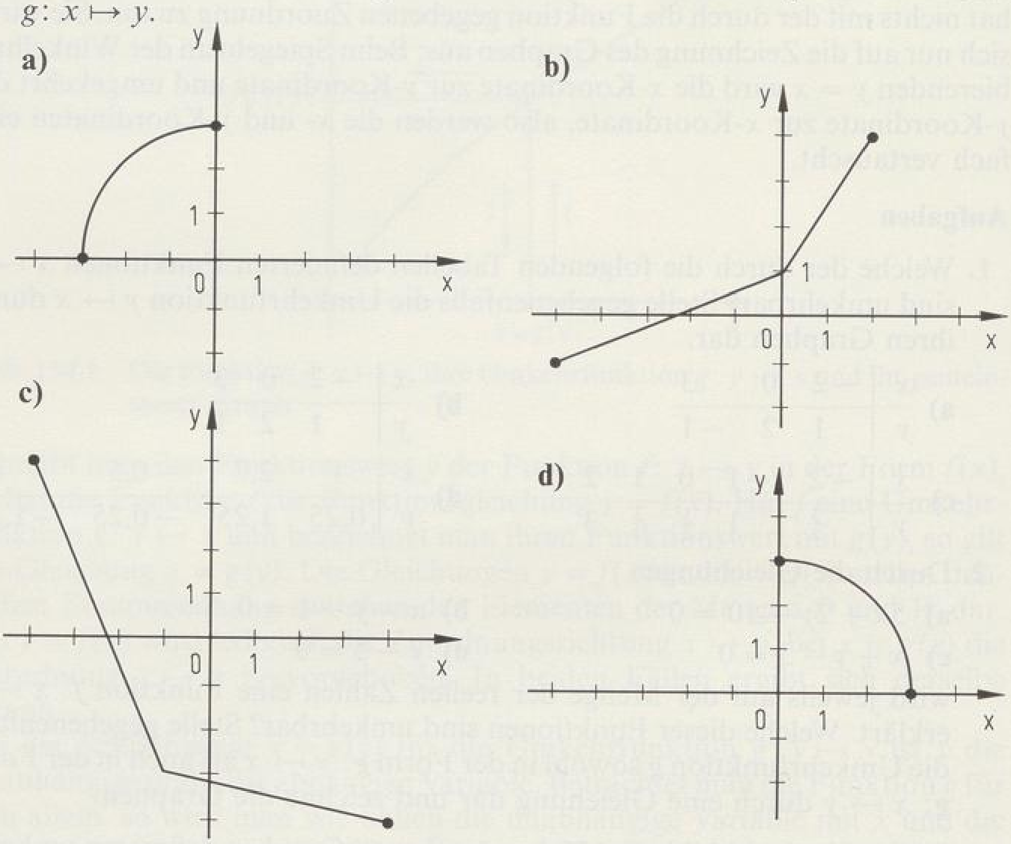

Abb. 156.1 Zu Aufgabe 4

5. Durch den Graphen in Abbildung 156.2 wird eine nicht umkehrbare Funktion $x \mapsto y$ erklärt (Begründung!). Der Graph kann jedoch so in Teilstücke zerlegt werden, dass jedes für sich eine umkehrbare Funktion definiert. Gib die einfachste derartige Zerlegung an.

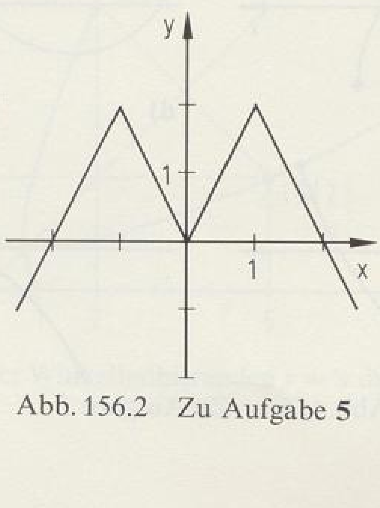

Abb. 156.2 Zu Aufgabe 5

6. Kann man die Graphen **a** und **b** der Abbildung 157.1 in Teilstücke zerlegen, welche umkehrbare Funktionen definieren (vgl. Aufgabe **5**)? Wie könnte die Zerlegung gegebenenfalls vorgenommen werden?

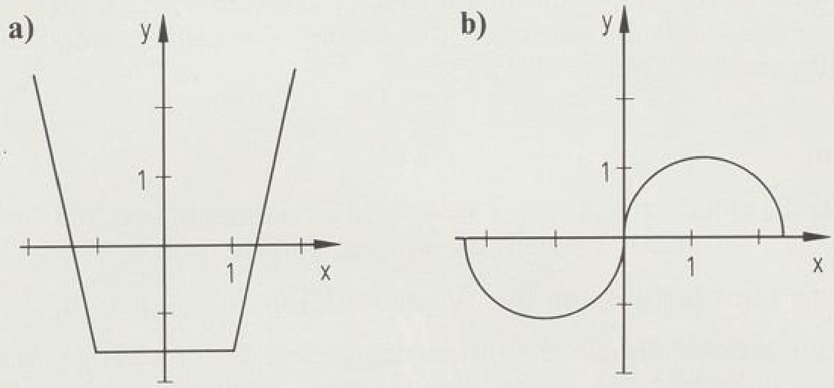

Abb. 157.1 Zu Aufgabe **6**

4.3.3 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Hat die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ eine Umkehrfunktion? Der Graph der Quadratfunktion ist die Normalparabel. Sie wird von allen Parallelen zur x-Achse, die oberhalb der x-Achse laufen, zweimal geschnitten. Also hat die Quadratfunktion keine Umkehrfunktion. Schränkt man jedoch die Definitionsmenge so ein, dass der Graph nur aus dem steigenden oder nur aus dem fallenden Teil der Parabel besteht, dann kann man die Funktion umkehren. Jetzt trifft jede Parallele zur x-Achse den Graphen höchstens einmal. So hat z. B. die Funktion $x \mapsto x^2$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ eine Umkehrfunktion (Abbildung 157.2). Aus $y = x^2$ mit $x \geqq 0$ folgt $x = \sqrt{y}$ mit $y \geqq 0$. Die Funktion

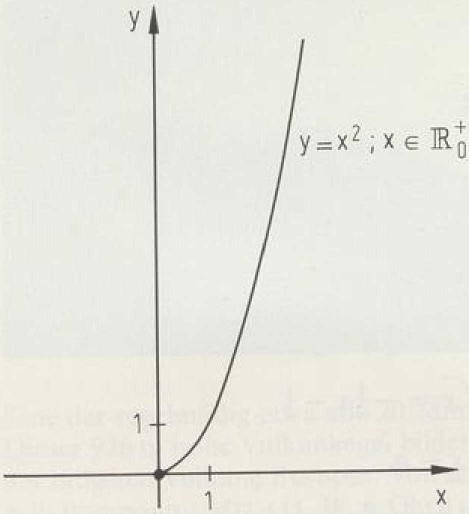

Abb. 157.2 Die Quadratfunktion mit eingeschränkter Definitionsmenge $D = \mathbb{R}_0^+$

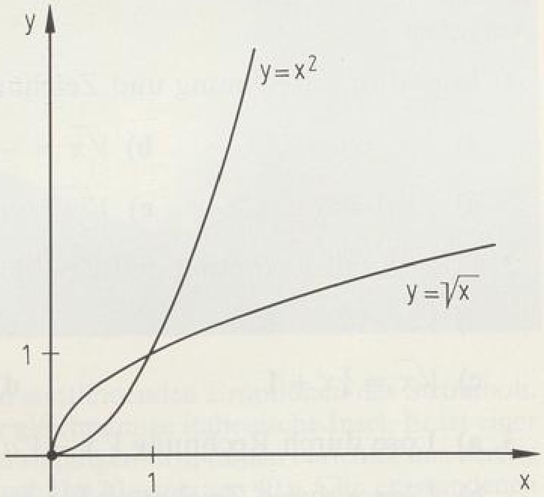

Abb. 157.3 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der (eingeschränkten) Quadratfunktion

$g: y \mapsto \sqrt{y}$; $y \in \mathbb{R}_0^+$ ist also die Umkehrfunktion zu $f: x \mapsto x^2$; $x \in \mathbb{R}_0^+$. g ist aber die Wurzelfunktion, die wir in **4.3.1** kennen gelernt haben. Ihr Graph ist demnach die halbe Normalparabel und kann auch mit der Schablone gezeichnet werden. Mit der unabhängigen Variablen x erhält man g: $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ und als Graphen die an der Winkelhalbierenden gespiegelte Halbparabel (Abbildung 157.3).

Aufgaben

1. Spalte die Quadratfunktion f: $x \mapsto x^2$ in zwei umkehrbare Teilfunktionen f_1 und f_2 auf und gib jeweils die Umkehrfunktion an.
2. Gib die Umkehrfunktion der Wurzelfunktion f: $x \mapsto \sqrt{x}$ an.
3. Bestimme die maximale Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge der Funktion f und zeichne den Graphen. Ermittle gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

   a) $f(x) = \sqrt{|x|}$ **b)** $f(x) = \sqrt{-x}$ **c)** $f(x) = -\sqrt{|x|}$ **d)** $f(x) = -\sqrt{-x}$

**4.3.4 Graph der Wurzelfunktion und Gerade

Wie bei Normalparabel und Gerade kann man auch bei der Wurzelfunktion die Lage des Graphen zu einer Geraden untersuchen. Die Schnittbedingung liefert eine Wurzelgleichung der Bauart $\sqrt{x} = mx + t$. Sie kann eine Doppellösung (Tangente), eine oder zwei einfache Lösungen (Sekante) oder keine Lösung (Passante) haben.

Aufgaben

1. Löse durch Rechnung und Zeichnung:

   a) $\sqrt{x} = x$ **b)** $\sqrt{x} = -x$ **c)** $\sqrt{x} = |x|$

   d) $\sqrt{|x|} = x$ **e)** $\sqrt{|x|} = -x$ **f)** $\sqrt{|x|} = |x|$

2. Löse durch Rechnung und Zeichnung:

   a) $\sqrt{x} = 2x - 6$ **b)** $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

   c) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}x + 1$ **d)** $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

3. **a)** Löse durch Rechnung $\sqrt{x} - \sqrt{a} = x - a$.

   b) Löse **a** durch Zeichnung für $a = 0$; $\frac{1}{4}$; 1; 4.

4. Bestimme t so, dass $y = \frac{1}{3}x + t$ Tangente an den Graphen der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist.