Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

1.2 Wiederholung der Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten

7. a) Jemand zahlt 100 Bio. Mark in 1-Mark-Münzen aus. Wie viele Jahre braucht er dazu, wenn er in jeder Sekunde eine Münze auszahlt und die Kasse 10 Stunden pro Tag (1a = 365 d) geöffnet ist?

b) Wie lange dauert das Verfahren aus **a)**, wenn man den 100-Quadrilliarden-Schein in einzelne Pengö wechselt?

8. a) Wie hoch wird ein Turm (in km), wenn man 100 Bio. Geldscheine, von denen jeder die Dicke 0,1 mm hat, aufeinanderlegt?
Wie viele Astronomische Einheiten (AE) ergibt das? Wie lang braucht das Licht für diese Strecke?

b) Löse **a)** mit 100 Quadrilliarden Geldscheinen an Stelle von 100 Bio. Geldscheinen.

9. In der Süddeutschen Zeitung vom 31. Januar 1989 liest man: »2,2 Millionen Touristen besuchten 1988 Australien, 43 Prozent mehr als im Jahr zuvor. Sie gaben, so rechnet das australische Fremdenverkehrsamt, drei Billionen australische Dollar aus.« Wie viele Dollar gab demnach ein Tourist im Mittel aus? Welchen Übersetzungsfehler hat der Autor wohl begangen? Wie viele Dollar gab ein Tourist im Mittel vermutlich wirklich aus?

1.2 Wiederholung der Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten

Die Definition der Potenzen und das Rechnen mit ihnen kennst du schon. Zur Erinnerung wiederholen wir:

> **Definition 13.1:** Für das Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren a schreibt man kurz a^n, gesprochen »a hoch n«, und nennt es ***n*-te Potenz** von a; kurz $\boldsymbol{a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$, $n \in \{2, 3, 4 \ldots\}$.
>
> Man sagt: a wird mit n potenziert. a heißt **Grundzahl** oder **Basis**, n heißt **Hochzahl** oder **Exponent**.

Da n die Anzahl der Faktoren im Produkt angibt, muß n eine natürliche Zahl und außerdem größer als 1 sein. Kürzt man den Bruch $\frac{a^n}{a}$ mit a, dann erhält man $\frac{a^n}{a} = a^{n-1}$. Für $n = 2$ ergibt sich formal $\frac{a^2}{a} = a^1$, andererseits ist $\frac{a^2}{a} = \frac{a \cdot a}{a} = a$, also liegt nahe

> **Definition 13.2:** $\boldsymbol{a^1 := a}$

Wir erinnern an die Regel für das Berechnen von Zahlentermen:

Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich

Beispiele:

1) $4 + 3 \cdot 5^2 = 4 + 3 \cdot 25 = 4 + 75 = 79$
2) $(4 + 3) \cdot 5^2 = 7 \cdot 5^2 = 7 \cdot 25 = 175$
3) $4 + (3 \cdot 5)^2 = 4 + 15^2 = 4 + 225 = 229$
4) $(4 + 3 \cdot 5)^2 = (4 + 15)^2 = 19^2 = 361$
5) $((4 + 3) \cdot 5)^2 = (7 \cdot 5)^2 = 35^2 = 1225$

Beachte: Manche Taschenrechner halten sich nicht an diese Vereinbarung. Studiere also jeweils genau die Gebrauchsanweisung!

Rechengesetze

I. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}$$

Also gilt

Satz 14.1: Potenzen gleicher Basis werden miteinander multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält; kurz

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $x^8 \cdot x^{19} = x^{8+19} = x^{27}$
2) $z \cdot z^2 = z^1 \cdot z^2 = z^{1+2} = z^3$
3) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{2+3} \cdot a^4 = a^{(2+3)+4} = a^{2+3+4} = a^9$

II. Potenzieren einer Potenz

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ Summanden } m}} = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}$$

Somit gilt

Satz 14.2: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert und die Basis beibehält; kurz

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$

2) $((z^3)^5)^7 = (z^{3 \cdot 5})^7 = z^{(3 \cdot 5) \cdot 7} = z^{3 \cdot 5 \cdot 7} = z^{105}$

Beachte: $(x^2)^3 \neq x^{2^3}$. Auf der linken Seite wird nämlich die Basis x^2 mit 3 potenziert, und das ergibt x^6. Auf der rechten Seite hingegen wird die Basis x mit dem Exponenten 2^3 potenziert; da x^{2^3} die Kurzschreibweise für $x^{(2^3)}$ ist, erhält man x^8.

III. Potenzieren eines Produkts

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } (a \cdot b)} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } b} = a^n \cdot b^n$$

Satz 15.1: Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert und die entstandenen Potenzen miteinander multipliziert; kurz

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Offensichtlich gilt dieser Satz auch für Produkte aus mehr als zwei Faktoren, z. B.: $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$.

Beispiele:

1) $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4 = 81x^4$

2) $(0{,}3 \cdot x^2)^4 = 0{,}3^4 \cdot (x^2)^4 = 0{,}0081x^8$

IV. Potenzieren eines Quotienten

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Faktoren } \frac{a}{b}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren } b}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Satz 15.2: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert und die Zählerpotenz durch die Nennerpotenz dividiert; kurz

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}} \quad (b \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $\left(\frac{3}{2}xy^3\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 = \frac{3^4}{2^4}x^4y^{12} = \frac{81}{16}x^4y^{12}$

2) $\left(\frac{3ax^2}{4b^3y}\right)^3 = \frac{(3ax^2)^3}{(4b^3y)^3} = \frac{3^3a^3(x^2)^3}{4^3(b^3)^3y^3} = \frac{27a^3x^6}{64b^9y^3}$

V. Division von Potenzen mit gleicher Basis

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}}, \quad a \neq 0$$

Durch Kürzen läßt sich der rechts stehende Bruch vereinfachen:
Ist $m > n$, dann ergibt sich a^{m-n}.
Ist $m = n$, dann ergibt sich 1.
Ist $m < n$, dann ergibt sich $\frac{1}{a^{n-m}}$.

Wir halten die Ergebnisse fest in

> **Satz 16.1:** Für $a \neq 0$ gilt:
>
> Ist $\boldsymbol{m > n}$, dann gilt $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$.
>
> Ist $\boldsymbol{m = n}$, dann gilt $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = 1}$.
>
> Ist $\boldsymbol{m < n}$, dann gilt $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}}$.

Beispiele:

1) $\frac{x^{19}}{x^8} = x^{19-8} = x^{11}$

2) $\frac{y^{13}}{y^{13}} = 1$

3) $\frac{z^3}{z^7} = \frac{1}{z^{7-3}} = \frac{1}{z^4}$

VI. Addition und Subtraktion von Potenzen

Weil sich Terme nur addieren bzw. subtrahieren lassen, wenn sie gleichartig sind, brauchen wir für Potenzen (das sind ja speziell gebaute Terme!) keine besonderen Regeln.

$a^3 + a^4$ kann man nicht zusammenfassen, wohl aber faktorisieren zu $a^3(1+a)$.
$a^3 + b^3$ kann man nicht zusammenfassen.
$a^3 + a^3$ dagegen ergibt $2a^3$.

Beachte:

$$\begin{array}{ll} 3a = a + a + a & a^3 = a \cdot a \cdot a \\ 3a + a = 4a & 3a \cdot a = 3a^2 \\ 3a^2 + a = a(3a+1) & 3a^2 \cdot a = 3a^3 \\ 3a^2 + a^2 = 4a^2 & 3a^2 \cdot a^2 = 3a^4 \end{array}$$

Aufgaben

1. Berechne und vergleiche:
a) 2^3 und 3^2 **b)** 3^5 und 5^3
c) $(2+5)^2$ und $2^2 + 5^2$ **d)** $(17-12)^2$ und $17^2 - 12^2$
e) $(3 \cdot 5)^2$ und $3 \cdot 5^2$ **f)** $(12:4)^2$ und $12:4^2$

2. **a)** $(\frac{1}{4})^3$ **b)** $(-\frac{2}{3})^2$ **c)** $(1\frac{2}{5})^4$ **d)** $(-\frac{36}{27})^5$ **e)** $0{,}3^2$
f) $-0{,}3^3$ **g)** $0{,}3^4$ **h)** $0{,}03^2$ **i)** $-2{,}5^2$ **j)** $0{,}25^2$

3. **a)** $(-1)^2$ **b)** $(-1)^3$ **c)** $(-1)^4$ **d)** $(-1)^5$
e) $(-1)^8$ **f)** $(-1)^{17}$ **g)** $(-1)^{103}$ **h)** $(-1)^{1234}$
i) Welche Werte können Potenzen mit der Grundzahl -1 annehmen? Bei welchen Hochzahlen treten die verschiedenen Potenzwerte auf?

4. **a)** $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2})^2$ **b)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{2})^2$ **c)** $\frac{1}{4} - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$
d) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$ **e)** $((\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2})^2$ **f)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}$

5. **a)** $(-0{,}1)^2$ **b)** $(-10)^2$ **c)** $(-0{,}1)^3$ **d)** $(-10)^3$
e) $(-0{,}01)^2$ **f)** $(-0{,}01)^3$ **g)** $(-100)^2$ **h)** $(-100)^3$

6. **a)** $-(-x)^2$ **b)** $-(-x)^3$ **c)** $[-(-x)]^2$ **d)** $[-(-x)]^3$

7. Schreibe als Potenz mit größtmöglichem Exponenten aus $\mathbb{N}$:
a) 216 **b)** -216 **c)** 0,216 **d)** 0,25 **e)** $-0{,}125$
f) $-\frac{1}{8}$ **g)** $-0{,}008$ **h)** $\frac{343}{27}$ **i)** 1024 **j)** 59049

8. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^5$ **b)** $3 \cdot 10^7 \cdot 10^3$ **c)** $-1{,}5 \cdot 10^3 \cdot (-1{,}8 \cdot 10^9)$

d) $6{,}25 \cdot 10^8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^7$ **e)** $9{,}4 \cdot 10^3 \cdot 8{,}7 \cdot 10^5 \cdot 5{,}5 \cdot 10^2$

9. a) $x^2 \cdot x^7$ **b)** $x \cdot x^3 \cdot x^4$ **c)** $(a+b)^3 \cdot (a+b)^5$

d) $(-z)^5 \cdot (-z)$ **e)** $(-ab)^3 \cdot (-ab)^5$ **f)** $\frac{r}{s} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^6$

10. Berechne und vergleiche:

a) $(2^2)^3$ und 2^{2^3} **b)** $(2^3)^2$ und 2^{3^2}

c) $(3^2)^3$ und 3^{2^3} **d)** $(3^3)^2$ und 3^{3^2}

11. Berechne und vergleiche:

a) $(x^2)^3$ und x^{2^3} **b)** $((-x)^2)^3$ und $(-x)^{2^3}$

c) $((-x)^3)^2$ und $(-x)^{3^2}$ **d)** $(-x^3)^2$ und $-x^{3^2}$

12. a) $(x \cdot y \cdot z)^3$ **b)** $(x^2 \cdot y)^4$ **c)** $z^5 \cdot (y^6 \cdot z)^3$

13. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $(3 \cdot 10^2)^4$ **b)** $(1{,}5 \cdot 10^7)^3$ **c)** $(-0{,}6 \cdot 10^9)^5$ **d)** $(-5 \cdot 10^3)^4$

14. Berechne und vergleiche:

a) $(2x^2)^3$ und $(2x)^{2^3}$ **b)** $2(x^2)^3$ und $2x^{2^3}$

c) $(2(-x)^3)^2$ und $(2(-x))^{3^2}$ **d)** $2((-x)^3)^2$ und $2(-x)^{3^2}$

15. a) $\left(\frac{ab}{c}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{a^2 b}{c^3}\right)^5$

d) $\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2$ **e)** $\left(\frac{(ab)^4 \cdot c}{(ac)^3 \cdot b^4}\right)^2$ **f)** $\frac{[a^7 (bc^2)^4]^3}{[(a^3 b^4)^2 \cdot c^6]^4}$

16. a) $\frac{a^5}{a^7}$ **b)** $\frac{a^7}{a^5}$ **c)** $\frac{a \cdot a^6}{a^3 \cdot a^4}$ **d)** $\frac{2^{19}}{2^{22}}$

e) $\frac{3^{26}}{3^{22}}$ **f)** $\frac{2^{41} \cdot 5^{17}}{2^{35} \cdot 5^{20}}$ **g)** $\frac{7^3 \cdot 2^8}{14^5 \cdot 2^3}$ **h)** $\frac{15^5 \cdot 2^3}{3^4 \cdot 20^3}$

17. Berechne unter Beachtung der möglichen Fälle:

a) $\frac{a^2}{a^n}$ **b)** $\frac{a^m}{a^3}$ **c)** $\frac{u^{m+2}}{u^{n+2}}$ **d)** $\frac{v^{n+3}}{v^{m+1}}$

e) $3^{n+1} : 3^4$ **f)** $3^4 : 3^{n+1}$ **g)** $3^{2n+1} : 3^{2n-1}$

18. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $\frac{3 \cdot 10^7}{1{,}5 \cdot 10^3}$ **b)** $\frac{10^{19}}{2{,}5 \cdot 10^5}$ **c)** $\frac{1{,}8 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{10}}$ **d)** $\frac{10}{8 \cdot 10^4}$

19. Schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung:

a) $3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6$ **b)** $3{,}1 \cdot 10^4 - 2{,}5 \cdot 10^3$

c) $(4 \cdot 10^3 - 10^4) \cdot 3 \cdot 10^3$ **d)** $10 - 10^2 + 10^3 - 10^4$

20. Vereinfache:

a) $0{,}125^{2+n} \cdot 4^4$ **b)** $\left(2\frac{3}{5}\right)^{2n+1} \cdot \left(-\frac{5}{26}\right)^{2n+1}$

c) $\left(1\frac{8}{9} \cdot \frac{a}{b^2}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{17} \cdot \frac{a^2}{b}\right)^3$ **•d)** $\left(2\frac{4}{5} \cdot \frac{x}{y^2 z}\right)^{k+1} : \left(-0{,}7\frac{x}{yz^2}\right)^k$

21. a) $(1 + a^2 + a^4)(a^2 - 1)$ **b)** $(a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$

c) $(a^4 - a^2 b + b^2)(a^2 + b)$

d) $(a^3 + 2a^2 b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2 b + 2ab^2 - b^3)$

22. a) $(x^8 + x^6 - x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

b) $(a^7 b^2 + 3a^4 b^6 - 2ab^{10})(a^8 b + 4a^5 b^5 - 3a^2 b^9)$

c) $(x^3 y^7 - 5x^5 y^4 - 6x^7 y)(xy^9 + 4x^3 y^6 - 6x^5 y^3)$

23. a) $(a^2 + 5a)^3$ **b)** $(x^4 - 1)^3$ **c)** $(x^3 - 1)^4$ **d)** $(1 + a^2 + a^4)^3$

24. a) Wie viele Astronomische Einheiten ergeben 1 Lichtjahr?

b) Wie viele Lichtjahre ergeben 1 pc? (Vgl. Aufgabe 12/**3. c)**.)

c) Wie viele Sekunden braucht das Licht von der Sonne bis

1) zur Erde,

2) zum meist sonnenfernsten Planeten Pluto, der in einer durchschnittlichen Entfernung von $5{,}91 \cdot 10^{12}$ m die Sonne umkreist,

3) zum sonnennächsten Planeten Merkur ($5{,}791 \cdot 10^{10}$ m)?

25. Ein Blatt Papier der Dicke 0,1 mm wird 100mal gefaltet. Wie dick ist das entstandene Gebilde?

26. Aufgabe 79 aus dem *Papyrus Rhind* (entstanden um 1800 v. Chr., geschrieben um 1550 v. Chr.) taucht bis ins hohe Mittelalter in vielen Abwandlungen auf und findet schließlich ihren Niederschlag in einem englischen Kinderreim (Aufgabe 139/**14**):
[In einem Dorf gibt es] 7 Häuser. [In jedem Haus leben] 7 Katzen. [Jede Katze frißt] 7 Mäuse. [Jede Maus frißt] 7 Ähren Dinkel.* [Von jeder Ähre könnte man im nächsten Jahr] 7 Scheffel [ernten.]

a) Wieviel gibt es von jeder Sorte?

b) Wie groß ist die im *Papyrus Rhind* angegebene Summe aller Sorten?

* Dinkel, eine sehr winterharte und anspruchslose alte Kulturform des Weizens, auch Spelt oder Spelz genannt. Unreif geernteter und gedarrter Dinkel heißt Grünkern. – 1 Scheffel = 4,805 l.