Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

4.3.3 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

6. Kann man die Graphen **a** und **b** der Abbildung 157.1 in Teilstücke zerlegen, welche umkehrbare Funktionen definieren (vgl. Aufgabe **5**)? Wie könnte die Zerlegung gegebenenfalls vorgenommen werden?

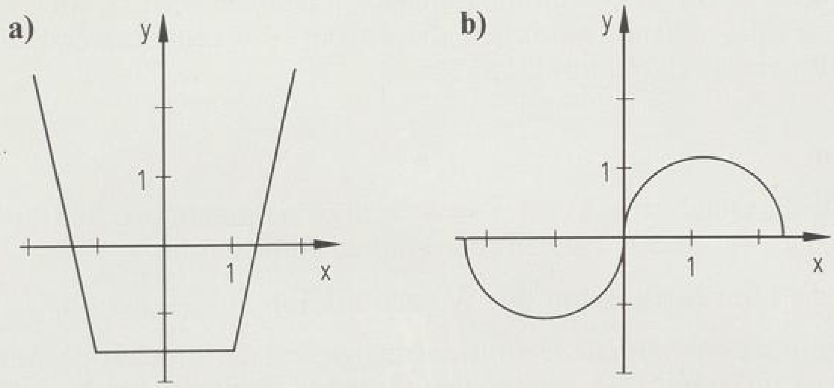

Abb. 157.1 Zu Aufgabe **6**

4.3.3 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Hat die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ eine Umkehrfunktion? Der Graph der Quadratfunktion ist die Normalparabel. Sie wird von allen Parallelen zur x-Achse, die oberhalb der x-Achse laufen, zweimal geschnitten. Also hat die Quadratfunktion keine Umkehrfunktion. Schränkt man jedoch die Definitionsmenge so ein, dass der Graph nur aus dem steigenden oder nur aus dem fallenden Teil der Parabel besteht, dann kann man die Funktion umkehren. Jetzt trifft jede Parallele zur x-Achse den Graphen höchstens einmal. So hat z. B. die Funktion $x \mapsto x^2$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ eine Umkehrfunktion (Abbildung 157.2). Aus $y = x^2$ mit $x \geqq 0$ folgt $x = \sqrt{y}$ mit $y \geqq 0$. Die Funktion

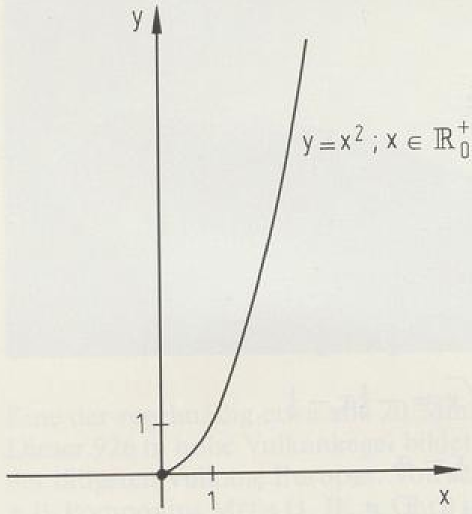

Abb. 157.2 Die Quadratfunktion mit eingeschränkter Definitionsmenge $D = \mathbb{R}_0^+$

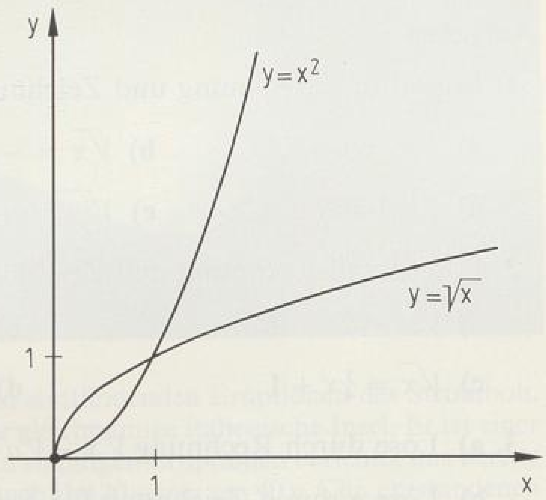

Abb. 157.3 Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der (eingeschränkten) Quadratfunktion

$g: y \mapsto \sqrt{y}$; $y \in \mathbb{R}_0^+$ ist also die Umkehrfunktion zu $f: x \mapsto x^2$; $x \in \mathbb{R}_0^+$. g ist aber die Wurzelfunktion, die wir in **4.3.1** kennen gelernt haben. Ihr Graph ist demnach die halbe Normalparabel und kann auch mit der Schablone gezeichnet werden. Mit der unabhängigen Variablen x erhält man g: $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ und als Graphen die an der Winkelhalbierenden gespiegelte Halbparabel (Abbildung 157.3).

Aufgaben

1. Spalte die Quadratfunktion f: $x \mapsto x^2$ in zwei umkehrbare Teilfunktionen f_1 und f_2 auf und gib jeweils die Umkehrfunktion an.
2. Gib die Umkehrfunktion der Wurzelfunktion f: $x \mapsto \sqrt{x}$ an.
3. Bestimme die maximale Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge der Funktion f und zeichne den Graphen. Ermittle gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

   a) $f(x) = \sqrt{|x|}$ **b)** $f(x) = \sqrt{-x}$ **c)** $f(x) = -\sqrt{|x|}$ **d)** $f(x) = -\sqrt{-x}$

**4.3.4 Graph der Wurzelfunktion und Gerade

Wie bei Normalparabel und Gerade kann man auch bei der Wurzelfunktion die Lage des Graphen zu einer Geraden untersuchen. Die Schnittbedingung liefert eine Wurzelgleichung der Bauart $\sqrt{x} = mx + t$. Sie kann eine Doppellösung (Tangente), eine oder zwei einfache Lösungen (Sekante) oder keine Lösung (Passante) haben.

Aufgaben

1. Löse durch Rechnung und Zeichnung:

   a) $\sqrt{x} = x$ **b)** $\sqrt{x} = -x$ **c)** $\sqrt{x} = |x|$

   d) $\sqrt{|x|} = x$ **e)** $\sqrt{|x|} = -x$ **f)** $\sqrt{|x|} = |x|$

2. Löse durch Rechnung und Zeichnung:

   a) $\sqrt{x} = 2x - 6$ **b)** $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

   c) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}x + 1$ **d)** $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

3. **a)** Löse durch Rechnung $\sqrt{x} - \sqrt{a} = x - a$.

   b) Löse **a** durch Zeichnung für $a = 0$; $\frac{1}{4}$; 1; 4.

4. Bestimme t so, dass $y = \frac{1}{3}x + t$ Tangente an den Graphen der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist.