Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

5.1.3. Zusammengesetzte Verschiebung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

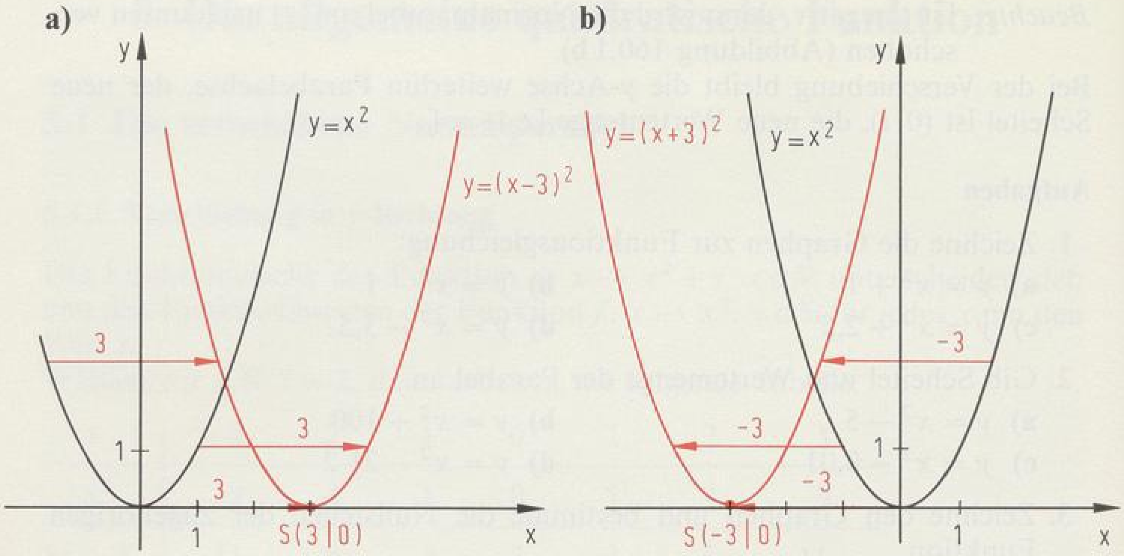

Abb. 162.1 Verschiebung der Normalparabel in x-Richtung

Aufgaben

1. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:

a) $y=(x-1)^2$ **b)** $y=(x+1)^2$

c) $y=(x-2{,}5)^2$ **d)** $y=(x+\frac{7}{2})^2$

e) $y=(2-x)^2$ **f)** $y=(-x-3)^2$.

2. Gib den Scheitel und die Gleichung der Parabelachse an.

a) $y=(x-1{,}5)^2$ **b)** $y=(x+100)^2$

c) $y=(x-2\sqrt{3})^2$ **d)** $y=(-3+x)^2$

e) $y=(3-x)^2$ **f)** $y=(-3-x)^2$

3. Gib den Scheitel und die Gleichung der Achse an.

a) $y=x^2-2x+1$ **b)** $y=x^2+6x+9$

c) $y=x^2+5x+6{,}25$ **d)** $y=x^2-\frac{1}{50}x+\frac{1}{10000}$

•4. a) Erstelle Wertetabellen für die Funktionen $f\colon x\mapsto\sqrt{x}$ und $g\colon x\mapsto\sqrt{x-3}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Werten? Wie erhält man also den Graphen von g aus dem von f?

b) Zeichne den Graphen mit der Gleichung $y=\sqrt{x-s}$ für $s=1$ bzw. $s=2$.

5.1.3 Zusammengesetzte Verschiebung

Eine beliebige Verschiebung lässt sich zusammensetzen aus einer Verschiebung in x-Richtung und einer Verschiebung in y-Richtung, wie Abbildung 163.1 zeigt.

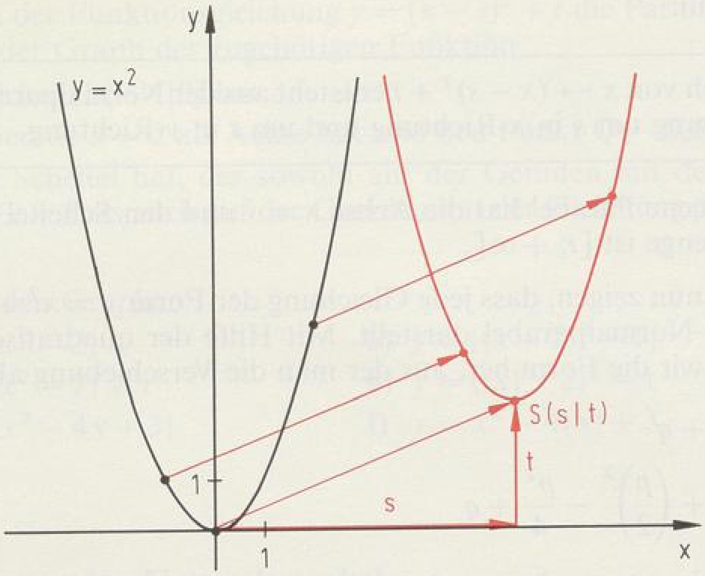

Abb. 163.1 Verschiebung der Normalparabel um s in x-Richtung und um t in y-Richtung

Den Funktionsterm der verschobenen Parabel erhalten wir durch Kombination der beiden uns schon bekannten Verschiebungen:

Normalparabel	$x \mapsto x^2$
Verschiebung um s in x-Richtung	$x \mapsto (x-s)^2$
Verschiebung um t in y-Richtung	$x \mapsto (x-s)^2 + t$

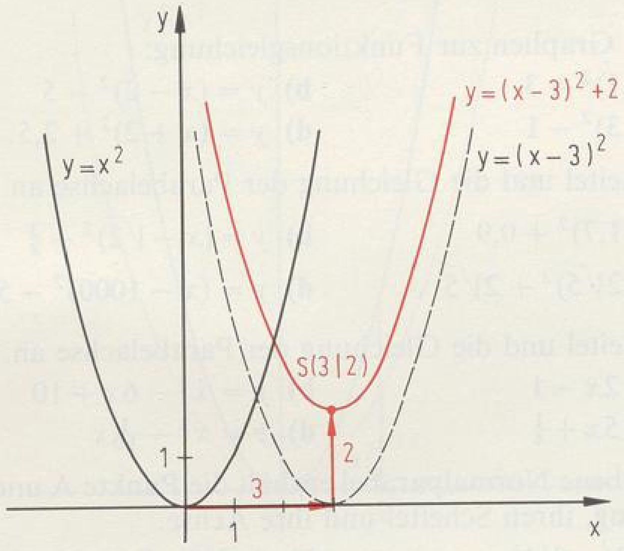

Abb. 163.2 Schrittweise Verschiebung der Normalparabel um $s = 3$ nach rechts und um $t = 2$ nach oben

Allgemein gilt:

> Der Graph von $x \mapsto (x-s)^2 + t$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um s in x-Richtung und um t in y-Richtung.

Die verschobene Parabel hat die Achse $x = s$ und den Scheitel $S(s|t)$. Die Wertemenge ist $[t; +\infty[$.

Wir können nun zeigen, dass jede Gleichung der Form $y = x^2 + px + q$ eine verschobene Normalparabel darstellt. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung stellen wir die Form her, aus der man die Verschiebung ablesen kann:

$$y = x^2 + px + q$$

$$y = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$$

Das ist eine Normalparabel, die um $-\frac{p}{2}$ in x-Richtung und um $\frac{4q-p^2}{4}$ in y-Richtung verschoben ist. Ihr Scheitel ist $\left(-\frac{p}{2}\middle|\frac{4q-p^2}{4}\right)$.

Aufgaben

1. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:

a) $y = (x-1)^2 + 3$ **b)** $y = (x-2)^2 - 5$

c) $y = (x+3)^2 - 1$ **d)** $y = (x+2)^2 + 2{,}5$.

2. Gib den Scheitel und die Gleichung der Parabelachse an.

a) $y = (x-1{,}7)^2 + 0{,}9$ **b)** $y = (x-\sqrt{2})^2 + \frac{3}{2}$

c) $y = (x+2\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}$ **d)** $y = (x-1000)^2 - 5003$

3. Gib den Scheitel und die Gleichung der Parabelachse an.

a) $y = x^2 - 2x - 1$ **b)** $y = x^2 - 6x + 10$

c) $y = x^2 + 5x + \frac{1}{4}$ **d)** $y = x^2 - \frac{1}{10}x$

4. Eine verschobene Normalparabel enthält die Punkte A und B. Bestimme ihre Gleichung, ihren Scheitel und ihre Achse.

a) $A(2|1)$; $B(-3|1)$ **b)** $A(0|0)$; $B(-2|-8)$

c) $A(0|3)$; $B(1|0)$ **d)** $A(2|3)$; $B(2|4)$ (!)

5. Wähle in der Funktionsgleichung $y = (x - s)^2 + t$ die Parameter s und t so, dass der Graph der zugehörigen Funktion

a) den Scheitel $(-4|9)$ hat;

b) die Gerade $x = 2$ als Achse hat und den Punkt $Q(-0{,}5|4)$ enthält;

c) einen Scheitel hat, der sowohl auf der Geraden mit der Gleichung $y = 3x + 1$ als auch auf der Geraden mit der Gleichung $y = -3x - 7$ liegt.

6. Zeichne den Graphen:

a) $y = |x^2 - 2|$ **b)** $y = |(x-2)^2 - 1|$

c) $y = |x^2 - 2| + 1$ **d)** $y = (|x| - 2)^2 - 1$

e) $y = |x^2 - 4x + 3|$ **f)** $y = x^2 - 4|x| + 3$

5.2 Streckung der Normalparabel

Im Abschnitt **5.1** haben wir quadratische Funktionen betrachtet, bei denen der Term x^2 den Koeffizienten 1 hatte. Bei der allgemeinen quadratischen Funktion haben wir aber den quadratischen Term ax^2 mit $a \neq 0$. Der zugehörige Graph heißt (allgemeine) **Parabel**. Die Normalparabel ist der Sonderfall für $a = 1$. Um zu untersuchen wie sich der Faktor a auf den Graphen auswirkt, vergleichen wir Funktionen vom Typ $g_a : x \mapsto ax^2$ mit $f : x \mapsto x^2$. Für die Werte $a = 2$, $a = \frac{1}{2}$ und $a = -2$ erhalten wir folgende Wertetabellen:

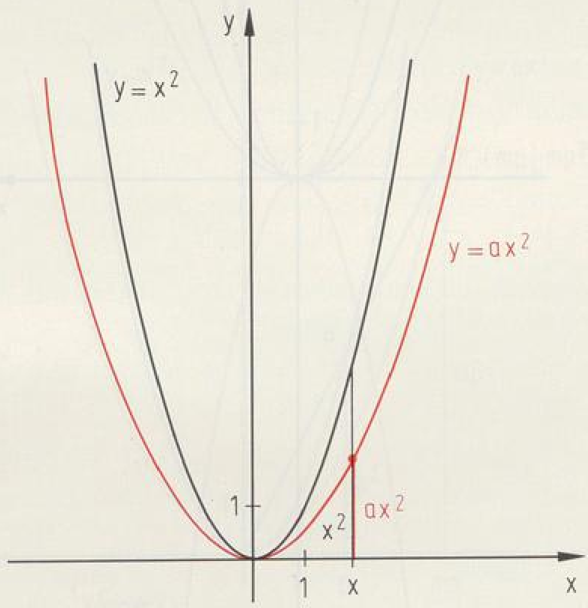

Abb. 165.1 Formänderung der Parabeln durch den Faktor a bei x^2, hier für $0 < a < 1$