Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

2.1 Definition, kleine Zahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

2 Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten

2.1 Definition, kleine Zahlen

Unter den Gesetzen für das Rechnen mit Potenzen nimmt Satz 16.1 eine Sonderstellung ein; er erfordert eine Fallunterscheidung. Das ist fürs praktische Rechnen sehr lästig. Es wäre schön, wenn sich durch eine geeignete Erweiterung des Potenzbegriffs die drei Fälle zu einer einzigen Formel ohne Fallunterscheidung zusammenfassen ließen. Verwendet man die Formel $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, die für $m > n$ gilt, versuchsweise formal für $m = n$, so ergibt sich $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$. Wir wissen aber, daß $\frac{a^m}{a^m} = 1$ ist. Naheliegend ist also

> **Definition 24.1:** $\boldsymbol{a^0 := 1}$ für $a \neq 0$

Beachte: 1) $a^0 = 1$ ist keine beweisbare Formel, sondern eine zweckmäßige Definition.
2) 0^0 wird ebenso wie $\frac{0}{0}$ nicht definiert.*

Beispiele: 1) $3^0 = 1$ 2) $(-7)^0 = 1$ 3) $(\frac{3}{7})^0 = 1$
4) $(\sqrt{2})^0 = 1$ 5) $(a^2 - b^2)^0 = 1$ für $|a| \neq |b|$

Verwendet man die Formel $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ auch für $m < n$, so ergibt sich formal eine Potenz mit negativem Exponenten, z. B. $\frac{a^2}{a^7} = a^{2-7} = a^{-5}$. Weil wir aber wissen, daß $\frac{a^2}{a^7} = \frac{1}{a^5}$ ist, sollte $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$ gelten. Das legt die Festsetzung nahe

> **Definition 24.2:** $\boldsymbol{a^{-n} := \frac{1}{a^n}}$ für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$

Damit nimmt Satz 16.1 die einfache Form an:

> **Satz 24.1:** $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ für $a \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$

* Die Folge $\ldots, 0^3 = 0,\ 0^2 = 0,\ 0^1 = 0$ legt $0^0 = 0$ nahe, die Folge $\ldots, 3^0 = 1,\ 2^0 = 1,\ 1^0 = 1$ legt andererseits $0^0 = 1$ nahe. Man entscheidet sich deshalb dafür, 0^0 als unbestimmten Ausdruck zu betrachten, der also keinen definierten Wert hat.

Die Einschränkung $n \in \mathbb{N}_0$ in Definition 24.2 würde wieder zu Fallunterscheidungen führen. Weil aber für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, daß $\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n = a^{-(-n)}$ ist, können wir gleich schreiben

Satz 25.1: $\boldsymbol{a^{-z} = \frac{1}{a^z}}$ für $a \neq 0$ und $z \in \mathbb{Z}$

Beispiele:

1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ **2)** $6^{-1} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{(\frac{3}{7})^2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$ **4)** $0{,}1^{-4} = \frac{1}{0{,}1^4} = 10^4$

5) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$ **6)** $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

7) $(\sqrt{3})^{-6} = \frac{1}{(\sqrt{3})^6} = \frac{1}{27}$ **8)** $\frac{1}{2^{-5}} = \frac{1}{\frac{1}{2^5}} = 2^5 = 32$

9) $(a+b)^{-3} = \frac{1}{(a+b)^3}$ für $a \neq -b$

10) $a^{-3} + b^{-3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$ für $ab \neq 0$

Mit den beiden letzten Festlegungen ist die Definition einer Potenz von natürlichen Exponenten auf ganzzahlige Exponenten erweitert worden. Damit ist auch z. B. $2^{-(-3)}$ sinnvoll und einerseits gleich 2^3, andererseits gleich $\frac{1}{2^{-3}}$.

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse zusammen und merken uns:

$$\text{Für } a \neq 0 \text{ und } z \in \mathbb{Z} \text{ gilt: } \boldsymbol{a^z} = \begin{cases} \underbrace{\boldsymbol{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{z \text{ Faktoren } a} & \text{für } z \geqq 2 \\ \boldsymbol{a} & \text{für } z = 1 \\ \boldsymbol{1} & \text{für } z = 0 \\ \boldsymbol{\frac{1}{a}} & \text{für } z = -1 \\ \boldsymbol{\frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{|z| \text{ Faktoren } a}}} & \text{für } z \leqq -2 \end{cases}$$

Ähnlich, wie man mit den positiven Exponenten große Zahlen kurz und bequem darstellen kann, kann man jetzt auch die negativen Exponenten verwenden, um Zahlen mit sehr kleinem Betrag kurz und übersichtlich zu schreiben. Weil wir normalerweise im Dezimalsystem arbeiten, verwenden wir natürlich besonders gern Zehnerpotenzen mit negativen Exponenten. Dabei gilt:

$$1 = 10^0$$

$$0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \quad \text{usw.}$$

Man erkennt: Multipliziert man eine Zahl mit 10^n ($n \in \mathbb{N}$), dann verschiebt sich das Komma um n Stellen nach rechts. Kompensiert man dies mit dem Faktor 10^{-n}, dann ändert sich der Zahlenwert nicht, weil $10^n \cdot 10^{-n} = \frac{10^n}{10^n} = 1$ gilt. Damit läßt sich die Gleitkommadarstellung auf negative Exponenten erweitern.

Eine Kommaverschiebung um n Stellen nach rechts wird durch den Faktor 10^{-n} ausgeglichen.

Beispiel: $0{,}0000125 = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ (Gleitkommadarstellung)
$= 12{,}5 \cdot 10^{-6}$
$= 125 \cdot 10^{-7}$

Für häufig verwendete Zehnerpotenzen mit negativen Exponenten gibt es bei Benennungen wieder besondere Vorsätze*:

10^{-1} = d = Dezi 10^{-2} = c = Centi 10^{-3} = m = Milli
10^{-6} = μ = Mikro 10^{-9} = n = Nano 10^{-12} = p = Pico
10^{-15} = f = Femto 10^{-18} = a = Atto 10^{-21} = z = Zepto
10^{-24} = y = Yocto

Aufgaben

1. a) 1^0 **b)** 1^{-1} **c)** 1^{-2} **d)** 1^{-43} **e)** $(-1)^0$
f) $(-1)^{-1}$ **g)** $(-1)^{-2}$ **h)** $(-1)^{-3}$

* dẹcima (lat.) = der zehnte Teil – centẹsimus (lat.) = der hundertste – millẹ̄simus (lat.) = der tausendste – μικρός (mikrós [griech.]) = klein – νᾶνος (nānos [griech.]), nanus (lat.) = der Zwerg – pico (span.) = die Spitze – femton (schwed.), femten (dän.) = fünfzehn – atten (dän.) = achtzehn. – Die Vorsätze *Zepto* und *Yocto* wurden 1991 von der 19. Generalkonferenz für Maß und Gewicht eingeführt. Wohl wegen $10^{-21} = (10^{-3})^7$ bzw. $10^{-24} = (10^{-3})^8$ bildete man sie unter Verfremdung aus den griechischen Zahlwörtern ἑπτά (heptá) für 7 bzw. ὀκτώ (októ) für 8.

2. a) 2^{-1} b) 2^{-3} c) 3^0 d) 5^{-2} e) $(\frac{2}{3})^{-1}$
f) $0{,}1^{-2}$ g) 10^{-1} h) 10^{-2} i) $(-0{,}4)^3$ k) $(-0{,}4)^{-3}$
l) $0{,}4^{-3}$ m) $0{,}4^3$ n) $(-0{,}5)^4$ o) $(-0{,}5)^{-4}$ p) $0{,}5^{-4}$
q) $(\frac{3}{4})^{-2}$ r) $(-\frac{23}{67})^0$ s) $(\sqrt{2})^0$ t) $(\sqrt{2})^{-2}$ u) $(\sqrt{\frac{1}{3}})^{-4}$
v) $\sqrt{7^0}$ w) $\sqrt{2^{-4}}$ x) $\sqrt{(-3)^{-8}}$ y) $\sqrt{(-1)^0}$ z) $\sqrt{(\frac{1}{5})^{-1}-1^0}$

3. Berechne:
a) $2^0+2^{-1}+2^{-2}$ b) $(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^{-1}+(\frac{1}{2})^{-2}$
c) $(3+3^{-1})^{-2}$ d) $(0{,}1)^{-2}-(\sqrt{10})^4$
•e) $[(\sqrt{5})^0+(\sqrt{5})^{-1}]^{-2}$ f) $[(\sqrt{11})^{-2}-(\sqrt{13})^{-13}]^0$
g) $(-5)^{-4}-5^{-4}$ h) $(-4)^{-3}-4^{-3}$
i) $(-3)^{-3}+(\frac{1}{3})^3$ k) $(\frac{2}{3})^{-2}+(-\frac{3}{2})^2$

4. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen:
a) $x^{-2}=4x^0$ b) $x-x^{-1}=0$ c) $9x=16x^{-1}$
d) $x^0+5x^{-2}=0$ e) $\frac{x}{x^2}=x^{-1}$ f) $x^{-2}+x^{-3}=0$

5. a) $x-5+6x^{-1}=0$ b) $x^0-2x^{-1}-3x^{-2}=0$ c) $x+x^{-1}=2$
d) $x-x^{-1}=2$ e) $x^2+36x^{-2}=13$ f) $x-4x^{-1}=5x^{-3}$

•**6.** a) $\frac{1}{x^0}=\left(\frac{1}{x}\right)^0$ b) $\sqrt{x^0}=(\sqrt{x})^0$ c) $(\sqrt{x+1})^0=(\sqrt{1-x})^0$
d) $\left(\frac{1}{x-1}\right)^0=\frac{1}{(x+1)^0}$ e) $\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^0=\frac{x}{x}$ f) $\frac{1}{(x^2-4)^0}=1$

7. Schreibe folgende Zahlen als Zehnerpotenzen:
a) 0,01 b) 0,0001 c) $\frac{1}{100\,000}$ d) 1
e) 1 Milliontel f) 1 Billiontel g) 1 Zehnmilliontel h) 10 Billiontel

8. Schreibe in Gleitkommadarstellung:
a) 0,07 b) 0,000123 c) 0,00001001
d) 0,000 000 4207 e) 0,000 100 2 f) 0,000 000 007 39
g) 3 Tausendstel h) 4 Hundertmilliontel i) 7 Zehnbilliontel

9. Schreibe als Dezimalzahl:
a) $3\cdot10^{-2}$ b) $2\cdot10^{-3}$ c) 10^{-4}
d) $8{,}05\cdot10^{-3}$ e) $1{,}763\cdot10^{-7}$ f) $9{,}72\cdot10^{-2}$
g) $2{,}2279\cdot10^{-6}$ h) $6{,}7808\cdot10^{-5}$ i) $4{,}02\cdot10^{-4}$

10. Schreibe als Dezimalzahl:

a) $1+10^{-4}$ **b)** $2+3\cdot 10^{-1}$ **c)** $7\cdot 10^{-2}+3$ **d)** $8\cdot 10^{-5}+364\cdot 10^{-2}$

e) $2\cdot 10^{0}+3\cdot 10^{-1}+5\cdot 10^{-3}$ **f)** $6\cdot 10^{0}+4\cdot 10^{-1}+10^{-4}$

11. Für welche Zahlen stehen die Buchstaben?

a) $0{,}0123=1{,}23\cdot 10^{x}=123\cdot 10^{y}=a\cdot 10^{-2}=b\cdot 10^{-6}$

b) $0{,}0000101=1{,}01\cdot 10^{x}=10{,}1\cdot 10^{y}=0{,}101\cdot 10^{z}=a\cdot 10^{-4}=$
$=b\cdot 10^{-2}=c\cdot 10^{-6}$

12. a) $(\sqrt{3})^{-2}$ **b)** $(\sqrt{2})^{-10}$ **c)** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$ **d)** $(2\cdot\sqrt{6})^{-3}$

13. a) $0{,}25^{-1}$ **b)** $0{,}001^{-2}$ **c)** $0{,}5^{-4}$ **d)** $(-0{,}125)^{-3}$

14. Schreibe als Potenz mit möglichst kleiner natürlicher Basis:

a) $\frac{1}{25}$ **b)** $0{,}25$ **c)** $\frac{1}{343}$ •**d)** $0{,}000125$ **e)** $0{,}1^{5}$

15. Schreibe mit positiven Exponenten:

a) x^{-2} **b)** y^{-3} **c)** $(x+y)^{-4}$ **d)** $a^{-2}-b^{-2}$

e) $(a-b)^{-2}$ **f)** $\frac{1}{(a-b)^{-2}}$ **g)** $\frac{1}{a^{-2}-b^{-2}}$ **h)** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

i) $\left(-\frac{a}{b}\right)^{-2}$ **j)** $\left(-\frac{a}{b}\right)^{-3}$ **k)** $1:a^{-1}$

16. Schreibe die physikalischen Einheiten ohne negative Exponenten:

a) Geschwindigkeit ms^{-1} **b)** Dichte $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ **c)** Frequenz s^{-1}

d) Druck Nm^{-2} **e)** Leistung Js^{-1} **f)** Widerstand VA^{-1}

17. Berechne das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel aus 10^{2} und 10^{-2}.

18. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $x^{-2}=16$ **b)** $x^{-2}=0{,}0001$ **c)** $x^{-3}=\frac{1}{8}$ **d)** $x^{-10}=1024$

19. Für welche x gilt

a) $10^{x}=0{,}1$ **b)** $7^{x}=1$ **c)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=5^{0}$

d) $5^{x}=0{,}04$ **e)** $2^{x}=0{,}125$ **f)** $10^{x}=0{,}0001$

g) $11^{-x}=121$ **h)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=81$ •**i)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-x}=0{,}064$?

20. Welche der folgenden Terme sind definiert, und was ist gegebenenfalls ihr Wert?

a) $(0^{2})^{2}$ **b)** $(2^{0})^{2}$ **c)** $(2^{2})^{0}$ **d)** $0^{2^{2}}$ **e)** $2^{0^{2}}$ **f)** $2^{2^{0}}$

g) $(0^{0})^{2}$ **h)** $(0^{2})^{0}$ **i)** $(2^{0})^{0}$ **j)** $0^{0^{2}}$ **k)** $0^{2^{0}}$ **l)** $2^{0^{0}}$