Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

2.2 Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

2.2 Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Die Definitionen von a^0 (in 24.1) und a^{-n} (in 24.2) werden für die Mathematik erst dann fruchtbar, wenn man mit den neuen Symbolen so rechnen kann, daß die Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten auch für die Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gelten. Wir überprüfen das der Reihe nach:

I. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für $a \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$?

Zum Beweis müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem, ob m bzw. n positiv, null oder negativ ist. Im folgenden verwenden wir die Tatsache, daß $-m \in \mathbb{N}$ für $m < 0$ und $-n \in \mathbb{N}$ für $n < 0$ gilt.

1. Fall: $m = 0$, n beliebig

$$\text{LS} = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n$$
$$\text{RS} = a^{0+n} = a^n = \text{LS}$$

2. Fall: $m > 0$, $n < 0$

$$\text{LS} = a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n} = \text{RS}$$

3. Fall: $m < 0$, $n < 0$

$$\text{LS} = a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m+(-n)}} = \frac{1}{a^{-m-n}} =$$
$$= \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n} = \text{RS}$$

Die Fälle m beliebig, $n = 0$ bzw. $m < 0$, $n > 0$ brauchen wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Multiplikation nicht eigens untersucht zu werden.

II. Potenzieren einer Potenz

Gilt $(a^m)^n = a^{mn}$ für $a \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$?

1. Fall: $m = 0$, n beliebig

$$\text{LS} = (a^0)^n = 1^n = 1$$
$$\text{RS} = a^{0 \cdot n} = a^0 = 1 = \text{LS}$$

2. Fall: m beliebig, $n = 0$

$$\text{LS} = (a^m)^0 = 1$$
$$\text{RS} = a^{m \cdot 0} = a^0 = 1 = \text{LS}$$

3. Fall: $m < 0$, $n > 0$

$$\text{LS} = (a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1^n}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn} = \text{RS}$$

4. Fall: $m > 0,\ n < 0$

$$\mathrm{LS} = (a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn} = \mathrm{RS}$$

5. Fall: $m < 0,\ n < 0$

$$\mathrm{LS} = (a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} = \frac{1}{\frac{1^{-n}}{a^{(-m)(-n)}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn} = \mathrm{RS}$$

III. Potenzieren eines Produkts

Gilt $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ für $a, b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$?

1. Fall: $n = 0$

$$\mathrm{LS} = (a \cdot b)^0 = 1$$
$$\mathrm{RS} = a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = \mathrm{LS}$$

2. Fall: $n < 0$

$$\mathrm{LS} = (a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n = \mathrm{RS}$$

IV. Potenzieren eines Quotienten

Gilt $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ für $a, b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$?

$$\mathrm{LS} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{(-1)n} =$$
$$= a^n \cdot b^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n} = \mathrm{RS}$$

V. Division von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für $a \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$?

$$\mathrm{LS} = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n} = \mathrm{RS}$$

Damit ist gezeigt, daß die Rechengesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten auch für die neu definierten Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gelten. Wir merken uns:

Satz 31.1: Für $a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $(a^m)^n = a^{mn}$

III. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

V. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Bemerkung: Satz 31.1 gilt auch für $a = 0$ bzw. $b = 0$, solange kein Nenner null wird oder nicht der undefinierte Term 0^0 entsteht.

Beispiele:

zu I: $a^{-6} \cdot a^2 = a^{-6+2} = a^{-4}$

zu II: $(a^{-2})^{-9} = a^{-2 \cdot (-9)} = a^{18}$

zu III: $(3a)^{-4} = 3^{-4} \cdot a^{-4} = \dfrac{1}{81a^4}$

zu IV: $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-7} = \dfrac{a^{-7}}{2^{-7}} = \dfrac{128}{a^7}$

zu V: $\dfrac{a^{-2}}{a^{-6}} = a^{-2-(-6)} = a^{-2+6} = a^4$

Mit Hilfe der gewonnenen Potenzgesetze lassen sich physikalische Größen leicht von einer Benennung in die andere umrechnen. Hierzu ein

Beispiel: $7\,\text{fm} = 7 \cdot 10^{-15}\,\text{m} = 7 \cdot 10^{-15} \cdot 10^6\,\mu\text{m} = 7 \cdot 10^{-9}\,\mu\text{m}$

Aufgaben

1. a) $2^7 \cdot 2^{-4}$ **b)** $3^{-10} \cdot 3^6$ **c)** $5^{28} \cdot 5^{-25}$ **d)** $2^0 \cdot 2^6$
e) $6^6 \cdot 6^0 \cdot 6^{-5}$ **f)** $7^3 \cdot 7^{-3}$ **g)** $10^{-2} \cdot 10^{-1} \cdot 10^0$
h) $0{,}1^{-4} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}1^{-1}$ **i)** $(\frac{3}{5})^6 \cdot (\frac{5}{3})^3$ •**k)** $0{,}2^{-5} \cdot 5^{-2}$

2. a) $a^{-2} \cdot a^5$ **b)** $a^7 \cdot a^{-1} \cdot a^{-4}$ **c)** $x^{17} \cdot x^0 \cdot x^{-12}$
d) $y^n \cdot y^{1-n}$ **e)** $u^{2k+1} \cdot u^{k+1} \cdot u^{-2}$ **f)** $v^{2m-n} \cdot v^0 \cdot v^{n-2m}$
g) $(a+b)^3 \cdot (a+b)^{-1}$ **h)** $(xy)^2 \cdot (xy)^{-6}$ **i)** $(p-q)^{-2} \cdot (p-q)^2$

a) $(a^2+1) \cdot a^{-1}$ **b)** $(a^0+a^1) \cdot (a^{-2}+a^{-3})$
c) $(x^{-1}-1)(x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}+x^0)$ **d)** $(a^2+b^{-3}) \cdot a^{-1}b$
e) $(x^2+y^2)(x^{-2}-y^{-2})$ **f)** $(x^3-y^{-3})(x^{-2}+y^2)$
g) $(2m^2+5m-3m^{-2})(4m+6m^{-3})$ **h)** $(x^2-x+1-x^{-1}+x^{-2})(1+x^{-1})$

4. Schreibe x, y und z in Gleitkommadarstellung:

a) $400\,\text{nm} = x\,\text{m} = y\,\text{pm} = z\,\mu\text{m}$

b) $3{,}7\,\text{pF} = x\,\text{F} = y\,\text{fF} = z\,\text{nF}$

c) $0{,}007\,\mu\text{s} = x\,\text{ms} = y\,\text{ns} = z\,\text{ps}$

5. Schreibe in Gleitkommadarstellung mit der in der Klammer angegebenen Benennung:

a) Dicke des menschlichen Haares 70 µm (mm; m)

b) Dicke von Blattgold 100 nm (mm; m)

c) Durchmesser von Atomkernen 1 fm (nm; cm)

d) Durchmesser von Atomen 100000 fm (nm; cm)

e) Wellenlänge des gelben Na-Lichts 589,6 nm (mm; dm)

f) Ruhemasse des Elektrons $9{,}1091 \cdot 10^{-10}$ ag (g; kg)

g) Ruhemasse des Neutrons $1{,}67 \cdot 10^{-9}$ fg (mg; kg)

6. a) $(3^{-3})^2$ **b)** $(3^{-2})^3$ **c)** $(3^3)^{-2}$ **d)** $(3^2)^{-3}$
e) $(3^{-3})^{-1}$ **f)** $(4^{-2})^{-2}$ **g)** $(0{,}5^{-7})^0$ **h)** $(0{,}2^0)^{-8}$

7. a) $(a^{-5})^0$ **b)** $(a^{-1})^{-1}$ **c)** $(a^3)^{-2}$ **d)** $(a^{-n})^3$ **e)** $(a^{n-1})^{-n}$

8. a) $(x+x^{-1})^2$ •**b)** $(y^{-4}+1)^3$ **c)** $(a^2+a^{-2})^2-(a^2-a^{-2})^2$

9. a) $(1+a+a^{-1})^2$ **b)** $(1+x-x^{-1})^2$ **c)** $(z^2+1+z^{-2})^2$

10. a) $(a^2-b^2)^{-1}:(a-b)^{-2}$ **b)** $(9a^2-16)^{-2}\cdot(3a-4)^4$

11. a) $(x-y)^8\cdot(y-x)^{-8}$ **b)** $(x-y)^9\cdot(y-x)^{-9}$

12. a) $(2\cdot 3)^4$ **b)** $(5\cdot\sqrt{2})^{-4}$ **c)** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$ **d)** $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^{-3}$

13. a) $\dfrac{6^{-5}}{6^{-3}}$ **b)** $\dfrac{2^5\cdot 3^0}{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$ **c)** $\dfrac{(\frac{2}{3})^{-4}\cdot(\sqrt{3})^2}{(\frac{3}{2})^2\cdot(\frac{1}{3}\sqrt{3})^{-4}}$ **d)** $\dfrac{(\sqrt{2})^{-4}\cdot(\sqrt{\frac{1}{2}})^3}{(\sqrt{2})^{-3}\cdot(\sqrt{\frac{1}{2}})^4}$

14. a) $\dfrac{m^{-4}}{m^3}$ **b)** $\dfrac{n^2}{n^{-5}}$ **c)** $\dfrac{p^2\cdot q^{-1}}{p^3\cdot q^2}$ **d)** $\dfrac{(x+1)^4 y^{-6}}{(x+1)^{-1} y^4}$

15. a) $8^5\cdot(\frac{1}{4})^5$ **b)** $(\frac{2}{3})^{-6}\cdot(\frac{3}{4})^{-6}$ **c)** $(\frac{5}{3})^{-5}:(\frac{2}{5})^5$ **d)** $(1{,}5^{-2})^3:[(\frac{2}{3})^{-2}]^{-3}$

16. a) $(8x^{-3}\cdot 5x^2):(20x^3)$ **b)** $(0{,}1x^{-3}+\frac{1}{4}x^{-2})\cdot\frac{1}{2}x^3$
c) $(0{,}1x^{-3}+\frac{1}{4}x^{-2}):(\frac{1}{2}x^3)$

17. a) $(10x^{-3}:(5x^{-2}))\cdot 2x^3$ **b)** $(10x^{-3}:5x^2):(2x^3)$
c) $(10x^{-3}:(2x^{-5}))\cdot 2x^{-3}$

18. a) $(z^{2n+1}\cdot z^{-n}):z^2$ **b)** $(z^{2n+1}:z^{2n-1}):z^2$ **c)** $(z^{2n+1}\cdot z^{2n-1}):z^{5n}$

19. a) $\left(\dfrac{x}{4}\right)^{-2}:\left(\dfrac{x}{8}\right)^{-3}$ **b)** $\left(\dfrac{x}{8}\right)^{-2}:\left(\dfrac{x}{4}\right)^{-3}$ **c)** $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{-4}:\left(\dfrac{x}{9}\right)^{-4}$

20. **a)** $(2a^3b^{-1})^{-4}$ **b)** $\left(\dfrac{x^2y}{z^3}\right)^{-3}$ **c)** $(64a^{-6}b^7)^0$ **d)** $\left(\dfrac{0{,}5a^{-4}c^6}{0{,}2^{-1}}\right)^{-1}$

e) $(abc)^n$ **f)** $(a^{-n}b^{1+n}c^{-2})^{n-1}$

g) $\left[\dfrac{8x^{-k}y^2}{(xy)^{k-1}}\right]^{k+1}$ **•h)** $\dfrac{(2x^{-2}\cdot\sqrt{y^{-1}})^{-2n}}{\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\cdot y^{n+1}\right]^2}$

21. **a)** $\left(\dfrac{x^{2n-1}}{y^{-3m}}\right)^{-3} : \left(\dfrac{y^{m-8}}{x^{n+2}}\right)^{-2}$

b) $\left(\dfrac{a^k b^{-m}}{c^n}\right)^{-2} : \left[\left(\dfrac{a^{2k-1}c^{n+2}}{b^{3m}}\right)^3\cdot\left(\dfrac{1}{a^{-k}b^{m+3}c^{3-2n}}\right)^2\right]$

22. **a)** $\dfrac{1}{x^n y^{n-2}}+\dfrac{1}{x^{n-2}y^n}+\dfrac{2}{x^{n-1}y^{n-1}}$

b) $\dfrac{a^2}{y^{m-1}z^{n-2}}-\dfrac{2a}{y^{m-2}z^{n-1}}+\dfrac{1}{y^{m-3}z^n}$

23. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) $10^{-100}=100^{-10}$ **b)** $10^{-100}=100^{-50}$ **c)** $(-7^4)^3=-(7^3)^4$

d) $2^{-10}+2^{-10}=2^{-9}$ **e)** $3^{-11}+3^{-11}+3^{-11}=9^{-5}$

24. Berechne:

a) $2\cdot10^{-7}+7{,}1\cdot10^{-7}-1{,}4\cdot10^{-7}$

b) $3\cdot10^{-7}+1{,}2\cdot10^{-6}$ **c)** $0{,}5\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-2}-1{,}5\cdot10^{-3}$

d) $0{,}0001\cdot10^{-1}+0{,}001\cdot10^{-2}-0{,}01\cdot10^{-3}$

25. Radiziere ohne Verwendung eines Taschenrechners:

a) $\sqrt{81\cdot10^{-4}}$ **b)** $\sqrt{8{,}1\cdot10^{-7}}$ **c)** $\sqrt{0{,}441\cdot10^{-3}\cdot14{,}4\cdot10^{-5}}$

d) $\sqrt{4^{-4}}$ **e)** $\sqrt{10^{-100}}$ **f)** $\sqrt{100^{-10}}$

•26. $\left(\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x+y}\right)^{-4}\cdot\left(\dfrac{y-x}{x^{-1}+y^{-1}}\right)^4 : \left(\dfrac{x+y}{x^3y^3}\right)^{-4}$

••27. $(1-(ab^{-1})^{-1})^{-2}+(1+(ba^{-1})^{-1})^{-2}+2ab^{-1}(1-(ba^{-1})^{-2})^{-1}$

••28. $\left(\dfrac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}+\dfrac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$

••29. $\dfrac{a+b}{\left(1-\dfrac{1}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{-1}}-\dfrac{a-b}{\left(1+\dfrac{1}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^{-2}}$

30. Beschreibe in Worten, wie die folgenden Zahlen in dezimaler Schreibweise aussehen würden.

a) $(10^{10})^{10}$ **b)** $10^{10^{10}}$ **c)** $5(10^{10})^{10}$ **d)** $3(10^{10})^{10}+23$

e) $10^{10^{10}}-1$ **f)** $10^{10^{10}-1}$ **g)** $(10^{-10})^{10}$ **h)** $10^{-10^{10}}$

31. Im Jahre 1989 wurde von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig die Avogadro-Konstante* neu bestimmt zu $N_A = 6{,}022134 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kmol}^{-1}$. Sie gibt die Anzahl der Moleküle in einem Kilomol eines reinen Stoffes an. So enthalten z.B. 18,016 kg Wasser $6{,}022134 \cdot 10^{26}$ Wassermoleküle.

a) Wie viele Wassermoleküle sind in 10^{-6} g Wasser enthalten?

b) Wieviel g Wasser bilden 1 Trillion Wassermoleküle?

32. In der modernen Analysetechnik verwendet man bei Angaben von Konzentrationen über Prozent und Promille hinaus die aus dem Amerikanischen stammenden Abkürzungen ppm = parts per million = 10^{-6}, ppb = parts per billion = 10^{-9}, ppt = parts per trillion = 10^{-12} und ppq = parts per quadrillion, zu deutsch Teile auf eine Million, eine Milliarde, eine Billion bzw. eine Billiarde. Die z. B. bei ppm stehende Zahl gibt die Anzahl der Teile einer Substanz in 1 000 000 Teilen der Gesamtsubstanz an. Demnach sind 5 Menschen 1 ppb einer Weltbevölkerung von 5 Milliarden Menschen.**

a) Drücke für Feststoffe 1 %, 1 ‰, 1 ppm, 1 ppb, 1 ppt und 1 ppq als g/kg aus.

b) Eine gewisse Weizenmenge wurde durch ein Roggenkorn der Masse 0,1 g verunreinigt. Die Verunreinigung beträgt 1 ppt. Wieviel Weizen wurde verunreinigt? Wie viele 500 m lange Güterzüge sind zum Transport dieses Weizens nötig, wenn 1 Güterzug 2500 t Weizen befördern kann?

c) In einer Abraumhalde wurden 1000 ppt Cadmium gefunden. Ist dies beängstigend, wenn man weiß, daß in der Erdkruste etwa 300 mg Cd pro Tonne enthalten sind?

33. Vor 4,5 Mrd. Jahren entstand der Planet Erde. Vor 2 Mrd. Jahren tauchten die ersten Algen auf, vor 1,4 Mrd. Jahren mit dem Panzerfisch das erste Wirbeltier, und vor 1,2 Mrd. Jahren entwickelten sich die ersten Landpflanzen. Vor 900 Mio. Jahren begannen die Saurier, die Erde zu bevölkern, 300 Mio. Jahre später entstanden die ersten Säuger. Vor 200 Mio. Jahren falteten sich die Alpen. Vor 600 000 Jahren liefen in Olduvai (Südafrika) die ersten Menschen herum. Vor 130 000 Jahren gab es viele Neandertaler, vor 40 000 Jahren trat der homo sapiens auf, vor 19 000 Jahren wurde die Höhle von Lascaux bemalt, vor 15 000 Jahren starb das Mammut aus, vor 8000 Jahren wurde Jericho, die älteste Stadt, gegründet, vor

* Lorenzo Romano Amedeo Carlo AVOGADRO, Graf von Quaregna und Ceretto (9.8.1776 Turin – 9.7.1856 ebd.), Jurist, Physiker und Chemiker

** 1 ppb liest man natürlich 1 part per billion.

5000 Jahren begannen die alten Hochkulturen in Ägypten, Babylon und China sich zu entwickeln, vor 2000 Jahren wurde Christus geboren, und vor 350 Jahren entstand die moderne Physik.

a) Wähle das Alter der Erde als Zeiteinheit (EA) und drücke die oben angegebenen Zeiträume, von heute aus rückwärts gerechnet, mittels Gleitkommadarstellung und auch unter Verwendung der Vorsätze von Seite 26 in EA aus.

b) Fasse die 4,5 Mrd. Jahre als einen von 0.00 Uhr bis 12.00 Uhr dauernden Zeitraum auf.

   1) Vor wieviel h min sec traten obige Ereignisse ein?

   2) Wieviel Uhr war es dann?

   3) Veranschauliche die Geschichte graphisch durch die Stellung des Stundenzeigers auf dem Zifferblatt einer Uhr.

**2.3 Zur Geschichte der Potenzen

Quadrat- und Kubikzahlen beherrschten die Babylonier etwa seit 2000 v. Chr. Erhalten blieben uns sogar a^n-Tabellen für ausgewählte Basen a mit den Exponenten von 2 bis 10.
In der frühen griechischen Mathematik finden sich bald eigene Namen für die Quadrat- und Kubikzahlen, die von den PYTHAGOREERN der Geometrie entlehnt wurden, nämlich τετράγωνος (tetrágonos) = *viereckig* für die Quadratzahl und κύβος (kýbos) = *Würfel* für die Kubikzahl. Daneben benützt aber HIPPOKRATES von Chios (2. Hälfte des 5. Jh.s v. Chr.) das Wort δύναμις (dýnamis) = *Kraft* für die 2. Potenz. Wann man zum ersten Mal zu Namen für höhere Potenzen fortgeschritten ist, wissen wir nicht. Daß es schwierig war, können wir nachempfinden; denn man mußte sich ja völlig von den geometrischen Vorstellungen des Quadrats und des Würfels lösen. Bei HERON (um 62 n. Chr.) findet man δυναμοδύναμις (dynamodýnamis) als Bezeichnung für die 4. Potenz einer Streckenlänge. DIOPHANT (um 250 n. Chr.) verwendet dieses Wort, um die 4. Potenz der Unbekannten, also x^4 auszudrücken. Er führt die Reihe bis zur 6. Potenz weiter fort mit δυναμόκυβος (dynamókybos) für x^5, *additiv* gebildet gemäß $x^5 = x^{2+3}$, und κυβόκυβος (kybókybos) für x^6 gemäß $x^6 = x^{3+3}$. Außerdem benützt er für die Reziproken $\frac{1}{x}$ bis $\frac{1}{x^6}$ eigene Namen, indem er an die ursprüngliche Potenzbezeichnung die Silbe -τόν (ton) anhängt: $\frac{1}{x}$ = ἀριθμοστόν (arithmostón), $\frac{1}{x^2}$ = = δυναμοστόν (dynamostón), $\frac{1}{x^3}$ = κυβοστόν (kybostón), …, $\frac{1}{x^6}$ = κυβοκυβοστόν (kybokybostón). Durch Ausrechnen aller für ihn möglichen Fälle – es darf kein Exponent größer als 6 werden – gibt er an, wie diese Potenzen miteinander multipliziert werden, also unsere Sätze 14.1 und 16.1. Im übrigen ist er sich der Schwerfälligkeit seiner Wortschöpfungen bewußt und kürzt sie ab mit ς für x, Δ^Y, K^Y, $\Delta^Y \Delta$, ΔK^Y und $K^Y K$. Reziproke werden durch ein hinzugefügtes ✕ kenntlich gemacht: $ς^{✕} = \frac{1}{x}$, $\Delta^Y ✕ = \frac{1}{x^2}$ usw.