Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

2.3 Zur Geschichte der Potenzen

5000 Jahren begannen die alten Hochkulturen in Ägypten, Babylon und China sich zu entwickeln, vor 2000 Jahren wurde Christus geboren, und vor 350 Jahren entstand die moderne Physik.

a) Wähle das Alter der Erde als Zeiteinheit (EA) und drücke die oben angegebenen Zeiträume, von heute aus rückwärts gerechnet, mittels Gleitkommadarstellung und auch unter Verwendung der Vorsätze von Seite 26 in EA aus.

b) Fasse die 4,5 Mrd. Jahre als einen von 0.00 Uhr bis 12.00 Uhr dauernden Zeitraum auf.

   1) Vor wieviel h min sec traten obige Ereignisse ein?

   2) Wieviel Uhr war es dann?

   3) Veranschauliche die Geschichte graphisch durch die Stellung des Stundenzeigers auf dem Zifferblatt einer Uhr.

**2.3 Zur Geschichte der Potenzen

Quadrat- und Kubikzahlen beherrschten die Babylonier etwa seit 2000 v. Chr. Erhalten blieben uns sogar a^n-Tabellen für ausgewählte Basen a mit den Exponenten von 2 bis 10.

In der frühen griechischen Mathematik finden sich bald eigene Namen für die Quadrat- und Kubikzahlen, die von den PYTHAGOREERN der Geometrie entlehnt wurden, nämlich τετράγωνος (tetrágonos) = *viereckig* für die Quadratzahl und κύβος (kýbos) = *Würfel* für die Kubikzahl. Daneben benützt aber HIPPOKRATES von Chios (2. Hälfte des 5. Jh.s v. Chr.) das Wort δύναμις (dýnamis) = *Kraft* für die 2. Potenz. Wann man zum ersten Mal zu Namen für höhere Potenzen fortgeschritten ist, wissen wir nicht. Daß es schwierig war, können wir nachempfinden; denn man mußte sich ja völlig von den geometrischen Vorstellungen des Quadrats und des Würfels lösen. Bei HERON (um 62 n. Chr.) findet man δυναμοδύναμις (dynamodýnamis) als Bezeichnung für die 4. Potenz einer Streckenlänge. DIOPHANT (um 250 n. Chr.) verwendet dieses Wort, um die 4. Potenz der Unbekannten, also x^4 auszudrücken. Er führt die Reihe bis zur 6. Potenz weiter fort mit δυναμόκυβος (dynamókybos) für x^5, *additiv* gebildet gemäß $x^5 = x^{2+3}$, und κυβόκυβος (kybókybos) für x^6 gemäß $x^6 = x^{3+3}$. Außerdem benützt er für die Reziproken $\frac{1}{x}$ bis $\frac{1}{x^6}$ eigene Namen, indem er an die ursprüngliche Potenzbezeichnung die Silbe -τόν (ton) anhängt: $\frac{1}{x}$ = ἀριθμοστόν (arithmostón), $\frac{1}{x^2}$ = δυναμοστόν (dynamostón), $\frac{1}{x^3}$ = κυβοστόν (kybostón), …, $\frac{1}{x^6}$ = κυβοκυβοστόν (kybokybostón). Durch Ausrechnen aller für ihn möglichen Fälle – es darf kein Exponent größer als 6 werden – gibt er an, wie diese Potenzen miteinander multipliziert werden, also unsere Sätze 14.1 und 16.1. Im übrigen ist er sich der Schwerfälligkeit seiner Wortschöpfungen bewußt und kürzt sie ab mit ς für x, Δ^Y, K^Y, $\Delta^Y\Delta$, ΔK^Y und $K^Y K$. Reziproke werden durch ein hinzugefügtes χ kenntlich gemacht: $\varsigma^{\chi} = \frac{1}{x}$, $\Delta^{Y\chi} = \frac{1}{x^2}$ usw.

In der altindischen Mathematik setzte man höhere Potenzen (bis hin zur zwölften) im Gegensatz zu DIOPHANTS Bildungsweise *multiplikativ* zusammen: *varga* $= x^2$ und *ghana* $= x^3$ ergaben *ghanavarga* $= x^6$. Die entstehenden Wortungetüme werden dadurch handlich, daß nur die ersten Silben benutzt werden: *va-va-va* $= (x^2)^2)^2 = x^8$.
Wie die meisten arabischen Mathematiker entschied sich AL-CHARIZMI (um 780 bis nach 847) für die indische Art der Potenzbezeichnung, ABU KAMIL (um 850 bis 930) und Omar AL-HAYYAM (1048? bis 1131) hingegen für die additive Bildung DIOPHANTS. So nimmt es nicht wunder, daß man in Europa bis hin zur Renaissance beide Benennungsweisen findet. LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240) und noch François VIÈTE (1540–1603) benützen die additive Bezeichnungsweise, Luca PACIOLI (um 1445–1517) jedoch die multiplikative. Auf die weite Verbreitung seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* von 1494, die das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit zusammenfaßt, ist es zurückzuführen, daß sich die multiplikativen Bezeichnungen bei den italienischen Algebraikern wie Niccolò TARTAGLIA (1499 bis 1557), Geronimo CARDANO (1501 bis 1576) und Raffaele BOMBELLI (1526 bis 1572) durchsetzen und von den deutschen Cossisten wie Christoff RUDOLFF (um 1500 bis vor 1543), Adam RIES (1492–1559) und Michael STIFEL (1487?–1567) übernommen werden. Sie haben nur einen Nachteil: Für jede Primzahlpotenz braucht man einen eigenen Namen! Um dir die ganze Problematik und auch die geistige Leistung verdeutlichen zu können, müssen wir weit ausholen.

Abb. 36.1 Luca PACIOLI, als Mönch Frater Lucas de Burgo Sancti Sepulcro (um 1445 Borgo San Sepolcro – 1517 ebd.), hier als hl. Petrus der Märtyrer dargestellt von dem Maler und Mathematiker PIERO DELLA FRANCESCA (1410/20–1492). Namenszug aus dem Testament vom 9.11.1508.

Bis zur 3. Potenz der Unbekannten hatte man keine Schwierigkeiten.
Die 1. Potenz, also unser x: Das arabische *schai* = *ein Etwas* wird zum lateinischen *res* (= *Sache*), wofür die Italiener *cosa* sagten, das sich im Deutschen als *cossa* und *coß* findet und das mit *ding* eingedeutscht wurde. Da aber die Araber auch die Unbekannte mit *dschidr* = *Wurzel* bezeichnet hatten, heißt sie gelegentlich sogar im Deutschen *radix*.

x^2: Das arabische *māl* = *Vermögen* wird über das lateinische *census* zum italienischen *censo* und zum deutschen Fremdwort *zensus*.

x^3: Das arabische *kaab* = *Würfel* wird über das lateinische *cubus* zum italienischen *cubo* und zum deutschen Fremdwort *cubus*.
x^4: Hier begannen die Schwierigkeiten, da ja, wie oben gesagt, kein geometrisches Gebilde mehr zur Verfügung stand. Mit *censo de censo* behalf man sich.
x^5: Bei Leonardo kommt es nicht vor! Luca Pacioli verwendet dafür eine im 15. Jh. in Italien aufgekommene, uns unerklärliche Bezeichnung, nämlich *primo relato*, da er *censo de cubo*, d. h. *Quadrat des cubus*, für x^6 gemäß $(x^3)^2$ wählte. Von da ab schreitet er systematisch weiter:

x^7	*secundo relato*	x^8	*censo de censo de censo*
x^9	*cubo de cubo*	x^{10}	*censo de primo relato*
x^{11}	*terzo relato* usw. bis x^{29}.		

Da das Ausschreiben dieser Wortverbindungen recht umständlich ist und die Rechnungen unübersichtlich macht, verwendet Pacioli – so wie die Alten – entsprechende Abkürzungen, nämlich

co.	ce.	cu.	ce.ce.	p°.r°.	ce.cu.	2°.r°.
ce.ce.ce.	cu.cu.	ce.p°.r°.	3°.r°.	usw.		

Übersichtlich ist das noch immer nicht! Da hatten die deutschen Cossisten eine glücklichere Hand:
Cosa wurde zwischen 1460 und 1480 durch 𝔯, *census* durch 𝔷 und *cubus* durch 𝔠, das ist ein deutsches c (= 𝔠), dem ein Schnörkel angefügt wurde, abgekürzt.* *Zensus de zensu* war dann 𝔷𝔷. Für die 5. Potenz der Unbekannten tauchte um 1500 das Wort *sursolidum*** auf. Abgekürzt wurde es durch ein damals übliches Doppel-s, d. h. durch ſ (ein langes s), dem ʒ (ein kurzes s) angehängt wurde, also durch ß, in der gotischen Frakturschrift durch ß. Die Abkürzungen 𝔷𝔠, 𝔷𝔷𝔷 und 𝔠𝔠 für x^6, x^8 und x^9 erklären sich von selbst. Für x^7 benötigte man jedoch ein neues Wort: *bissursolidum*, abgekürzt bei Rudolff 1525 mit bß. Während Initius Algebras (vor 1504) die höheren Potenzen logisch lateinisch weiterbildet mit *terß* für x^{11}, *quadrß* für x^{13} und *quintß* für x^{17}, kommt Stifel 1544 in seiner *Arithmetica integra* auf den glücklichen Gedanken, das bß formal weiterzuführen durch cß, dß, eß usw. Das Rechnen mit diesen Gebilden ist natürlich sehr umständlich. Initius Algebras stellt die möglichen Produkte bis x^{18} noch in Form einer 1×1-Tabelle dar.
Inzwischen hat aber ein Verfahren immer mehr an Bedeutung gewonnen, das auf Euklid zurückgeht. Seinen Lehrsatz 11 aus Buch IX der *Elemente* kann man gewissermaßen als den ersten Teil unseres Satzes 16.1 »$a^m : a^n = a^{m-n}$« auffassen. Er lautet: »Wenn beliebig viele Zahlen, beginnend mit der Einheit, in stetiger Proportion zueinander stehen,« – Euklid betrachtet also die Folge $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ – »dann mißt eine kleinere Zahl eine größere nach einer in der Folge vorkommenden Zahl.« Das heißt

* 𝔯 entstand aus der Abkürzung ꝯ = co für *cosa* (*Deutsche Algebra* des *Codex Dresden C 80*, 1481). In der *Lateinischen Algebra* von *C 80* (vor 1486) wird das c immer spitzer und erhält außerdem eine Linkskrümmung, das o wird zu einer Schleife mit Auslauf: 𝔯 𝔯 𝔯 𝔯. Man war sich aber bewußt, daß das Zeichen 𝔯 als *cosa* zu lesen ist; der Plural *cosae* wurde nämlich durch ein zusätzliches hochgestelltes e verdeutlicht: 𝔯ᵉ. – Unsere in der 1. und 2. Auflage von *Algebra 1* auf S. 121 gegebene Darstellung hinsichtlich 𝔯 ist falsch.

** So in der *Coß* von Adam Ries (1492–1559) – sie wurde erst 1855 in der Schulbibliothek von Marienberg gefunden und 1860 auszugsweise, 1992 vollständig gedruckt – und in der von Christoff Rudolff (1525). Michael Stifel macht 1544 daraus *surdesolidum*, John Napier (1550–1617) *supersolidum* (vor 1592). Bei René Descartes (1596–1650) findet man 1637 in seiner *La Géométrie* für x^5 das französische Wort *sursolide* = *überkörperlich*. Ob das auch die Bedeutung von *sursolidum* ist?

beispielsweise, a^2 mißt a^7 nach a^5, weil $a^7 : a^2 = a^5$ ist, oder auch, weil $a^5 \cdot a^2 = a^7$ ist. Bewiesen hat er diesen Satz nur für den Fall $n = 1$. Interessant und fruchtbar wurde aber das Korollar*, das er diesem Lehrsatz anfügt: »Und es ist klar, daß die Zahl, nach der gemessen wird, von der gemessenen aus nach rückwärts denselben Platz hat wie die messende Zahl von der Einheit aus.« Das heißt aber, $a^7 : a^5 = a^{7-5} = a^2$.

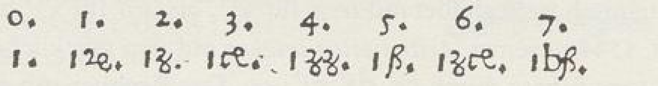
$1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad a^5 \quad a^6 \quad a^7 \quad a^8 \quad \ldots$

Platz der messenden Zahl

Platz der Zahl, nach der gemessen wird

Platz der gemessenen Zahl

Archimedes (um 287–212 v. Chr.) stellt in seiner »Schrift über die Sandzahl« – ὁ Ψαμμίτης (ho psammítes)** – diesen Sachverhalt so dar: »Wenn von Zahlen, die von der Einheit ab in festem Verhältnis stehen [also $1, a, a^2, a^3, \ldots$], irgendzwei miteinander multipliziert werden, so wird auch das Produkt dieser Folge angehören und [...] wird von der Einheit um 1 weniger abstehen, als die beiden Faktoren zusammen von der Einheit abstehen.« Anders ausgedrückt: Das Produkt aus dem 3. Glied a^2 und dem 6. Glied a^5 ergibt wegen $3 + 6 - 1 = 8$ das 8. Glied a^7. Umständlich, aber richtig hat Archimedes damit die Multiplikationsregel für Potenzen. Einfacher hätte er die Regel formulieren können, wenn er der Eins die Null als Platzzahl hätte zuweisen können. Aber die gab es damals noch gar nicht! Diese Zuweisung muß wohl al-Karadschi († 1019/29) vorgenommen haben; denn bei ihm sind Multiplikations- und Divisionsregel bereits in unserer Art formuliert. Im Abendland ordnet 1484 Nicolas Chuquet in seinem *Triparty* bei der Betrachtung solcher Potenzfolgen der Eins die Null zu und kann dann mit den Platzzahlen bequem rechnen. Michael Stifel (1487?–1567) kommt nun 1544 in seiner *Arithmetica integra* auf die Idee, diese Platzzahlen auch über die Folge der cossischen Zeichen, d. h. über die Folge der Potenzen der Unbekannten, zu schreiben, wobei er auch der Eins die Null zuordnet:



Die zugeordnete Platzzahl nennt er **Exponent** (= Ausgesetzte) und formuliert damit ganz modern den Inhalt unserer Sätze 14.1 und 16.1:

> *Exponentes signorum, in multiplicatione adde, in divisione subtrahe, tunc fit exponens signi fiendi.*
> Die Exponenten der [cossischen] Zeichen addiere bei der Multiplikation und subtrahiere bei der Division; dann entsteht der Exponent des Zeichens, das entstehen muß.

In der Neubearbeitung der Rudolffschen *Coß* (1553) geht Stifel in der Darstellung der Potenzen von Unbekannten noch weiter. Er greift nämlich einen Gedanken aus der *Arithmetica integra* auf, verschiedene Unbekannte durch die Buchstaben 𝔄, 𝔅, ℭ usw. zu bezeichnen und die Folge ihrer Potenzen wie folgt darzustellen, ohne damit aber zu rechnen:

* corollarium (lat.) = ein Kränzchen aus Blumen als Geschenk für einen guten Schauspieler etc. Daraus wurde dann *Geschenk*, *Zulage*. In der Logik versteht man unter Korollar einen Satz, der sich wie selbstverständlich aus einem soeben bewiesenen Satz ergibt.

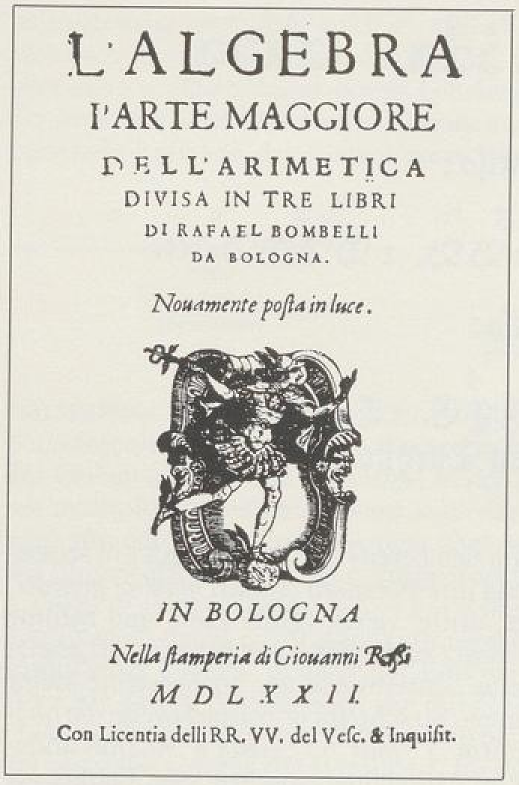
** Archimedes berechnet darin die Anzahl der Sandkörner im Weltall zu höchstens 10^{63}.

0 1 2 3 4
1. 1𝔄. 1𝔄𝔄. 1𝔄𝔄𝔄. 1𝔄𝔄𝔄𝔄.
Vnd so fort ahn ohn ende.
Item auch also:
0 1 2 3 4
1. 1𝔅. 1𝔅𝔅. 1𝔅𝔅𝔅. 1𝔅𝔅𝔅𝔅/etc.
Item also:
0. 1. 2 3 4
1. 1ℭ. 1ℭℭ. 1ℭℭℭ. 1ℭℭℭℭ. etc.
Vnd so fort ahn von andern Buchstaben.

Von geometrischen Vorstellungen gelöst hatte sich bereits Nicolas CHUQUET in seinem *Triparty* 1484: Er nannte die Unbekannte und ihre Potenzen einfach *nombre premier, second, tiers, quart, quint,* d.h. erste, zweite, dritte, vierte, fünfte Zahl, und betonte dabei, daß diese Bezeichnungsweise im Gegensatz zu der der Alten beliebig fortgesetzt werden könne. Ganz modern mutet uns seine Schreibweise an: hochgestellte kleine Zahlen bezeichnen die Potenz der Unbekannten. So schreibt er beispielsweise die quadratische Gleichung $3x + 6x^2 = 30$ in der Form $.3.^1$ *plus* $.6.^2$ *egaulx a* .30. (mit arabischen Ziffern geschriebene Zahlen wurden im Mittelalter zwischen zwei Punkte gesetzt). Sogar die Hochzahl 0 kommt bei ihm vor, wenn er die Konstante 12 ganz logisch als $12x^0$ durch $.12.^0$ ausdrückt. Ob CHUQUETS Exponentenschreibweise Raffaele BOMBELLI (1526–1572) beeinflußt hat, wissen wir nicht. Auch er verwendet kleine Hochzahlen, unter denen er aber einen Bogen anbringt. In seiner 1557/60 niedergeschriebenen *L'Algebra* stehen diese Exponenten noch über den Koeffizienten, so daß unser $x^3 = 15x + 4$ dort $\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$ *eguale à* $\overset{\overset{1}{\smile}}{15}$ *p* $\overset{\overset{0}{\smile}}{4}$ lautet. Für die Buchdrucker war diese Schreibweise natürlich zu unbequem; außerdem brauchte man sehr viel Platz dafür. Aus diesem Grunde setzte man, als 1572 das Manuskript gedruckt wurde, fast überall die Bogenexponenten neben die Koeffizienten und ließ die Null weg: 1 $\overset{3}{\smile}$ eguale à 15 $\overset{1}{\smile}$ p. 4. Simon STEVIN (1548–1620) wandelt den BOMBELLIschen Bogen in einen Kreis ab: 1 ② + 6 ① + + 9, *egales à* 25 ist unser $x^2 + 6x + 9 = 25$. Aber auch ein Kreis, gefüllt mit kleinen Zahlen, ist drucktechnisch ein Problem. Adriaen VAN ROOMEN* setzte daher 1593 die Exponenten zwischen zwei durch Querstriche verbundene Klammern. Seine berühmte Gleichung 45. Grades beginnt also mit 1 (45). Noch bequemer und fast übersichtlicher als unser $6x^6 - 9x^4 + 10x^3 + 3x - 4$ ist die Schreibweise, die Jost BÜRGI (1552–1632) in seiner *Coss*** verwendet, nämlich $\overset{\text{vi}}{6} - \overset{\text{iv}}{9} + \overset{\text{iii}}{10} + \overset{\text{i}}{3} - \overset{\text{o}}{4}$, und die auch Johannes KEPLER (1571–1630) z.B. 1619 in seiner *Harmonice mundi* benutzt. Hier hätte die Geschichte enden können; denn kürzer geht es praktisch nicht. Kein Problem war nämlich, wie man 11^3 schreiben sollte; denn das rechnete man eben aus. Ungelöst blieb aber noch das Problem, Ausdrücke mit Potenzen mehrerer Unbekannter wie z.B.

* 1561 Löwen – 1615 Mainz, Professor der Medizin im heute belgischen Löwen, ab 1593 in Würzburg

** BÜRGI verfaßte vermutlich nach 1598 für seine nie gedruckte und verlorengegangene Sinustafel, den *Canon Sinuum*, eine algebraische Einleitung, die *Coss*, die Johannes KEPLER spätestens 1603 für ihn redigierte und auch niederschrieb. Gedruckt wurde sie erst 1973.


L'ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.
Nouamente posta in luce.
IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
MDLXXII.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

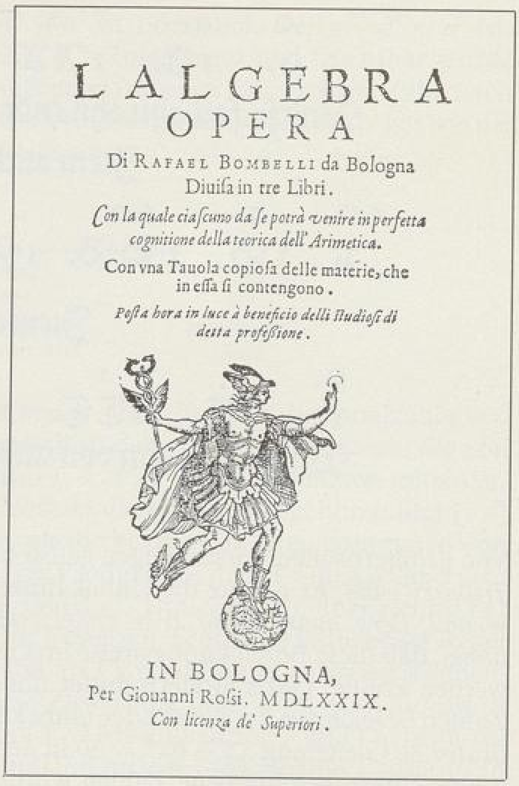

L ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

Abb. 40.1 Titelblätter der *L'Algebra* des Raffaele BOMBELLI. Nachdem die Auflage von 1572 sich schlecht verkauft hatte, brachte der Verleger das Buch 1579 textlich unverändert, aber mit einem neuen, reißerischen Titelblatt versehen, erneut heraus. Eine solche 2. Auflage heißt Titelauflage.*

$3xyz^2$ darzustellen. STEVIN behalf sich damit, daß er den Exponentenkreisen die Silben *sec, ter, ...* (für seconde quantité, tierce quantité, ...) voranstellte. Mit dem auch bei STIFEL üblichen M als Multiplikationszeichen liest sich $3xyz^2$ bei STEVIN als 3 ① M *sec* ① M *ter* ②. Nicht sehr schön!
Eigentlich hätte sich die ganze Angelegenheit lösen lassen, als 1591 François VIÈTE (1540–1603) mit seiner *In artem analyticem Isagoge* – »Einführung in die analytische Kunst« – die Buchstabenrechnung einführte: Variable wurden durch Vokale, Formvariable durch Konsonanten ausgedrückt. Somit war es klar, wie die Basis zu schreiben war. Leider übernahm VIÈTE aber nicht die Exponentensymbole STEVINS oder VAN ROOMENS. In dem 1615 postum gedruckten *De emendatione aequationum tractatus* steht z. B. in Cap. VII noch

* *Links:* Die Algebra | Bedeutendster Teil | der Arithmetik | gegliedert in drei Bücher | von Rafael Bombelli | aus Bologna. | Auf neue Art herausgebracht. | In Bologna | in der Druckerei des Giovanni Rossi | 1572. | Mit Erlaubnis der Ehrwürdigen Herren des Bistums und der Inquisition.

Rechts: Die Algebra | Werk | des Rafael Bombelli aus Bologna | gegliedert in drei Bücher. | Mittels dessen jeder von selbst zu einer vollkommenen | Erkenntnis der Theorie der Arithmetik gelangen kann. | Mit einem reichhaltigen Verzeichnis der Gebiete, die | in ihm enthalten sind. | Jetzt herausgebracht zum Nutzen der Studierenden | dieser Wissenschaft. | In Bologna, | durch Giovanni Rossi. 1579. | Mit Erlaubnis der Oberen.

A cubus + B plano ter in A aequari Z solido bis

für $A^3 + 3B^{II}A = 2Z^{III}$, also letztlich für unser $x^3 + 3bx = 2c$.*

»Was neu ist, pflegt anfangs roh und unförmig vorgelegt zu werden und muß dann in den folgenden Jahrhunderten geglättet und vervollkommnet werden«**, schreibt VIÈTE im Widmungsbrief der *Isagoge* an seine Gönnerin Catherine DE PARTHENAY. Es bedurfte aber keiner Jahrhunderte! Adriaen VAN ROOMEN verbindet bereits um 1600 Basis und Exponentensymbol zu einem Gebilde und schreibt

A(4) + B(4) − 4A(3) in B + 6A(2) in B(2) − 4A in B(3)

für unser $A^4 + B^4 - 4A^3B + 6A^2B^2 - 4AB^3$. In seinem *Cursus mathematicus* vereinfacht 1634 der Baske Pierre HÉRIGONE († um 1643) die Schreibweise wesentlich, indem er die Klammern wegläßt und außerdem wie Thomas HARRIOT (1560–1621)*** kleine Buchstaben für die Variablen verwendet: a3, 2b4 bzw. 2ba2 sind unser a^3, $2b^4$ bzw. $2ba^2$. 1637 ist es dann soweit! René DESCARTES (1596–1650) schreibt in seiner *La Géométrie* die Exponenten als rechts von der Basis hochgestellte kleine Zahlen.**** Im 18. Jh. hat diese Schreibweise schließlich alle mit ihr konkurrierenden verdrängt.

Negative Exponenten finden wir zum erstenmal – so wie die Null – bei Nicolas CHUQUET 1484 in seinem *Triparty*: $.12.^{1.\tilde{m}}$ ist $12x^{-1} = \frac{12}{x}$, $\tilde{m}.12.^{2.\tilde{m}}$ ist $-12x^{-2} = -\frac{12}{x^2}$. Auch versteht CHUQUET mit diesen negativen Exponenten zu rechnen! Da sein *Triparty* nicht gedruckt wird, ist STIFELS *Arithmetica integra* von 1544 von erheblicher Bedeutung für die Einführung negativer Exponenten. Das nachstehend abgebildete Schema von folio 249v zeigt den klaren Zusammenhang zwischen den Zweierpotenzen und den zugehörigen Exponenten.

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

John WALLIS (1616–1703) arbeitet in seiner *Arithmetica infinitorum* 1655 mit negativen Exponenten, wagt es aber nicht, die von ihm benützte DESCARTESsche Potenzschreibweise auf a^{-1} für $\frac{1}{a}$ zu erweitern. Dies ist Isaac NEWTON (1643–1727) vorbehalten, der am 13. Juni 1676 an Heinrich OLDENBURG (um 1618 Bremen – 1677 London), den Sekretär der Royal Society, schreibt – der auf lateinisch verfaßte Brief ist zur Weiterleitung an Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) bestimmt –:

* B muß die Dimension II, d. h. die einer Fläche, und Z die Dimension III, d. h. die eines Körpers, haben, damit nach VIÈTE die Gleichung dimensionsmäßig richtig ist. Hier tritt wieder die alte Vorstellung der Griechen zutage, daß zu einem Würfel nicht eine Seite addiert werden kann.

** quae nova sunt solent a principio proponi rudia et informia, succedentibus deinde seculis expolienda et perficienda

*** 1631 erschien postum HARRIOTS *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas* – »Der analytischen Kunst Handlungsweise zum Lösen algebraischer Gleichungen«.

**** DESCARTES verwendete vor 1637 verschiedene Schreibweisen für die Potenzen, darunter auch die der deutschen Cossisten. In seinen um 1628 entstandenen *Regulae ad directionem ingenii* – »Regeln zur Anleitung des Geistes« – (erschienen 1701) benützt er aber schon $2a^3$ und $\sqrt{}.\,a^2 + b^2$. – die beiden Punkte klammern den Radikanden.

»Denn so wie Algebraiker für *aa*, *aaa*, usw. a^2, a^3 zu schreiben pflegen, so [...], und für $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$ schreibe ich a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}.«

In NEWTONS *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* erscheinen sie dann 1687 im Druck. Dort verwendet er auch **allgemeine Exponenten**, wenn er Ausdrücke wie A^{n-3} bzw. A^{-n} bildet. Vor ihm gebrauchte sie nur DESCARTES einmal (als Symbol a^{-n} im Jahre 1638 [gedruckt erst 1701]) und dann noch WALLIS 1657 in seiner *Mathesis universalis*, wo er $AR^m \times AR^n = A^2R^{m+n}$ schreibt. Aber erst 1706 erscheint die Formel $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ in der *Synopsis Palmariorum Matheseos* – »Abriß der Grundlagen der Mathematik« – von William JONES (1675–1749)*.

Variable als Exponenten werden schließlich 1679 zugelassen: LEIBNIZ diskutiert in seinem Brief an Christian HUYGENS (1629–1695) vom 8.9.1679 die Gleichung $x^x - x = 24$ mit der Lösung $x = 3$, ferner Gleichungen der Form $x^z + z^x = b$ und $x^x + z^z = c$. Dabei können die Exponenten auch rationale und irrationale Werte annehmen. Was man unter Potenzen mit solchen Exponenten zu verstehen hat, wirst du im nächsten Kapitel erfahren.

* Dort wird auch zum erstenmal der Buchstabe π für die LUDOLPHsche Zahl verwendet, die das Verhältnis Kreisumfang zu Kreisdurchmesser angibt.