Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

Zum Namen »Parabel«

**Zum Namen »Parabel«

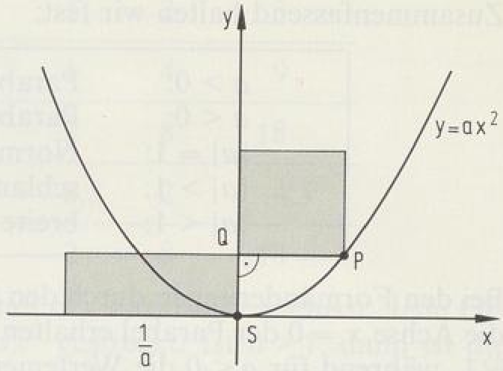

Abb. 168.1 $\overline{PQ}^2 = \frac{1}{a} \cdot \overline{SQ}$

Wie auf Seite 145 angemerkt, geht das Fachwort *Parabel* auf Apollonios von Perge (um 262–um 190 v. Chr.) zurück. Er beweist in Buch I,11 seiner acht Bücher über die Kegelschnitte – I bis IV sind auf griechisch, V bis VII auf arabisch überliefert, VIII ist verloren – folgende interessante Eigenschaft, die bereits Menaichmos (Mitte 4. Jh. v. Chr.) und Archimedes (um 287–212 v. Chr.) bekannt war (siehe dazu Abbildung 168.1):
Das von einem beliebigen Punkt P der Parabel $y = ax^2$ auf die Parabelachse gefällte Lot schneidet auf dieser eine Strecke [SQ] ab, sodass das Quadrat über dem Lot flächengleich einem Rechteck ist, dessen eine Seite dieser Achsenabschnitt [SQ] ist und dessen andere Seite die Länge $\frac{1}{a}$ hat, d.h., daß stets $\overline{PQ}^2 = \frac{1}{a} \cdot \overline{SQ}$ gilt. (Vgl. Aufgabe 169/**5.**)
Wegen dieses Gleichseins (= παραβολή [parabolē]) der beiden Flächeninhalte gab Apollonios der Kurve $y = ax^2$ den Namen παραβολή, der zu *parabola* latinisiert und als *Parabel* eingedeutscht wurde.

Aufgaben

1. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem die Graphen von $y = x^2$, $y = 4x^2$ und $y = \frac{1}{4}x^2$.

2. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem die Normalparabel $y = x^2$ und die Graphen von $y = -3x^2$, $y = -0{,}1x^2$ und $y = \frac{3}{5}x^2$.

3. Ermittle zeichnerisch die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden und prüfe die Ergebnisse durch Rechnung.

a) $y = x^2$; $y = 1$ **b)** $y = -\frac{1}{3}x^2$; $y = -3$
c) $y = 4x^2$; $y = x + 1$ **d)** $y = -3x^2$; $y = -6x + 3$

4. Lässt man eine Parabel um ihre Achse rotieren, so überstreicht sie eine Fläche, die man als *Paraboloid* bezeichnet. Solche Flächen werden in der Physik und Technik z. B. bei Hohlspiegeln verwendet. Ein derartiger Parabolspiegel zeigt folgende Eigenschaft: Alle parallel zur Symmetrieachse einfallenden Lichtstrahlen werden in einem Achsenpunkt, dem so genannten **Brennpunkt**, vereinigt. Seine Entfernung vom Scheitel heißt **Brennweite**. Hat ein Achsenschnitt des Spiegels (bei passender Wahl des Koordina-

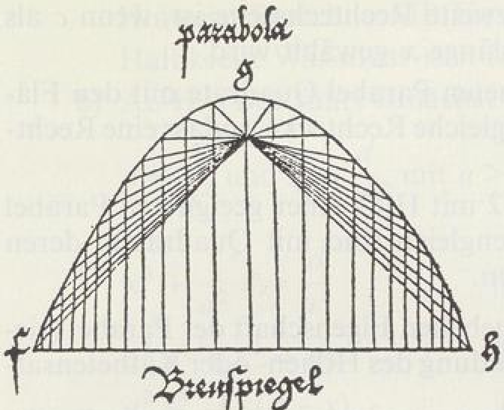

Abb. 169.1 Der parabolische Brennspiegel aus Albrecht DÜRERS (1471–1528) *Underweysung der messung mit dem zirckel vnd richtscheyt in Linien ebnen vnnd gantzen corporen*, Nürnberg 1525

tensystems) die Gleichung $y = ax^2$, so ist $F\left(0 \middle| \frac{1}{4a}\right)$ der Brennpunkt.*

a) Wie groß ist die Brennweite eines Parabolspiegels, dessen Achsenschnitt der Graph von $y = \frac{1}{12}x^2$, $-6 \leqq x \leqq 6$, ist (Längeneinheit 1 cm)?

b) Zeichne den Achsenschnitt eines Parabolspiegels von 2 cm Brennweite und 8 cm Durchmesser. (Der Scheitel sei der Ursprung, die Spiegelachse die y-Achse des Koordinatensystems.)
Im Brennpunkt befinde sich eine Lichtquelle. Zeichne den Verlauf der reflektierten Lichtstrahlen.

5. a) Beweise die von APOLLONIOS angegebene Eigenschaft der Parabel (siehe Seite 168).

b) In Aufgabe 110/**25** behandelten wir das Problem der Flächenanlegung. Zeige, dass für den einfachsten Fall, nämlich an eine gegebene Strecke der Länge b ein Rechteck so anzulegen, dass sein Flächeninhalt einen vorgegebenen Wert c hat, die Parabel $y = \frac{1}{b}x^2$ gute Dienste tut. Weise

* Der Brennpunkt einer Parabel wird bei APOLLONIOS in den *Konika* nirgends erwähnt, die Brennpunkte von Hyperbel und Ellipse jedoch schon. Möglicherweise könnte er ihn in seiner verloren gegangenen Schrift *Περὶ τοῦ πυρίου* (peri tu pyriu) – »Über den Brennspiegel« – behandelt haben. Die uns bekannte früheste Erwähnung dieses Punktes erfolgt bei PAPPOS (um 300 n. Chr.), ohne dass er ihm einen Namen gibt. Es lässt sich jedoch nicht belegen, ob die oben angegebene optische Eigenschaft dieses Punkts dem Altertum bekannt war; denn auch die Schrift *Περὶ πυρείων* (peri pyreion) des DIOKLES (um 100 n. Chr.), die angeblich parabolische Brennspiegel behandelt haben soll, ist verloren gegangen. Der gar ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) zugeschriebene Bau von Brennspiegeln, mit denen er bei der Verteidigung von Syrakus 212 v. Chr. die römische Flotte aus größerer Entfernung in Brand gesetzt habe, beruht auf einer etwa drei Jahrhunderte später entstandenen Legende. Erstmals lesen wir von der optischen Eigenschaft des Brennpunktes bei ANTHEMIOS von Tralleis († 534), der bei der Erbauung der berühmten Hagia Sophia Konstantinopels tätig war. Das Abendland erhält von der Eigenschaft dieses Punktes erst Kenntnis durch die GERHARD VON CREMONA (1114–1187) zugeschriebene Übersetzung *liber de speculis comburentibus*, der *Abhandlung über die Brennspiegel nach Kegelschnitten* des großen Physikers und Mathematikers IBN AL-HAITAM, genannt ALHAZEN (um 965–1039), der sich bei seinen Untersuchungen auf griechische Quellen stützte. Johannes KEPLER (1571–1630) gibt schließlich 1604 diesem Punkt den lateinischen Namen **focus** (= Feuerstätte, Opferherd). Die Eindeutschung **Brennpunkt** fand durch das *Mathematische Lexicon* (1716) des Christian VON WOLFF (1679–1754) Verbreitung.

dazu nach, dass y die gesuchte zweite Rechtecksseite ist, wenn c als Inhalt eines Quadrats der Seitenlänge x gewählt wird.

c) Verwandle mit Hilfe einer geeigneten Parabel Quadrate mit den Flächeninhalten 1; 4; 9; 16 in flächengleiche Rechtecke, sodass eine Rechtecksseite stets die Länge 4 hat.

d) Lege an eine Strecke der Länge 2 mit Hilfe einer geeigneten Parabel Rechtecke so an, dass sie flächengleich sind mit Quadraten, deren Seiten die Längen $\frac{3}{2}$ bzw. 4 haben.

6. Mit Hilfe der von APOLLONIOS angegebenen Eigenschaft der Parabel (siehe Seite 168) kann diese unter Verwendung des Höhen- oder Kathetensatzes punktweise konstruiert werden, da $y = ax^2$ mit $x^2 = \frac{1}{a} y$ äquivalent ist (Abbildung 170.1). Konstruiere folgende Parabeln punktweise:
a) $y = 2x^2$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **c)** $y = 4x^2$ **d)** $y = \frac{1}{4}x^2$

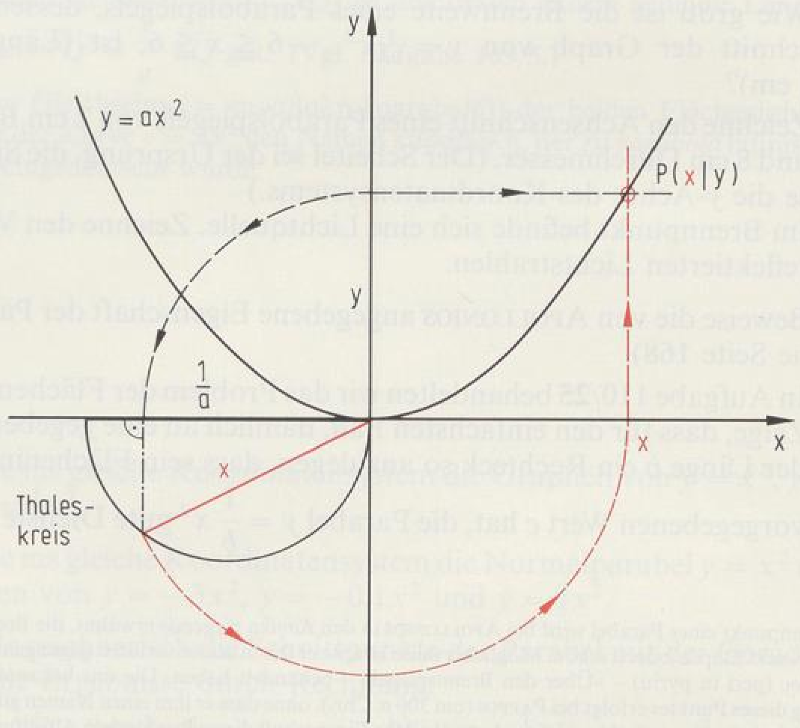

Abb. 170.1 Punktweise Konstruktion der Parabel $y = ax^2$ mit Hilfe des Kathetensatzes $x^2 = \frac{1}{a} y$

7. Wie Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) die kubische Gleichung $x^3 + px = q$ für positive p und q geometrisch löste:

a) *Vorübung:* Zeige, dass der im 1. Quadranten gelegene Halbkreis mit dem Mittelpunkt $M(r|0)$ und dem Radius r die Gleichung $y = \sqrt{x(2r - x)}$ hat.

Hinweis: Berechne $\overline{MP}$ für einen beliebigen Punkt $P(x|y)$ auf dem Halbkreis. Was muss sich für $\overline{MP}$ ergeben?

b) AL-HAYYAM führt zunächst neue Koeffizienten ein; er setzt

$p =: \dfrac{1}{a^2}$ und $q =: \dfrac{d}{a^2}$, mit $a > 0$, und erhält die Gleichung

$$x^3 + \frac{1}{a^2}x = \frac{d}{a^2} \qquad \| \cdot a^2 x \quad \text{mit} \quad x \neq 0$$

$$a^2 x^4 + x^2 = dx \qquad \| - x^2$$

$$a^2 x^4 = x(d - x) \qquad \| \sqrt{}$$

$$ax^2 = \sqrt{x(d-x)}$$

Links steht der Funktionsterm der Parabel $y = ax^2$, rechts der Funktionsterm des Halbkreises $y = \sqrt{x(d-x)}$ um $M(\frac{1}{2}d|0)$ mit Durchmesser d. Die Abszisse des von $(0|0)$ verschiedenen Schnittpunkts dieser beiden Graphen löst also die letzte Gleichung und damit die kubische Gleichung $x^3 + px = q$ (Abbildung 171.1). Die Größen $\dfrac{1}{a}$ und d erhält man aus p und q mittels des Höhen- oder Kathetensatzes: $y = ax^2$ lässt sich nach Aufgabe **6** punktweise konstruieren. Löse nach diesem Verfahren nach geeigneter Wahl der Einheit

1) $x^3 + 6x = 20$, **2)** $x^3 + 3x = 4$, **3)** $4x^3 + 7x = 24$.

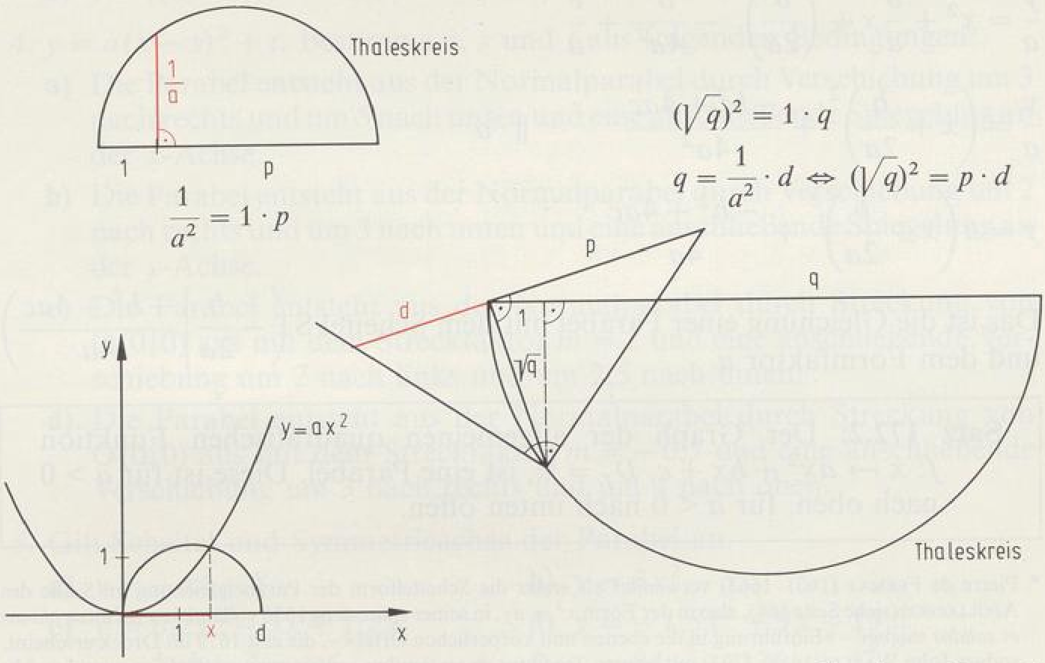

Abb. 171.1 Geometrische Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + 4x = 10$ nach Omar AL-HAYYAM