Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

5.3 Die allgemeine verschobene Parabel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

5.3 Die allgemeine verschobene Parabel

Gegeben sei eine Parabel mit dem Scheitel $S(s|t)$, deren Form durch den Formfaktor a festgelegt ist. Zur Bestimmung ihrer Gleichung gehen wir von der Normalparabel $y = x^2$ aus und strecken sie mit dem Faktor a zur Parabel $y = ax^2$. Eine Verschiebung dieser Parabel um s in x-Richtung erreichen wir, wenn wir x durch $x - s$ ersetzen; das ergibt die Parabel $y = a(x-s)^2$. Schließlich verschieben wir diese Parabel um t in y-Richtung und erhalten $y = a(x-s)^2 + t$. Dieses Ergebnis fassen wir zusammen zum

Satz 172.1: Eine Parabel mit dem Scheitel $S(s|t)$ und dem Formfaktor $a \neq 0$, deren Achse parallel zur y-Achse ist, hat die Gleichung $y = a(x-s)^2 + t$.
Diese Gleichung heißt **Scheitelform** der Parabelgleichung.*

Jetzt können wir zeigen, dass der Graph einer allgemeinen quadratischen Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$ eine Parabel ist. Dazu bringen wir die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ auf die Scheitelform einer Parabelgleichung. Als Hilfsmittel verwenden wir die quadratische Ergänzung.

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \| : a$$

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \qquad \| \text{ quadratische Ergänzung}$$

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$\frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \qquad \| \cdot a$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Das ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel $S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ und dem Formfaktor a.

Satz 172.2: Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion $f\colon x \mapsto ax^2 + bx + c$, $D_f = \mathbb{R}$, ist eine Parabel. Diese ist für $a > 0$ nach oben, für $a < 0$ nach unten offen.

* Pierre de FERMAT (1601–1665) verwendet als erster die Scheitelform der Parabelgleichung im Sinne des APOLLONIOS (siehe Seite 168), also in der Form $x^2 = ay$, in seiner spätestens 1636 vollendeten *Ad locos planos et solidos isagoge* – »Einführung in die ebenen und körperlichen Örter« –, die erst 1679 im Druck erscheint, sodass John WALLIS (1616–1703) mit seinem *Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis* – »Abhandlung über die nach einer neuen Methode dargestellten Kegelschnitte« – von 1655 der Ruhm der Erstveröffentlichung zusteht.

Aus der obigen Rechnung folgt weiter

> **Satz 173.1:** Die allgemeine quadratische Funktion $f\colon x \mapsto ax^2 + bx + c$, $D_f = \mathbb{R}$, hat für $a > 0$ die Wertemenge $W_f = [t; +\infty[$, für $a < 0$ die Wertemenge $W_f =]-\infty; t]$, wobei t die Scheitelordinate $\dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ des Graphen G_f von f ist. G_f hat die Symmetrieachse $x = s$, wobei s die Scheitelabszisse $-\dfrac{b}{2a}$ ist.

Aufgaben

1. Bestimme Scheitel und Symmetrieachse und zeichne die Parabel.

a) $y = -(x-1)^2 + 3$ **b)** $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 4$

c) $y = 2(x-2{,}5)^2 + 2{,}5$ **d)** $y = -0{,}25(x+2)^2 + 1$

2. Bestimme a und t so, dass die zugehörige Parabel $y = ax^2 + t$

a) $S(?|4)$ als Scheitel hat und durch den Punkt $P(3|-2)$ läuft;

b) ihren Scheitel auf der Gerade $y = 0{,}5x - 4$ hat und die x-Achse bei $x = 4$ schneidet;

c) die Geraden $x = 2$ und $x = -3$ in den Punkten mit den Ordinaten $-0{,}4$ bzw. $2{,}6$ schneidet.

3. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:

a) $y = |(x-2{,}5)^2 - 6{,}25|$ **b)** $y = |-0{,}5(x+1)^2 + 1|$.

4. $y = a(x-s)^2 + t$. Bestimme a, s und t aus folgenden Bedingungen:

a) Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um 3 nach rechts und um 5 nach unten und eine anschließende Spiegelung an der x-Achse.

b) Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um 2 nach rechts und um 3 nach unten und eine anschließende Spiegelung an der y-Achse.

c) Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Streckung von $O(0|0)$ aus mit dem Streckfaktor $m = 2$ und eine anschließende Verschiebung um 2 nach links und um 2,5 nach unten.

d) Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch Streckung von $O(0|0)$ aus mit dem Streckfaktor $m = -0{,}5$ und eine anschließende Verschiebung um 3 nach rechts und um 4 nach oben.

5. Gib Scheitel und Symmetrieachse der Parabel an.

a) $y = -x^2 - 8$ **b)** $y = 3x^2 - x$

c) $y = 0{,}2x^2 - 3x + 1{,}25$ **d)** $y = -1{,}5x^2 + 9x - 13{,}5$

e) $y = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{10}x - 6$ **f)** $y = 84x^2 - 126x + 47$

g) $y = x^2 + \sqrt{5}x - 1$ **h)** $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x^2 + 3x + 4$

6. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:

a) $y = x^2 - 4x + 1$ **b)** $y = -x^2 - 7x - 11{,}25$
c) $y = x^2 - 2{,}4x - 3{,}56$ **d)** $y = -x^2 + x + 3{,}25$
e) $y = 3x^2 + 24x - 47$ **f)** $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + \frac{15}{2}$
g) $y = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2{,}075$ **h)** $y = 0{,}25x^2 + 1{,}4x + 1{,}96$

8. Zeichne den Graphen zur Funktionsgleichung:

a) $y = |x^2 + 4x|$ **b)** $y = |-x^2 + 2x|$
c) $y = |-x^2 + 6x - 6|$ **d)** $y = |-0{,}5x^2 + 1{,}5x - 1{,}625|$

9. Bestimme die Funktionsgleichung einer Parabel, die durch die Punkte A, B und C läuft.

a) A(−1|9), B(1|1), C(4|4) **b)** A(0|2), B(2|−2), C(−2|0)
c) A(0|6), B(−2|4), C(3|1,5) **d)** A(−1|2), B(1|−6), C(2,5|9)

10. Eine Parabel mit dem Scheitel S enthält den Punkt P. Bestimme die Funktionsgleichung.

a) S(3|−1), P(1|1) **b)** S(0,4|0,8), P(2|−12)
c) S(0|−8), P(10|2) **d)** S(−2|9), P(−7|1)

11. Eine Parabel mit der Symmetrieachse $x = s$ enthält die Punkte P und Q. Bestimme die Funktionsgleichung.

a) $s = 4$, P(1|−9,5), Q(5|−1,5) **b)** $s = -5$, P(−7|−1), Q(−2|3)

•**12.** Die Parabel $y = 2x^2 - 6x + 4$ wird

a) an der x-Achse **b)** an der y-Achse
c) am Ursprung (0|0) **d)** an der Geraden $x = 1$
e) an der Geraden $y = 1$ **f)** an der Geraden $y = x$

gespiegelt. Gib die Gleichung der gespiegelten Parabel an.

•**13.** Zeichne den Graphen.

a) $y = 2x^2 - |6x + 4|$ **b)** $y = 2x^2 - 6|x| + 4$
c) $y = |2x^2 - 6x| + 4$ **d)** $|y| = 2x^2 - 6x + 4$

Die Wurfparabel. Bis in die Neuzeit hinein beherrschten die Vorstellungen des griechischen Philosophen ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) die Lehre von der Bewegung der Körper, denen zufolge die Bahn eines geworfenen Körpers sich

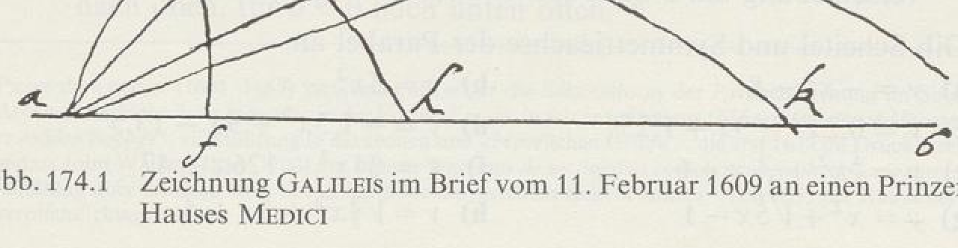

Abb. 174.1 Zeichnung GALILEIS im Brief vom 11. Februar 1609 an einen Prinzen des Hauses MEDICI

aus Geraden- und Kreisstücken zusammensetzt. Erst Galileo GALILEI (1564–1642) hat spätestens 1609 erkannt, dass diese Bahn, falls man den Luftwiderstand vernachlässigen darf, eine Parabel, die so genannte Wurfparabel, ist (siehe Abbildung 174.1). Veröffentlicht hat diese Erkenntnis 1632 sein Schüler Fra Bonaventura CAVALIERI (1598?–1647) in seinem Werk *Lo Specchio Ustorio overo Trattato delle Settioni Coniche* – »Der Brennspiegel oder Abhandlung über die Kegelschnitte« –, worüber sein Meister sich wenig erfreut zeigte. GALILEI selbst bringt den Nachweis unter Verwendung seines lateinischen Textes aus jenen frühen Jahren am »3. Tag« seiner *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali* – »Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend« –, die 1638 in Leiden erschienen.

Abb. 175.1 Galileo GALILEI (15.12. 1564 Pisa – 8.1.1642 Arcetri/Florenz) – Kupferstich von Ottavio LEONI (um 1587–1630)

14. Der aus dem waagrecht gehaltenen Ende eines Wasserschlauchs austretende Strahl beschreibt bei Vernachlässigung des Luftwiderstands einen Parabelbogen, dessen Achse zum Erdmittelpunkt gerichtet ist. Zeichne in ein geeignetes Koordinatensystem die Bahn eines Wasserstrahls, der 1,5 m über dem Boden waagrecht ausströmt und in einer (horizontal gemessenen) Entfernung von 5 m den Boden erreicht. Der Erdboden ist dabei als waagrechte Ebene angenommen.

15. Ein Stein, der von einem Punkt P aus schräg nach oben geworfen wird, fliegt bei Vernachlässigung des Luftwiderstands auf einem Parabelbogen, dessen Achse durch den Erdmittelpunkt geht.

a) Zeichne in ein geeignetes Koordinatensystem die Wurfbahn für den Fall, dass sich P 1,8 m über dem Boden befindet und der Stein nach 4 m bzw. 8 m waagrechter Verschiebung eine Höhe von 4,2 m bzw. 5 m über dem Boden erreicht hat. Der Boden sei waagrecht und eben.

b) Welche größte Höhe über dem Boden erreicht der Stein?

c) In welcher Entfernung (waagrecht gemessen) von der Abwurfstelle schlägt der Stein auf dem Boden auf?