# Algebra

**Barth, Friedrich**

**München, 2001**

5.4.3 Parabel und Parabel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

Zeige: Für $3 < a \leqq 4$ sind $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a} - \sqrt{1 - \frac{2}{a} - \frac{3}{a^2}}\right)$ und $x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a} + \sqrt{1 - \frac{2}{a} - \frac{3}{a^2}}\right)$ Zahlen mit der Periode 2, und es gilt $f(x_1) = x_2$ und $f(x_2) = x_1$.

e) Definiert man analog $x^{(k)}$ als Zahl mit der Periode $k$ für $k > 2$ und trägt diese Zahlen $x^{(k)}$ gegen den Parameter $a$ ab, dann ergibt sich nach längeren Rechnungen (Computer!) ein Diagramm, das man auch Feigenbaumdiagramm oder Bifurkationsdiagramm nennt. Es entstehen der Reihe nach Punkte der Perioden 2, 4, 8, …, bis auf einmal das Chaos ausbricht und die Folgen keine Gesetzmäßigkeit mehr erkennen lassen.

### **5.4.3 Parabel und Parabel

Die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Parabeln ergeben sich als Lösungen des Gleichungssystems

I $y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$
II $y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$.

Auch hier kann es zwei, eine oder keine Lösung geben, wie Abbildung 183.1 überblicksartig veranschaulicht. Zum Fall der sich berührenden Parabeln lösen wir folgende

**Aufgabe:** Um wie viel muss die Normalparabel in $y$-Richtung verschoben werden, damit sie die Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ berührt?

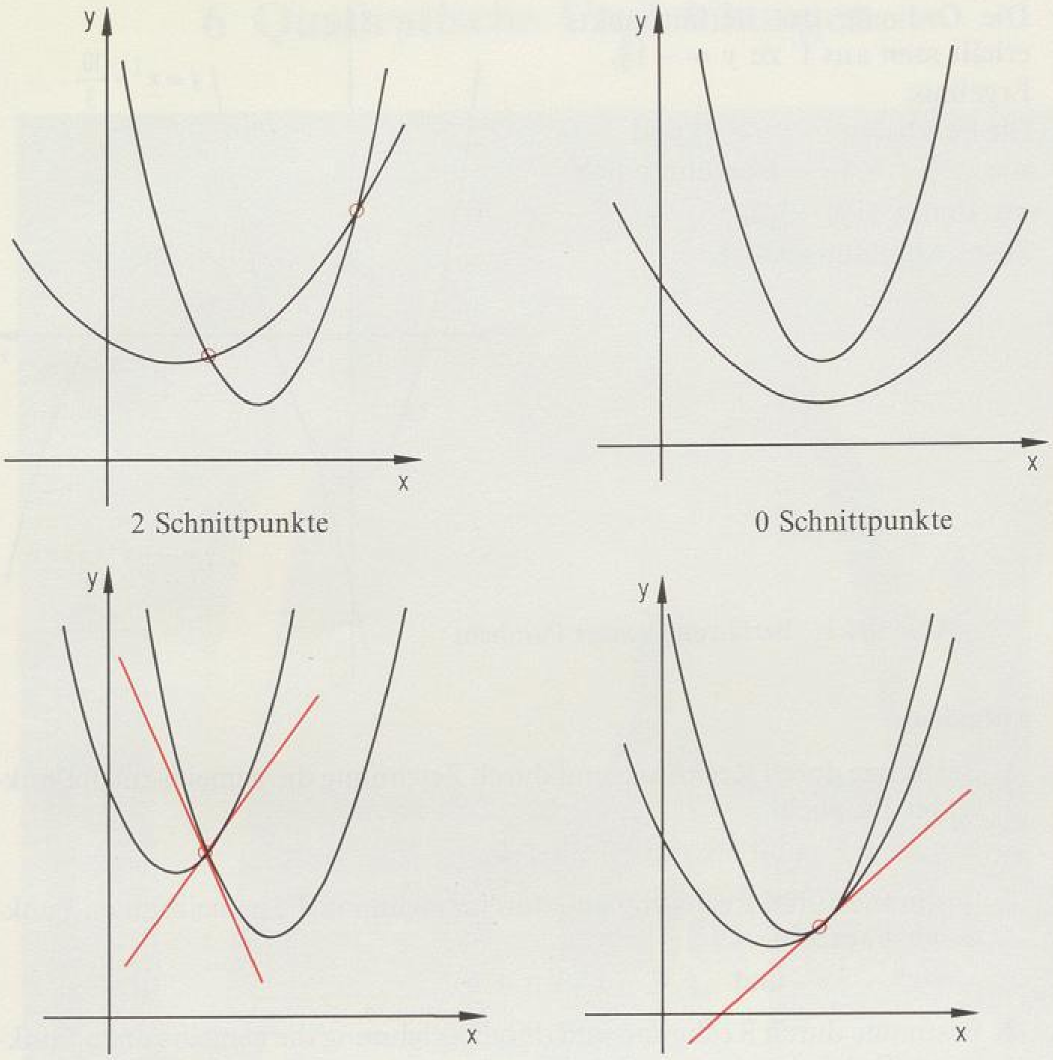
*Lösung:*

I $y = x^2 + t$ verschobene Normalparabel
II $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

I′ $y = x^2 + t$
II′ $\frac{3}{2}x^2 - 4x + 6 + t = 0$

Damit sich die beiden Parabeln berühren, darf Gleichung II′ nur eine einzige Lösung haben; ihre Diskriminante muss also null sein:

$16 - 4 \cdot \frac{3}{2}(6 + t) = 0$
$16 - 36 - 6t = 0$
$t = -3\frac{1}{3}$.




2 Schnittpunkte 0 Schnittpunkte

1 Schnittpunkt mit
verschiedenen Tangenten gemeinsamer Tangente

Abb. 183.1 Mögliche Schnittmengen von Parabeln

Die Normalparabel muss somit um $3\frac{1}{3}$ nach unten verschoben werden. Sie berührt dann die andere Parabel in dem Punkt, dessen Abszisse sich aus der letzten Gleichung II′ ergibt, wenn man dort $t = -3\frac{1}{3}$ setzt:

$\frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{8}{3} = 0$

$9x^2 - 24x + 16 = 0$

$(3x-4)^2 = 0$

$x = \frac{4}{3}.$

Die Ordinate des Berührpunkts erhält man aus I′ zu $y = -1\frac{5}{9}$.
Ergebnis:
Die Parabeln $y = x^2 - 3\frac{1}{3}$ und $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ berühren sich im Punkt $(1\frac{1}{3}|-1\frac{5}{9})$.
Siehe Abbildung 184.1.

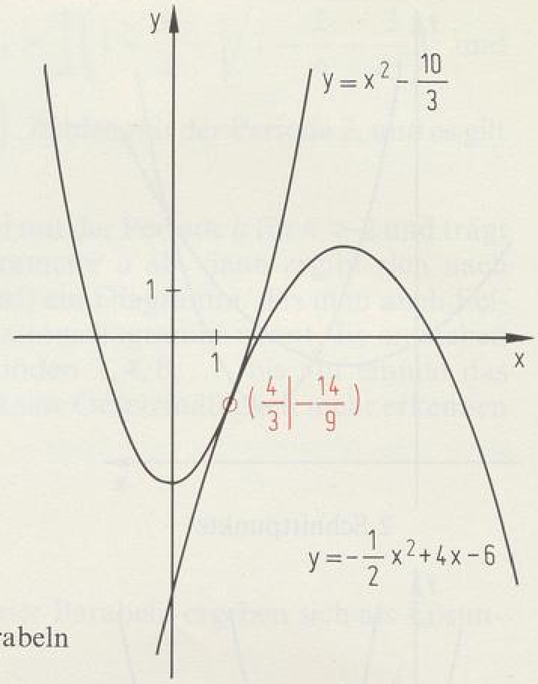



Abb. 184.1 Berührung zweier Parabeln

**Aufgaben**

**1.** Bestimme durch Rechnung und durch Zeichnung die gemeinsamen Punkte der Parabeln
$y = x^2 + 2$ und $y = x^2 - 2x + 5$.

**2.** Bestimme durch Rechnung und durch Zeichnung die gemeinsamen Punkte der Parabeln
$y = x^2 - 3x$ und $y = -x^2 + x + 6$.

**3.** Bestimme durch Rechnung und durch Zeichnung die gemeinsamen Punkte der Parabeln
$y = -x^2 + 4$ und $y = x^2 - 4x + 6$.

**4.** Bestimme durch Rechnung und durch Zeichnung die gemeinsamen Punkte der Parabeln
$y = x^2 + 4x - 1$ und $y = 2x^2 + x + 3$.

•**5.** Zeige: Zwei Parabeln $y = ax^2 + bx + c$ und $y = Ax^2 + Bx + C$, die genau einen Schnittpunkt haben, der kein Berührpunkt ist, sind kongruent.

**6.** A(0|6), B(4,5|1,5), C(6|5), S(5,5|2,5)

**a)** Bestimme eine Gleichung der Parabel $p$ durch A, B und C. Zeichne die Parabel $p$.

**b)** Gib eine Gleichung der Parabel $q$ an, die nach unten geöffnet ist, den Scheitel S hat und kongruent zur Normalparabel ist. Zeichne die Parabel $q$.

**c)** Berechne die Schnittpunkte der beiden Parabeln.