Algebra

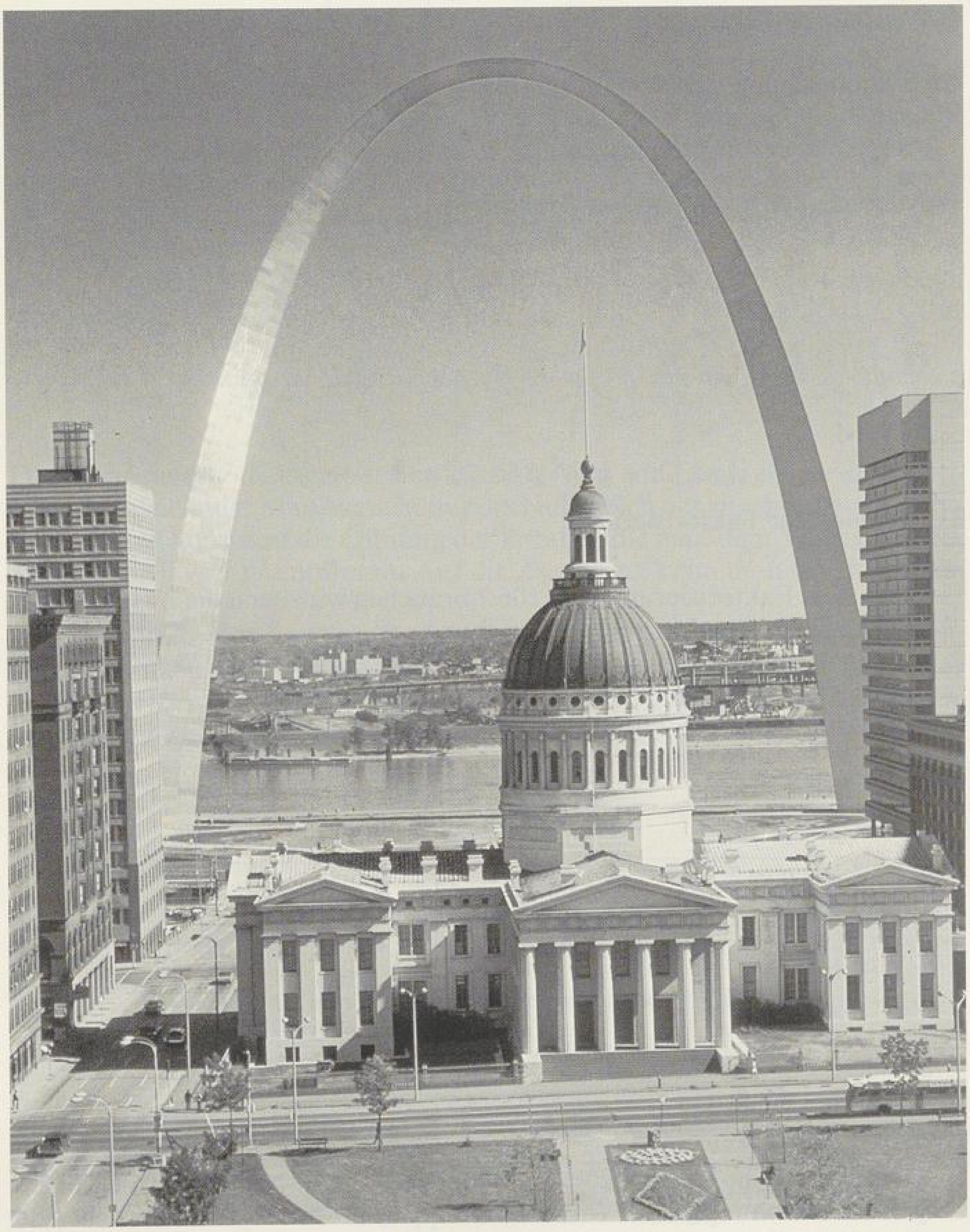
Barth, Friedrich

München, 2001

6 Quadratische Ungleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

6 Quadratische Ungleichungen



Gateway Arch in Saint Louis, Missouri, USA
Der 192 m hohe, in den Jahren 1959 bis 1965 aus rostfreiem Stahl und Beton nach einem Entwurf des Finnen Eero SAARINEN (1910–1961) errichtete Bogen erinnert als Gateway to the West an den nach 1803 einsetzenden Siedlerstrom in den Westen der USA und damit an die Bedeutung, die Saint Louis im 19. Jh. hatte.

6 Quadratische Ungleichungen

6.1 Lösungsverfahren

Eine Ungleichung der Form $ax^2 + bx + c > 0$ mit $a \neq 0$ heißt quadratische Ungleichung. So ist z. B. $x^2 - x - 2 > 0$ eine quadratische Ungleichung. Zur Lösung solcher Ungleichungen gibt es verschiedene Verfahren:

1) Methode der quadratischen Ergänzung

$x^2 - x - 2 > 0$

$x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 > 2 + \frac{1}{4}$

$(x - \frac{1}{2})^2 > \frac{9}{4}$

$|x - \frac{1}{2}| > \frac{3}{2}$

$x - \frac{1}{2} < -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x - \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$

$x < -1 \quad \vee \quad x > 2$

$L =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

2) Methode der Faktorisierung

$x^2 - x - 2 > 0$

Nach dem Faktorisierungssatz 106.1 brauchen wir zuerst die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$. Wir erhalten $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Damit wird die Ungleichung zur Produktungleichung $(x+1)(x-2) > 0$, die man graphisch lösen kann.
Aus Abbildung 186.1 liest man ab: $L =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

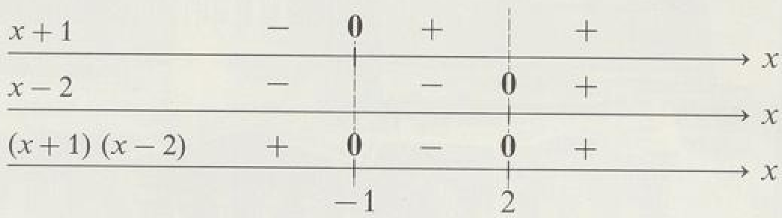


Abb. 186.1 Vorzeichenverteilung beim Term $(x+1)(x-2)$

3) Parabelmethode

$x^2 - x - 2 > 0$

Wir zeichnen die Parabel $y = x^2 - x - 2$. Sie hat als Nullstellen die Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$, d. h. $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Gesucht sind die x-Koordinaten der Parabelpunkte, für die $y > 0$ gilt. Das sind die Parabelpunkte, die oberhalb der x-Achse liegen. Weil die Parabel nach oben offen ist, sind, wie Abbildung 187.1 zeigt, die y-Koordinaten positiv, wenn $x < -1$ bzw. $x > 2$ gilt. Also lesen wir die Lösungsmenge ab:
$L =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

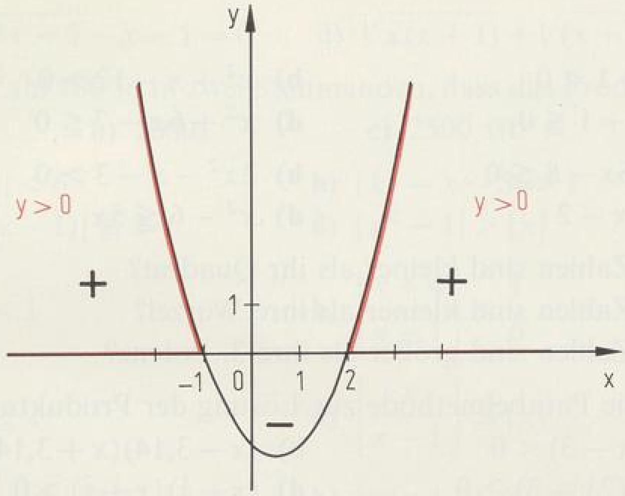


Abb. 187. Lösung der Ungleichung $x^2 - x - 2 > 0$ mit der Parabelmethode

Die Parabelmethode ist meist der kürzeste Weg zur Lösung einer quadratischen Ungleichung. Man braucht nur die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Gleichung und die Öffnung der Parabel, die man dem Vorzeichen des Koeffizienten von x^2 entnimmt. Auf die Zeichnung kann man sogar verzichten.

Bei den Verfahren **2** und **3** haben wir angenommen, dass es Nullstellen gibt. Wenn das nicht der Fall ist, dann liegt die Parabel entweder ganz über oder ganz unter der x-Achse. Je nach der Art des Ungleichheitszeichens ist die Lösungsmenge dann leer oder ganz $\mathbb{R}$, wie Abbildung 187.2 veranschaulicht.

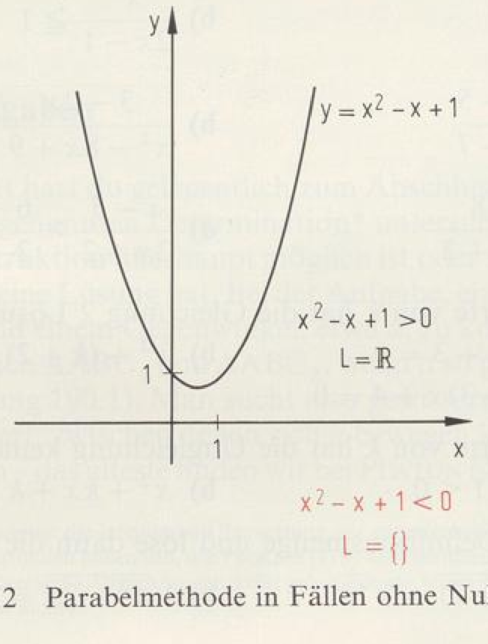


Abb. 187.2 Parabelmethode in Fällen ohne Nullstellen

Aufgaben

1. a) $x^2 - x + 1 < 0$ **b)** $x^2 + x - 12 > 0$
c) $x^2 - 2x + 1 \leqq 0$ **d)** $x^2 + 6x - 7 \leqq 0$

2. a) $-x^2 + 6x - 8 \leqq 0$ **b)** $2x^2 - x - 3 > 0$
c) $4x^2 \leqq 5x - 2$ **d)** $x^2 - 6 \leqq 5x$

3. a) Welche Zahlen sind kleiner als ihr Quadrat?
b) Welche Zahlen sind kleiner als ihre Wurzel?
c) Welche Zahlen sind größer als ihre 3. Potenz?

4. Verwende die Parabelmethode zur Lösung der Produktungleichung:
a) $(x-2)(x-3) < 0$ **b)** $(x - 3{,}14)(x + 3{,}14) > 0$
c) $(2x-1)(2x-3) \geqq 0$ **d)** $(x - \frac{1}{3})(x + \frac{2}{3}) > 0$

5. a) $(x-2)(x-3) < 4$ **b)** $x^2 - 3x < 8$
c) $x^2 < 4x - 1$ **d)** $-x^2 > x - 10$

6. a) $|x^2 + 5x| < 14$ **b)** $|13x - x^2| \leqq 30$

7. a) $0 < x^2 - 10 < x$ **b)** $x \leqq x^2 - 1 \leqq x - 1$

8. a) $\dfrac{10x}{x^2+4} \leqq -2$ **b)** $\dfrac{19}{x^2+1} < 1 + \dfrac{3x}{x^2+1}$

c) $\dfrac{7x}{-1-x^2} \geqq 3{,}5$ **d)** $\dfrac{2}{x^2} > \dfrac{1}{1+x^2}$

9. Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners:

a) $\dfrac{x-1}{x+3} < 0$ **b)** $\dfrac{x^2}{2x-1} \geqq 1$

10. a) $\dfrac{x-1}{x-3} < \dfrac{x-5}{x-7}$ **b)** $\dfrac{3-2x}{x^2-8x+9} \leqq 0$

c) $\dfrac{3}{2x+1} < \dfrac{8}{x+2}$ **d)** $\dfrac{x-3}{3x+2} > \dfrac{6-x}{2-x}$

11. Für welche Werte von k hat die Gleichung 2 Lösungen?
a) $x^2 - kx + k + 3 = 0$ **b)** $x^2 + (k+2)x + k + 5 = 0$
c) $kx^2 + 2(k-3)x + 4 = 0$

12. Für welche Werte von k hat die Ungleichung keine Lösung?
a) $kx^2 - 3x + 1 < 0$ **b)** $x^2 + kx + k \leqq 0$

13. Bestimme die Definitionsmenge und löse dann die Gleichung.
a) $\sqrt{(x-1)(x+2)} = \sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{10}$

c) $\sqrt{2x^2+3x-5}-x-1=0$ **d)** $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{(x+1)(x+3)}=3\sqrt{2}$

14. Zerlege die Zahl 100 so in zwei Summanden, dass das Produkt größer als
a) 2000, **b)** 1000, **c)** 2500 ist.

15. a) $|x(x+1)|<6$ **b)** $|x^2-x-5|>1$
c) $|(x-5)(x-1)|\geqq 2$ **d)** $|x^2-1|>|x|$

16. a) $\left|\frac{2x}{x-2}\right|<1$ **b)** $\left|\frac{x+4}{x-1}\right|<\frac{1}{6}$
c) $\left|\frac{x+4}{x-4}\right|\geqq 2$ **d)** $\left|\frac{x}{x-1}\right|\leqq |x|$

17. a) $|x-1|\leqq|x^2-1|$ **b)** $|x(x+1)|>|x^2+1|$

18. Für welche natürlichen Zahlen n gilt
a) $\sqrt{n}+n<100$ **b)** $0{,}1n-0{,}01\sqrt{n}+1\geqq 0$?

19. Kennzeichne die Punktmenge, bei der die Koordinaten der Punkte der angegebenen Ungleichung genügen.
a) $y<x^2$ **b)** $y\geqq x^2-2$
c) $y-2x^2+2>0$ **c)** $2y+4x^2-5x+1\leqq 0$

20. Kennzeichne die Punktmenge, bei der die Koordinaten der Punkte der angegebenen Ungleichung genügen.
a) $x^2<y<1-x^2$ **b)** $x^2-3x<y<-x^2+4x-5$
c) $0<y<-2x^2+9x-7$ **d)** $3x^2-2x<y<-2x+3$

6.2 Extremwertaufgaben

Im Geometrieunterricht hast du gelegentlich zum Abschluss einer Konstruktionsaufgabe in der so genannten Determination* untersucht, unter welchen Bedingungen die Konstruktion überhaupt möglich ist oder unter welchen Bedingungen sie mehr als eine Lösung hat. Bei der Aufgabe, ein Dreieck aus zwei Seiten, etwa a und c, und einem Gegenwinkel, etwa α, zu konstruieren, erhält man 2 Lösungen, nämlich ΔABC_1 und ΔABC_2, wenn a so gewählt wird, dass $h_a<a<c$ gilt (Abbildung 190.1). Man sucht also gewissermaßen den kleinsten und den größten Wert, zwischen denen sich a bewegen kann. Aus solchen Abgrenzungsproblemen – das älteste finden wir bei PLATON (428–348 v. Chr.) in

* determinatio (lat.) = *Abgrenzung* ist die lateinische Übersetzung des entsprechenden griechischen Fachbegriffs διορισμός (diorismós). Erfunden haben soll, wie PROKLOS (410–485) berichtet, diesen Diorismos LEON, ein Zeitgenosse PLATONS, der als erster »Abgrenzungen dafür geben konnte, wann die Lösung einer gestellten Aufgabe möglich ist und wann nicht«.

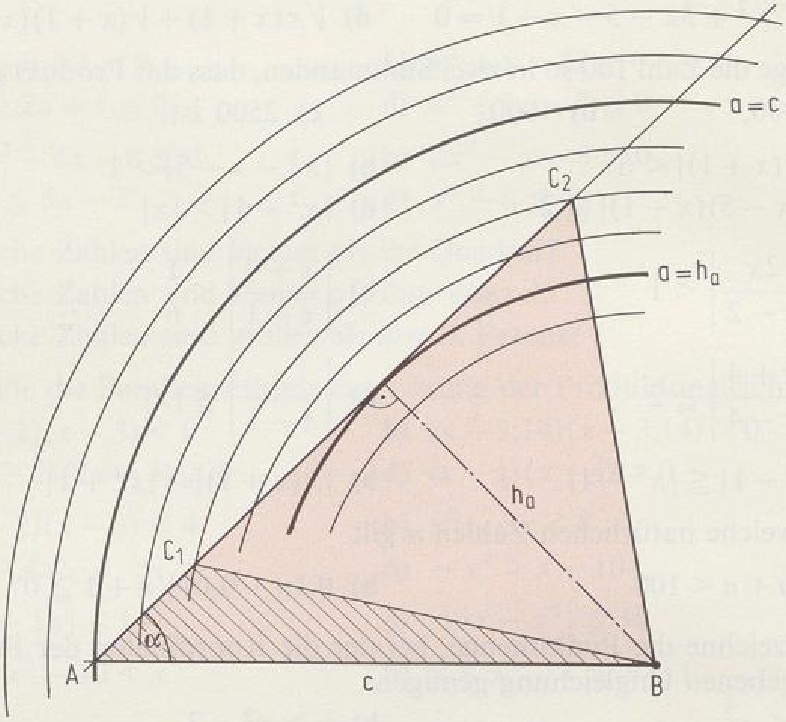


Abb. 190.1 Es gibt 2 Lösungen, wenn $h_a < a < c$

Menon (87a, b) –, sind die Extremwertaufgaben* entstanden, deren frühestes uns erhaltenes Beispiel von Euklid (um 300 v. Chr.) stammt (Aufgabe 195/**9**). Aber erst Apollonios (um 262– um 190 v. Chr.) erkannte, dass solche Extremwertaufgaben, losgelöst von den geometrischen Abgrenzungsproblemen,

> »zu den Sachen gehören, die an und für sich einer Betrachtung würdig erscheinen«,

wie er im Vorwort zu Buch V seiner *Konika* schreibt, in dem er auch solche »Sachen« angeht. Aber es vergingen mehr als 1800 Jahre, bis es dem Juristen und Mathematiker Pierre de Fermat (1601–1665) gegen 1629 gelang, in seinem *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* – »Methode zur Bestimmung eines Maximums und eines Minimums«** – ein allgemeines Verfahren zum Lösen solcher Extremwertaufgaben zu entwickeln. Das erste Beispiel, das er seinen Lesern darin vorführt, sei unser

Beispiel 1:

Eine gegebene Strecke [AC] soll durch einen Punkt E so geteilt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks, das man aus den beiden Teilen [AE] und [EC] bilden kann, maximal wird (Abbildung 190.2).

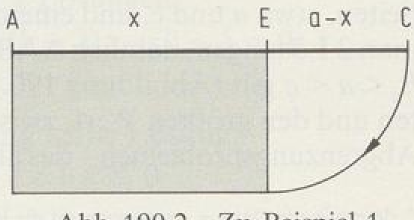


Abb. 190.2 Zu Beispiel 1

* extremus (lat.) = der äußerste

** maximus (lat.) = der größte; minimus (lat.) = der kleinste

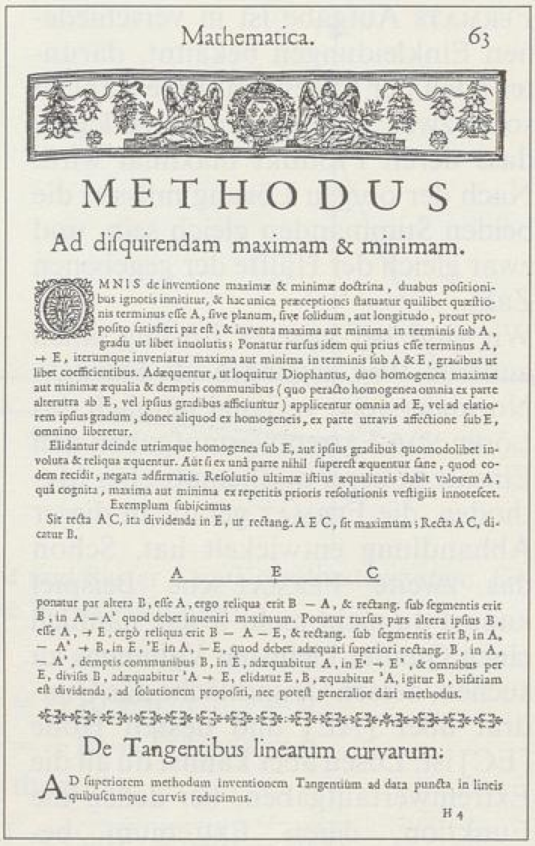
Lösung: Wir bezeichnen die Länge der Strecke [AC] mit a und die des Teilstücks [AE] mit x; dann hat [EC] die Länge $a - x$. Der Inhalt der Rechtecksfläche ergibt sich in Abhängigkeit von x zu $x(a-x)$. Gesucht ist nun der Wert von x, für den $x(a-x)$ maximal wird. Um ihn zu finden betrachten wir die Funktion

$$f : x \mapsto x(a-x), \quad D_f =]0; a[.$$

Formt man $f(x)$ um zu $f(x) = -x^2 + ax$, so erkennt man sofort, dass der Graph von f ein Parabelbogen ist, dessen Scheitel bei $\left(\frac{a}{2} \middle| \frac{a^2}{4}\right)$ liegt (Abbildung 191.2).

Weil die Parabel nach unten offen ist und die Scheitelabszisse $\frac{a}{2}$ in D_f liegt, ist die Scheitelordinate $\frac{a^2}{4}$ der größte Funktionswert von f.

Das gesuchte x hat also den Wert $\frac{a}{2}$, und der Teilpunkt E muss als Mittelpunkt der Strecke [AC] gewählt werden.



Mathematica. 63

METHODUS

Ad diſquirendam maximam & minimam.

OMNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina, duabus poſitionibus ignotis innititur, & hac unica præceptione ſtatuatur quilibet quæſtionis terminus eſſe A, ſive planum, ſive ſolidum, aut longitudo, prout propoſito ſatisfieri par eſt, & inventa maxima aut minima in terminis ſub A, gradu ut libet inuolutis; Ponatur rurſus idem qui prius eſſe terminus A, + E, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis ſub A & E, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra ab E, vel ipſius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elatiorem ipſius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis affectione ſub E, omnino liberetur.

Elidantur deinde utrimque homogenea ſub E, aut ipſius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquentur. Aut ſi ex unâ parte nihil ſupereſt æquentur ſane, quod eodem recidit, negata adfirmatis. Reſolutio ultimæ iſtius æqualitatis dabit valorem A, quâ cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris reſolutionis veſtigiis innoteſcet.

Exemplum ſubijcimus

Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang. A E C, ſit maximum; Recta A C, dicatur B.

A E C

ponatur par altera B, eſſe A, ergo reliqua erit B – A, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A – A^2 quod debet inueniri maximum. Ponatur rurſus pars altera ipſius B, eſſe A, + E, ergò reliqua erit B – A – E, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A, – A^2 + B, in E, ^{2}E in A, – E, quod debet adæquari ſuperiori rectang. B, in A, – A^2, demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E^2 + E^2, & omnibus per E, diviſis B, adæquabitur ^{2}A + E, elidatur E, B, æquabitur ^{2}A, igitur B, bifariam eſt dividenda, ad ſolutionem propoſiti, nec poteſt generalior dari methodus.

De Tangentibus linearum curvarum:

AD ſuperiorem methodum inventionem Tangentium ad data puncta in lineis quibuſcumque curvis reducimus.

H 4

Abb. 191.1 Erste Seite der erst 1679 in Toulouse im Sammelband *Varia Opera Mathematica* des Pierre de FERMAT erschienenen »Methode zur Bestimmung eines Maximums und eines Minimums«

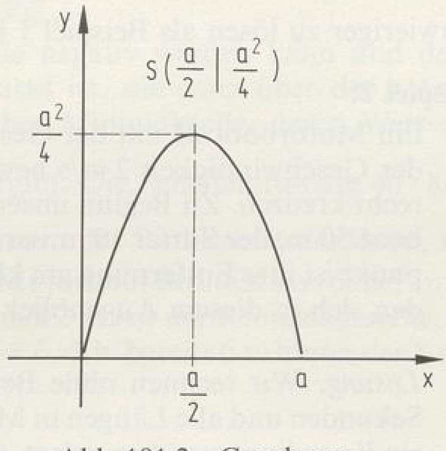


Abb. 191.2 Graph von $f: x \mapsto x(a-x)$, $D_f =]0; a[$

Fermats Aufgabe ist in verschiedenen Einkleidungen bekannt, darunter auch der folgenden: Eine Zahl ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass deren Produkt maximal wird. Nach der obigen Lösung müssen die beiden Summanden gleich sein, und zwar gleich der Hälfte der gegebenen Zahl.
Wir sind bei unserer Lösung einen anderen Weg gegangen als Fermat. Normalerweise verlangt nämlich das Lösen von Extremwertaufgaben den Einsatz höherer mathematischer Methoden, die Fermat gerade in dieser Abhandlung entwickelt hat. Schon das zweite Fermat'sche Beispiel kannst du nicht mehr lösen, nämlich einen Quader kleinsten Volumens zu suchen, dessen Grundfläche das Quadrat über [AE] und dessen Höhe [EC] ist. Lösen aber kannst du all die Extremwertaufgaben, bei denen die Funktion, deren Extremum bestimmt werden soll, quadratisch ist. Du brauchst dazu nur den Scheitel der zugehörigen Parabel zu berechnen; die Scheitelabszisse ist dann die gesuchte **Extremalstelle**, die Scheitelordinate ist das **Extremum** der Funktion. Ist die Parabel nach unten offen, dann ist die Extremalstelle eine **Maximalstelle** und das Extremum ein **Maximum**. Ist die Parabel nach oben geöffnet, dann handelt es sich um eine **Minimalstelle** und um ein **Minimum**.

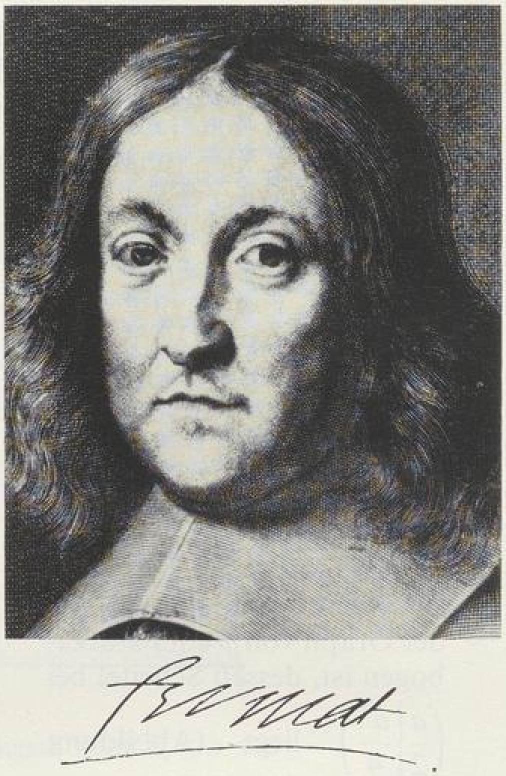


Abb. 192.1 Pierre de Fermat (17.(?)8.1601 Beaumont-de-Lomagne bis 12.1.1665 Castres)

Schwieriger zu lösen als Beispiel 1 ist das nun folgende

Beispiel 2:

Ein Motorboot M mit der Geschwindigkeit 6 m/s und ein Surfer S mit der Geschwindigkeit 2 m/s bewegen sich so, dass sich ihre Kurse senkrecht kreuzen. Zu Beginn unserer Betrachtung befindet sich das Motorboot 50 m, der Surfer 10 m vor dem Kreuzungspunkt. Zu welchem Zeitpunkt ist ihre Entfernung am kleinsten? Wie groß ist sie dann? Wo befinden sich in diesem Augenblick M und S?

Lösung: Wir rechnen ohne Benennungen, messen dabei alle Zeiten in Sekunden und alle Längen in Metern. Ferner denken wir uns auf den See ein Koordinatensystem gelegt, dessen Achsen die beiden Kurse sind (Abbildung 193.1). Zum Zeitpunkt t befinden sich

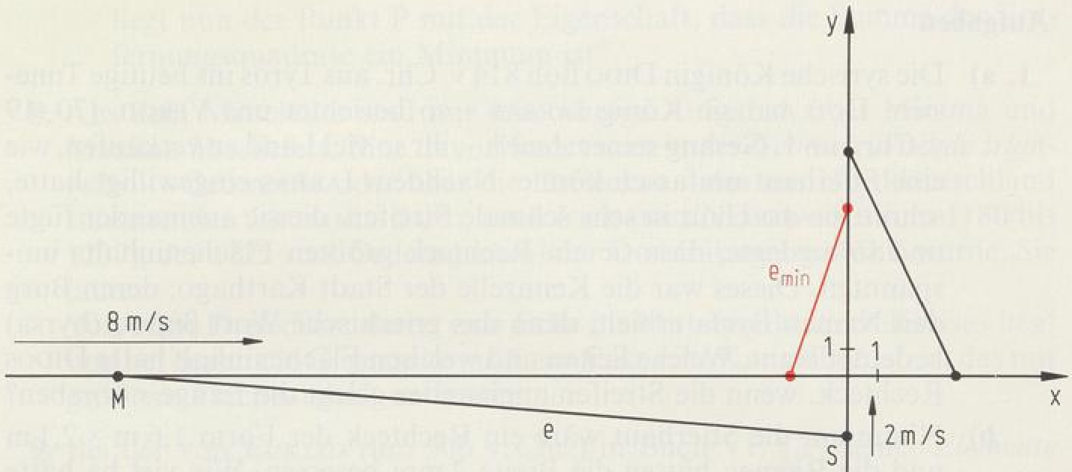


Abb. 193.1 Bewegung von Motorboot M und Surfer S im Koordinatensystem. Gezeichnet sind die Verhältnisse bei 4s, 8s und 9s.

das Motorboot an der Stelle $x = -50 + 6 \cdot t, \quad y = 0,$
der Surfer an der Stelle $y = -10 + 2 \cdot t, \quad x = 0.$
Ihre Entfernung beträgt nach Pythagoras

$$e = \sqrt{(-50 + 6t)^2 + (-10 + 2t)^2} = \sqrt{40t^2 - 640t + 2600}.$$

Gesucht ist $e_{\min}$, der kleinste Wert von e. Da die Wurzelfunktion echt monoton steigend ist, nimmt die Wurzelfunktion ihren kleinsten Wert an, wenn der Radikand am kleinsten ist. Aus dem Graphen der Wurzelfunktion (Abbildung 152.1) entnimmt man diesen Sachverhalt unmittelbar. Zum Auffinden von $e_{\min}$ bestimmen wir also das Minimum der Radikandenfunktion

$$r\colon t \mapsto 40t^2 - 640t + 2600, \quad D_r = \mathbb{R}_0^+,$$

die als Summe zweier Quadrate nie negativ werden kann und deren Graph eine nach oben offene Parabel ist, die ganz über der t-Achse verläuft. Ihre Scheitelabszisse ist ihre Minimalstelle, deren Wert sich nach Satz 173.1 zu $-\dfrac{-640}{2 \cdot 40} = 8$ ergibt. Die Scheitelordinate $40 \cdot 8^2 - 640 \cdot 8 + 2600 = 40$ ist das Minimum der Radikandenfunktion, und damit erhält man $e_{\min} = 2\sqrt{10}$. Das Motorboot befindet sich dabei an der Stelle $x = -50 + 6 \cdot 8 = -2$, d.h. noch 2 m vor der Kreuzungsstelle, der Surfer an der Stelle $y = -10 + 2 \cdot 8 = 6$, d.h. bereits 6 m hinter der Kreuzungsstelle.

Aufgaben

1. a) Die syrische Königin Dido floh 814 v. Chr. aus Tyros ins heutige Tunesien. Dort bat sie König Iarbas – so berichtet uns Vergil (70–19 v. Chr.) im 1. Gesang seiner *Aeneïs* –, ihr so viel Land zu verkaufen, wie eine Stierhaut umfassen könne. Nachdem Iarbas eingewilligt hatte, schnitt sie die Haut in sehr schmale Streifen, die sie aneinander fügte und so auslegte, dass sie ein Rechteck größten Flächeninhalts umspannten. Dieses war die Keimzelle der Stadt Karthago, deren Burg den Namen Byrsa erhielt; denn das griechische Wort βύρσα (byrsa) bedeutet Haut. Welche Seiten und welchen Flächeninhalt hatte Didos Rechteck, wenn die Streifen aneinander gelegt die Länge s ergaben?

b) Nimm an, die Stierhaut wäre ein Rechteck der Form 1,6 m × 2,1 m und die Riemen hätten die Breite 2 mm besessen. Wie viel ha hätte dann Didos Burganlage betragen?

2. Welche Lösung hat Aufgabe **1**, wenn Dido die Riemen hätte so auslegen dürfen, dass das Rechteck auf einer Seite von der geradlinigen Küste begrenzt wird, sie für diese Seite also keine Riemen verbrauchte?

3. Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit der Kantenlänge a. Auf den Seiten sei von jedem Eckpunkt aus im Umlaufssinn eine jeweils gleich große Strecke abgetragen. Verbindet man die Endpunkte dieser Strecken, so entsteht ein Viereck RSTU, das wieder ein Quadrat ist (Beweis!). Wie groß muss die abzutragende Strecke gewählt werden, damit der Flächeninhalt dieses Quadrats minimal wird? Wie groß ist er dann?

4. In einen Kreis vom Radius r ist ein Rechteck größten Flächeninhalts einzuzeichnen. Bestimme die Länge der Rechtecksseiten und den Inhalt.

5. In einem Dreieck mit der Grundseite g und der zugehörigen Höhe h wird die Parallele zu g gezogen, die die beiden anderen Seiten in zwei Punkten schneidet. Fällt man von diesen die Lote auf g, so entsteht ein Rechteck. Wie muss die Parallele gezogen werden, damit dieses Rechteck maximalen Flächeninhalt hat? Wie lang sind dann die Rechtecksseiten, und wie groß ist sein Inhalt?

6. Ein Motorboot M mit der Geschwindigkeit 8 m/s und ein Ruderboot R mit der Geschwindigkeit 1 m/s bewegen sich so, dass ihre Kurse sich senkrecht kreuzen. Zu Beginn unserer Betrachtung befindet sich das Motorboot 90 m, das Ruderboot 15 m vor dem Kreuzungspunkt. Zu welchem Zeitpunkt ist ihre Entfernung am kleinsten, und wie groß ist sie dann? Wo befinden sich in diesem Augenblick M und R?

7. a) Auf der Strecke [AB] der Länge 8 liegt der Punkt C 3 Einheiten von A entfernt. Gesucht ist ein Punkt P auf [AB] mit der Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von A, B und C minimal wird. Wo liegt er?

b) Die Punkte A_1 bis A_7 liegen so auf einer Geraden, dass sie immer weiter voneinander entfernt sind, und zwar 1, 3, 5, 7, 9 bzw. 11 Einheiten. Wo liegt nun der Punkt P mit der Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungsquadrate ein Minimum ist?

8. Aus dem Mittelalter sind nur sehr wenige Aufgaben über Minima und Maxima überliefert. Eine davon findet man in der *Geometria vel de triangulis* – »Geometrie oder über die Dreiecke« – des aus Norddeutschland stammenden JORDANUS SAXO, auch JORDANUS NEMORARIUS (um 1180 bis 1237), der 1222 zum Ordensgeneral der Dominikaner gewählt wurde. Sie lautet:
Von allen Dreiecken, deren eine Ecke im Mittelpunkt eines Kreises liegt und bei denen die Gegenseite zu dieser Ecke eine Kreissehne ist, ist das mit größtem Flächeninhalt zu bestimmen.

9. Bei der von EUKLID (um 300 v. Chr.) in Buch VI, § 27 seiner *Elemente* gestellten Aufgabe handelt es sich um folgendes Problem:
Über der Hälfte [MB] einer Strecke [AB] wird ein Parallelogramm MBNP beliebiger Höhe h gezeichnet. Auf [AB] wird ein Punkt C beliebig gewählt und durch ihn die Parallele zu BN gezogen, die den Diagonalenstrahl [BP in einem Punkt D schneidet. Nun lässt sich ein Parallelogramm ACDE konstruieren. Wie muss C gewählt werden, damit der Inhalt dieses Parallelogramms maximal wird?