Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

6.1 Lösungsverfahren

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

6 Quadratische Ungleichungen

6.1 Lösungsverfahren

Eine Ungleichung der Form $ax^2 + bx + c > 0$ mit $a \neq 0$ heißt quadratische Ungleichung. So ist z. B. $x^2 - x - 2 > 0$ eine quadratische Ungleichung. Zur Lösung solcher Ungleichungen gibt es verschiedene Verfahren:

1) **Methode der quadratischen Ergänzung**

$$x^2 - x - 2 > 0$$
$$x^2 - x + (\tfrac{1}{2})^2 > 2 + \tfrac{1}{4}$$
$$(x - \tfrac{1}{2})^2 > \tfrac{9}{4}$$
$$|x - \tfrac{1}{2}| > \tfrac{3}{2}$$
$$x - \tfrac{1}{2} < -\tfrac{3}{2} \quad \vee \quad x - \tfrac{1}{2} > \tfrac{3}{2}$$
$$x < -1 \quad \vee \quad x > 2$$
$$L =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

2) **Methode der Faktorisierung**

$$x^2 - x - 2 > 0$$

Nach dem Faktorisierungssatz 106.1 brauchen wir zuerst die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$. Wir erhalten $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Damit wird die Ungleichung zur Produktungleichung $(x+1)(x-2) > 0$, die man graphisch lösen kann.
Aus Abbildung 186.1 liest man ab: $L =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

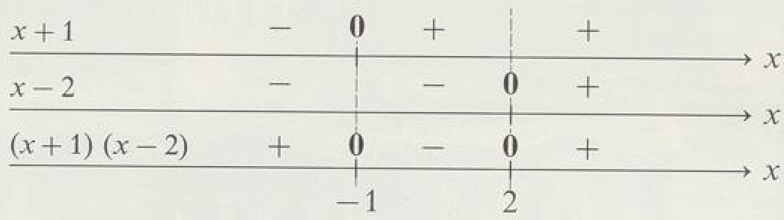

Abb. 186.1 Vorzeichenverteilung beim Term $(x+1)(x-2)$

3) **Parabelmethode**

$$x^2 - x - 2 > 0$$

Wir zeichnen die Parabel $y = x^2 - x - 2$. Sie hat als Nullstellen die Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$, d. h. $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Gesucht sind die x-Koordinaten der Parabelpunkte, für die $y > 0$ gilt. Das sind die Parabelpunkte, die oberhalb der x-Achse liegen. Weil die Parabel nach oben offen ist, sind, wie Abbildung 187.1 zeigt, die y-Koordinaten positiv, wenn $x < -1$ bzw. $x > 2$ gilt. Also lesen wir die Lösungsmenge ab:
$L =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

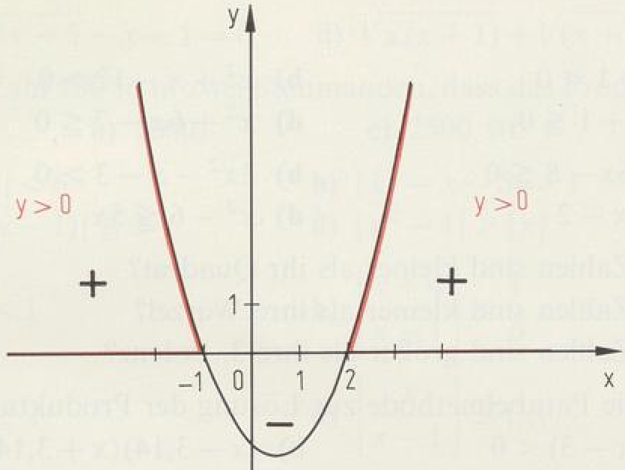

Abb. 187. Lösung der Ungleichung $x^2 - x - 2 > 0$ mit der Parabelmethode

Die Parabelmethode ist meist der kürzeste Weg zur Lösung einer quadratischen Ungleichung. Man braucht nur die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Gleichung und die Öffnung der Parabel, die man dem Vorzeichen des Koeffizienten von x^2 entnimmt. Auf die Zeichnung kann man sogar verzichten.

Bei den Verfahren **2** und **3** haben wir angenommen, dass es Nullstellen gibt. Wenn das nicht der Fall ist, dann liegt die Parabel entweder ganz über oder ganz unter der x-Achse. Je nach der Art des Ungleichheitszeichens ist die Lösungsmenge dann leer oder ganz $\mathbb{R}$, wie Abbildung 187.2 veranschaulicht.

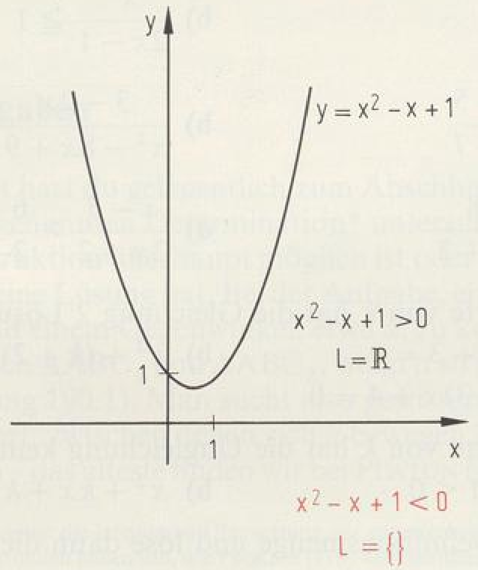

Abb. 187.2 Parabelmethode in Fällen ohne Nullstellen

Aufgaben

1. **a)** $x^2 - x + 1 < 0$ **b)** $x^2 + x - 12 > 0$
c) $x^2 - 2x + 1 \leqq 0$ **d)** $x^2 + 6x - 7 \leqq 0$

2. **a)** $-x^2 + 6x - 8 \leqq 0$ **b)** $2x^2 - x - 3 > 0$
c) $4x^2 \leqq 5x - 2$ **d)** $x^2 - 6 \leqq 5x$

3. **a)** Welche Zahlen sind kleiner als ihr Quadrat?
b) Welche Zahlen sind kleiner als ihre Wurzel?
c) Welche Zahlen sind größer als ihre 3. Potenz?

4. Verwende die Parabelmethode zur Lösung der Produktungleichung:
a) $(x-2)(x-3) < 0$ **b)** $(x - 3{,}14)(x + 3{,}14) > 0$
c) $(2x-1)(2x-3) \geqq 0$ **d)** $(x - \frac{1}{3})(x + \frac{2}{3}) > 0$

5. **a)** $(x-2)(x-3) < 4$ **b)** $x^2 - 3x < 8$
c) $x^2 < 4x - 1$ **d)** $-x^2 > x - 10$

6. **a)** $|x^2 + 5x| < 14$ **b)** $|13x - x^2| \leqq 30$

7. **a)** $0 < x^2 - 10 < x$ **b)** $x \leqq x^2 - 1 \leqq x - 1$

8. **a)** $\dfrac{10x}{x^2+4} \leqq -2$ **b)** $\dfrac{19}{x^2+1} < 1 + \dfrac{3x}{x^2+1}$
c) $\dfrac{7x}{-1-x^2} \geqq 3{,}5$ **d)** $\dfrac{2}{x^2} > \dfrac{1}{1+x^2}$

9. Multipliziere mit dem Quadrat des Nenners:
a) $\dfrac{x-1}{x+3} < 0$ **b)** $\dfrac{x^2}{2x-1} \geqq 1$

10. **a)** $\dfrac{x-1}{x-3} < \dfrac{x-5}{x-7}$ **b)** $\dfrac{3-2x}{x^2-8x+9} \leqq 0$
c) $\dfrac{3}{2x+1} < \dfrac{8}{x+2}$ **d)** $\dfrac{x-3}{3x+2} > \dfrac{6-x}{2-x}$

11. Für welche Werte von k hat die Gleichung 2 Lösungen?
a) $x^2 - kx + k + 3 = 0$ **b)** $x^2 + (k+2)x + k + 5 = 0$
c) $kx^2 + 2(k-3)x + 4 = 0$

12. Für welche Werte von k hat die Ungleichung keine Lösung?
a) $kx^2 - 3x + 1 < 0$ **b)** $x^2 + kx + k \leqq 0$

13. Bestimme die Definitionsmenge und löse dann die Gleichung.
a) $\sqrt{(x-1)(x+2)} = \sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{10}$