



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

6.2 Extremwertaufgaben

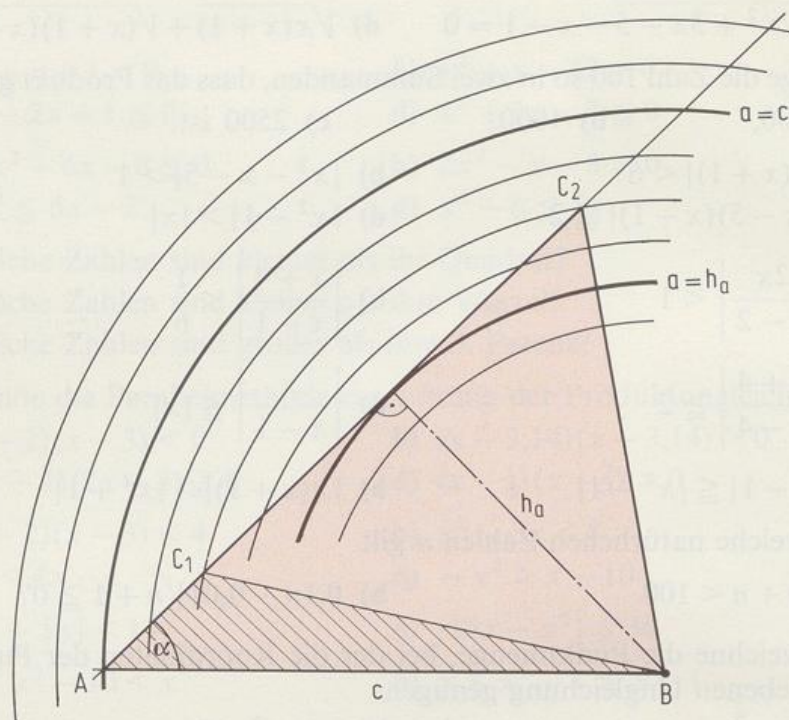
[urn:nbn:de:hbz:466:1-83526](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83526)

- c) $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} - x - 1 = 0$ d) $\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{(x+1)(x+3)} = 3\sqrt{2}$
14. Zerlege die Zahl 100 so in zwei Summanden, dass das Produkt größer als
 a) 2000, b) 1000, c) 2500 ist.
15. a) $|x(x+1)| < 6$ b) $|x^2 - x - 5| > 1$
 c) $|(x-5)(x-1)| \geq 2$ d) $|x^2 - 1| > |x|$
16. a) $\left| \frac{2x}{x-2} \right| < 1$ b) $\left| \frac{x+4}{x-1} \right| < \frac{1}{6}$
 c) $\left| \frac{x+4}{x-4} \right| \geq 2$ d) $\left| \frac{x}{x-1} \right| \leq |x|$
17. a) $|x-1| \leq |x^2-1|$ b) $|x(x+1)| > |x^2+1|$
18. Für welche natürlichen Zahlen n gilt
 a) $\sqrt{n} + n < 100$ b) $0,1n - 0,01\sqrt{n} + 1 \geq 0$?
19. Kennzeichne die Punktmenge, bei der die Koordinaten der Punkte der angegebenen Ungleichung genügen.
 a) $y < x^2$ b) $y \geq x^2 - 2$
 c) $y - 2x^2 + 2 > 0$ c) $2y + 4x^2 - 5x + 1 \leq 0$
20. Kennzeichne die Punktmenge, bei der die Koordinaten der Punkte der angegebenen Ungleichung genügen.
 a) $x^2 < y < 1 - x^2$ b) $x^2 - 3x < y < -x^2 + 4x - 5$
 c) $0 < y < -2x^2 + 9x - 7$ d) $3x^2 - 2x < y < -2x + 3$

6.2 Extremwertaufgaben

Im Geometrieunterricht hast du gelegentlich zum Abschluss einer Konstruktionsaufgabe in der so genannten Determination* untersucht, unter welchen Bedingungen die Konstruktion überhaupt möglich ist oder unter welchen Bedingungen sie mehr als eine Lösung hat. Bei der Aufgabe, ein Dreieck aus zwei Seiten, etwa a und c , und einem Gegenwinkel, etwa α , zu konstruieren, erhält man 2 Lösungen, nämlich $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$, wenn a so gewählt wird, dass $h_a < a < c$ gilt (Abbildung 190.1). Man sucht also gewissermaßen den kleinsten und den größten Wert, zwischen denen sich a bewegen kann. Aus solchen Abgrenzungsproblemen – das älteste finden wir bei PLATON (428–348 v. Chr.) in

* determinatio (lat.) = *Abgrenzung* ist die lateinische Übersetzung des entsprechenden griechischen Fachbegriffs διορισμός (diorismós). Erfunden haben soll, wie PROKLOS (410–485) berichtet, diesen Diorismos LEON, ein Zeitgenosse PLATONS, der als erster »Abgrenzungen dafür geben konnte, wann die Lösung einer gestellten Aufgabe möglich ist und wann nicht«.

Abb. 190.1 Es gibt 2 Lösungen, wenn $h_a < a < c$

Menon (87a, b) –, sind die Extremwertaufgaben* entstanden, deren frühestes uns erhaltenes Beispiel von EUKLID (um 300 v. Chr.) stammt (Aufgabe 195/9). Aber erst APOLLONIOS (um 262–um 190 v. Chr.) erkannte, dass solche Extremwertaufgaben, losgelöst von den geometrischen Abgrenzungsproblemen,

»zu den Sachen gehören, die an und für sich einer Betrachtung würdig erscheinen«,

wie er im Vorwort zu Buch V seiner *Konika* schreibt, in dem er auch solche »Sachen« angeht. Aber es vergingen mehr als 1800 Jahre, bis es dem Juristen und Mathematiker Pierre de FERMAT (1601–1665) gegen 1629 gelang, in seinem *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* – »Methode zur Bestimmung eines Maximums und eines Minimums«** – ein allgemeines Verfahren zum Lösen solcher Extremwertaufgaben zu entwickeln. Das erste Beispiel, das er seinen Lesern darin vorführt, sei unser

Beispiel 1:

Eine gegebene Strecke [AC] soll durch einen Punkt E so geteilt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks, das man aus den beiden Teilen [AE] und [EC] bilden kann, maximal wird (Abbildung 190.2).

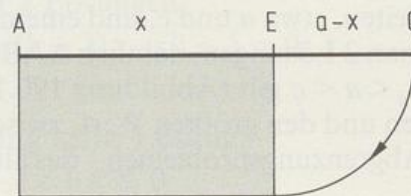


Abb. 190.2 Zu Beispiel 1

* extremus (lat.) = der äußerste

** maximus (lat.) = der größte; minimus (lat.) = der kleinste

Lösung: Wir bezeichnen die Länge der Strecke [AC] mit a und die des Teilstücks [AE] mit x ; dann hat [EC] die Länge $a - x$. Der Inhalt der Rechtecksfläche ergibt sich in Abhängigkeit von x zu $x(a - x)$. Gesucht ist nun der Wert von x , für den $x(a - x)$ maximal wird. Um ihn zu finden betrachten wir die Funktion

$$f: x \mapsto x(a - x),$$

$$D_f =]0; a[.$$

Formt man $f(x)$ um zu $f(x) = -x^2 + ax$,

so erkennt man sofort, dass der Graph von f ein Parabelbogen ist, dessen Scheitel bei

$\left(\frac{a}{2} \mid \frac{a^2}{4}\right)$ liegt (Abbildung 191.2).

Weil die Parabel nach unten offen ist und die Scheitelabszisse $\frac{a}{2}$ in D_f liegt, ist die

Scheitelordinate $\frac{a^2}{4}$ der größte Funktionswert von f .

Das gesuchte x hat also den

Wert $\frac{a}{2}$, und der Teilpunkt E

muss als Mittelpunkt der Strecke [AC] gewählt werden.



METHODUS

Ad disquirendam maximam & minimam.



MNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina, duabus positionibus ignotis imittitur, & hac unica præceptioni statuitur quilibet quætionis terminus esse A, five planum, five solidum, aut longitudo, prout proposito satisfieri par est, & inventa maxima aut minima in terminis sub A, gradu ut libet involutis: Ponatur rursus idem qui prius esse terminus A, → E, iterumque invenitur maxima aut minima in terminis sub A & E, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra ab E, vel ipsius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elationem ipsius gradum, donec aliquid ex homogeneis, ex parte utraque affectione sub E, omnino libereur.

Elidantur deinde utrumque homogenea sub E, aut ipsius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquantur. At si ex una parte nihil superest æquantur sine, quod eodem recidit, negata affirmatis. Resolutio ultime istius æqualitatis dabit valorem A, quæ cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subiicimus

Sit recta AC, ita dividenda in E, ut rectang. AEC, sit maximum: Recta AC, dicitur B.

A E C

ponatur par altera B, esse A, ergo reliqua erit B - A, & rectang. sub segmentis erit B, in A - A' quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B, esse A, → E, ergo reliqua erit B - A - E, & rectang. sub segmentis erit B, in A, - A' → B, in E, 'E in A, - E, quod debet adæquari superiori rectang. B, in A, - A', demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E' → E', & omnibus per E, divisus B, adæquabitur A → E, elidatur E, B, æquabitur A, igitur B, bifariam est dividenda, ad solutionem propofiti, nec potest generalior dari methodus.

De Tangentibus linearum curvarum:

A^D superiorem methodam inventionem Tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

H 4

Abb. 191.1 Erste Seite der erst 1679 in Toulouse im Sammelband *Varia Opera Mathematica* des Pierre de FERMAT erschienenen »Methode zur Bestimmung eines Maximums und eines Minimums«

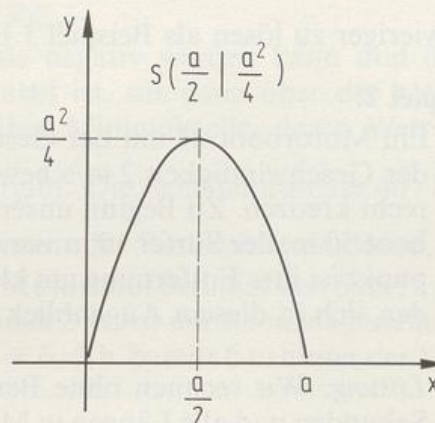


Abb. 191.2 Graph von $f: x \mapsto x(a - x)$, $D_f =]0; a[$

FERMATs Aufgabe ist in verschiedenen Einkleidungen bekannt, darunter auch der folgenden: Eine Zahl ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass deren Produkt maximal wird. Nach der obigen Lösung müssen die beiden Summanden gleich sein, und zwar gleich der Hälfte der gegebenen Zahl.

Wir sind bei unserer Lösung einen anderen Weg gegangen als FERMAT. Normalerweise verlangt nämlich das Lösen von Extremwertaufgaben den Einsatz höherer mathematischer Methoden, die FERMAT gerade in dieser Abhandlung entwickelt hat. Schon das zweite FERMAT'sche Beispiel kannst du nicht mehr lösen, nämlich einen Quader kleinsten Volumens zu suchen, dessen Grundfläche das Quadrat über [AE] und dessen Höhe [EC] ist. Lösen aber kannst du all die Extremwertaufgaben, bei denen die Funktion, deren Extremum bestimmt werden soll, quadratisch ist. Du brauchst dazu nur den Scheitel

der zugehörigen Parabel zu berechnen; die Scheitelabszisse ist dann die gesuchte **Extremalstelle**, die Scheitelordinate ist das **Extremum** der Funktion. Ist die Parabel nach unten offen, dann ist die Extremalstelle eine **Maximalstelle** und das Extremum ein **Maximum**. Ist die Parabel nach oben geöffnet, dann handelt es sich um eine **Minimalstelle** und um ein **Minimum**.

Schwieriger zu lösen als Beispiel 1 ist das nun folgende

Beispiel 2:

Ein Motorboot M mit der Geschwindigkeit 6 m/s und ein Surfer S mit der Geschwindigkeit 2 m/s bewegen sich so, dass sich ihre Kurse senkrecht kreuzen. Zu Beginn unserer Betrachtung befindet sich das Motorboot 50 m, der Surfer 10 m vor dem Kreuzungspunkt. Zu welchem Zeitpunkt ist ihre Entfernung am kleinsten? Wie groß ist sie dann? Wo befinden sich in diesem Augenblick M und S ?

Lösung: Wir rechnen ohne Benennungen, messen dabei alle Zeiten in Sekunden und alle Längen in Metern. Ferner denken wir uns auf den See ein Koordinatensystem gelegt, dessen Achsen die beiden Kurse sind (Abbildung 193.1). Zum Zeitpunkt t befinden sich



Fermat

Abb. 192.1 Pierre de FERMAT
(17.(?)8.1601 Beaumont-de-Lomagne
bis 12.1.1665 Castres)

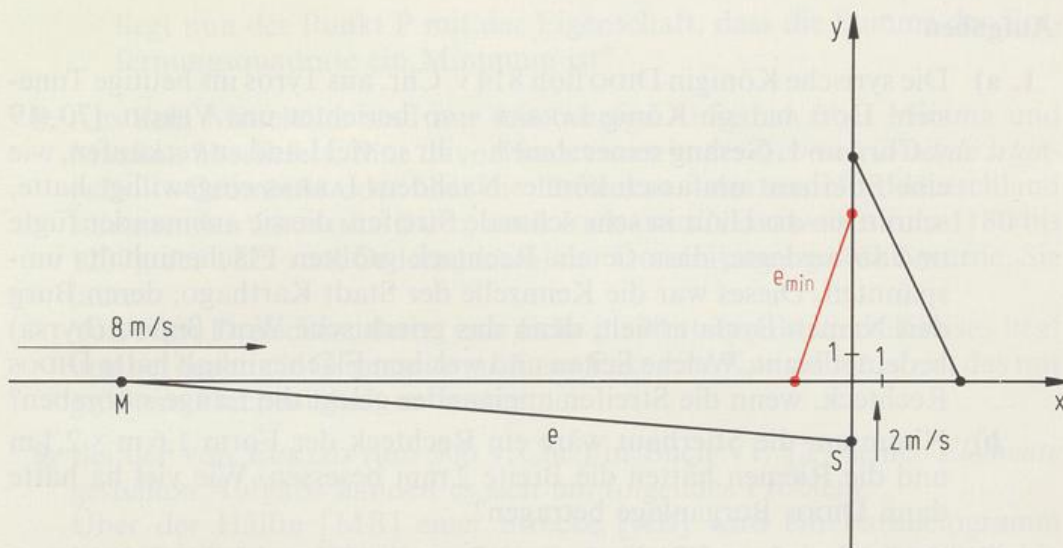


Abb. 193.1 Bewegung von Motorboot M und Surfer S im Koordinatensystem. Gezeichnet sind die Verhältnisse bei 4s, 8s und 9s.

das Motorboot an der Stelle $x = -50 + 6 \cdot t$, $y = 0$,

der Surfer an der Stelle $y = -10 + 2 \cdot t$, $x = 0$.

Ihre Entfernung beträgt nach Pythagoras

$$e = \sqrt{(-50 + 6t)^2 + (-10 + 2t)^2} = \sqrt{40t^2 - 640t + 2600}.$$

Gesucht ist e_{\min} , der kleinste Wert von e . Da die Wurzelfunktion echt monoton steigend ist, nimmt die Wurzelfunktion ihren kleinsten Wert an, wenn der Radikand am kleinsten ist. Aus dem Graphen der Wurzelfunktion (Abbildung 152.1) entnimmt man diesen Sachverhalt unmittelbar. Zum Auffinden von e_{\min} bestimmen wir also das Minimum der Radikandenfunktion

$$r: t \mapsto 40t^2 - 640t + 2600, \quad D_r = \mathbb{R}_0^+,$$

die als Summe zweier Quadrate nie negativ werden kann und deren Graph eine nach oben offene Parabel ist, die ganz über der t -Achse verläuft. Ihre Scheitelabszisse ist ihre Minimalstelle, deren Wert sich

nach Satz 173.1 zu $-\frac{-640}{2 \cdot 40} = 8$ ergibt. Die Scheitelordinate $40 \cdot 8^2 -$

$-640 \cdot 8 + 2600 = 40$ ist das Minimum der Radikandenfunktion, und

damit erhält man $e_{\min} = 2\sqrt{10}$. Das Motorboot befindet sich dabei an der Stelle $x = -50 + 6 \cdot 8 = -2$, d. h. noch 2 m vor der Kreuzungsstelle, der Surfer an der Stelle $y = -10 + 2 \cdot 8 = 6$, d. h. bereits 6 m hinter der Kreuzungsstelle.

Aufgaben

1. a) Die syrische Königin Dido floh 814 v. Chr. aus Tyros ins heutige Tunesien. Dort bat sie König Iarbas – so berichtet uns Vergil (70–19 v. Chr.) im 1. Gesang seiner *Aeneis* –, ihr so viel Land zu verkaufen, wie eine Stierhaut umfassen könne. Nachdem Iarbas eingewilligt hatte, schnitt sie die Haut in sehr schmale Streifen, die sie aneinander fügte und so auslegte, dass sie ein Rechteck größten Flächeninhalts umspannten. Dieses war die Keimzelle der Stadt Karthago, deren Burg den Namen Byrsa erhielt; denn das griechische Wort βύρσα (byrsa) bedeutet Haut. Welche Seiten und welchen Flächeninhalt hatte Didos Rechteck, wenn die Streifen aneinander gelegt die Länge s ergaben?
- b) Nimm an, die Stierhaut wäre ein Rechteck der Form $1,6 \text{ m} \times 2,1 \text{ m}$ und die Riemen hätten die Breite 2 mm besessen. Wie viel ha hätte dann Didos Burganlage betragen?
2. Welche Lösung hat Aufgabe 1, wenn Dido die Riemen hätte so auslegen dürfen, dass das Rechteck auf einer Seite von der geradlinigen Küste begrenzt wird, sie für diese Seite also keine Riemen verbrauchte?
3. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Kantenlänge a . Auf den Seiten sei von jedem Eckpunkt aus im Umlaufssinn eine jeweils gleich große Strecke abgetragen. Verbindet man die Endpunkte dieser Strecken, so entsteht ein Viereck $RSTU$, das wieder ein Quadrat ist (Beweis!). Wie groß muss die abzutragende Strecke gewählt werden, damit der Flächeninhalt dieses Quadrats minimal wird? Wie groß ist er dann?
4. In einen Kreis vom Radius r ist ein Rechteck größten Flächeninhalts einzuzichnen. Bestimme die Länge der Rechtecksseiten und den Inhalt.
5. In einem Dreieck mit der Grundseite g und der zugehörigen Höhe h wird die Parallele zu g gezogen, die die beiden anderen Seiten in zwei Punkten schneidet. Fällt man von diesen die Lote auf g , so entsteht ein Rechteck. Wie muss die Parallele gezogen werden, damit dieses Rechteck maximalen Flächeninhalt hat? Wie lang sind dann die Rechtecksseiten, und wie groß ist sein Inhalt?
6. Ein Motorboot M mit der Geschwindigkeit 8 m/s und ein Ruderboot R mit der Geschwindigkeit 1 m/s bewegen sich so, dass ihre Kurse sich senkrecht kreuzen. Zu Beginn unserer Betrachtung befindet sich das Motorboot 90 m , das Ruderboot 15 m vor dem Kreuzungspunkt. Zu welchem Zeitpunkt ist ihre Entfernung am kleinsten, und wie groß ist sie dann? Wo befinden sich in diesem Augenblick M und R ?
7. a) Auf der Strecke $[AB]$ der Länge 8 liegt der Punkt C 3 Einheiten von A entfernt. Gesucht ist ein Punkt P auf $[AB]$ mit der Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von A , B und C minimal wird. Wo liegt er?
- b) Die Punkte A_1 bis A_7 liegen so auf einer Geraden, dass sie immer weiter voneinander entfernt sind, und zwar $1, 3, 5, 7, 9$ bzw. 11 Einheiten. Wo

liegt nun der Punkt P mit der Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungsquadrate ein Minimum ist?

8. Aus dem Mittelalter sind nur sehr wenige Aufgaben über Minima und Maxima überliefert. Eine davon findet man in der *Geometria vel de triangulis* – »Geometrie oder über die Dreiecke« – des aus Norddeutschland stammenden JORDANUS SAXO, auch JORDANUS NEMORARIUS (um 1180 bis 1237), der 1222 zum Ordensgeneral der Dominikaner gewählt wurde. Sie lautet:

Von allen Dreiecken, deren eine Ecke im Mittelpunkt eines Kreises liegt und bei denen die Gegenseite zu dieser Ecke eine Kreissehne ist, ist das mit größtem Flächeninhalt zu bestimmen.

9. Bei der von EUKLID (um 300 v. Chr.) in Buch VI, § 27 seiner *Elemente* gestellten Aufgabe handelt es sich um folgendes Problem:

Über der Hälfte $[MB]$ einer Strecke $[AB]$ wird ein Parallelogramm $MBNP$ beliebiger Höhe h gezeichnet. Auf $[AB]$ wird ein Punkt C beliebig gewählt und durch ihn die Parallele zu BN gezogen, die den Diagonalenstrahl $[BP]$ in einem Punkt D schneidet. Nun lässt sich ein Parallelogramm $ACDE$ konstruieren. Wie muss C gewählt werden, damit der Inhalt dieses Parallelogramms maximal wird?

