Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

Anhang Lineare Interpolation

**Anhang

Lineare Interpolation

In der Praxis kommt es oft vor, dass man von einer Funktion nur einzelne Werte kennt, die man eventuell durch Messung erhalten hat, dass man aber Zwischenwerte braucht. Hat man den Funktionsterm, dann kann man diese Zwischenwerte leicht berechnen. Wenn der Funktionsterm aber unbekannt ist (oder so kompliziert), dass die Berechnung von Zwischenwerten sehr mühsam wird), dann kann man das Verfahren der linearen Interpolation anwenden. Man ersetzt dabei den Funktionsgraphen zwischen zwei bekannten Punkten, den **Stützpunkten**, durch eine Strecke und berechnet den Wert, den die zugehörige affine Funktion an der gewünschten Stelle hat. Diesen Wert nimmt man als Näherungswert für den gesuchten Funktionswert. Je weniger gekrümmt der Graph in der untersuchten Gegend ist, desto genauer wird dieser Näherungswert sein. Liegen die beiden Stützpunkte sehr nahe beieinander, dann verläuft der Graph der Funktion meist schon ziemlich geradlinig und der Fehler wird klein sein. Liegt der gesuchte Wert zwischen den Stützstellen, dann spricht man von **interpolieren***, liegt er außerhalb, dann sagt man **extrapolieren**.
Rechnerische Durchführung der Interpolation:
$(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ seien die beiden Stützpunkte. Wir suchen $f(x)$. Ist $(x|y)$ der Punkt auf der Interpolationsgeraden, dann verwenden wir y als Näherungswert für $f(x)$.
Mit $\Delta Y = y_2 - y_1$, $\Delta X = x_2 - x_1$, $\Delta y = y - y_1$ und $\Delta x = x - x_1$ gilt wegen des Strahlensatzes (siehe Abbildung 196.1):

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$. Damit berechnen wir

$$\Delta y = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x$$

und daraus

$$y = y_1 + \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x.$$

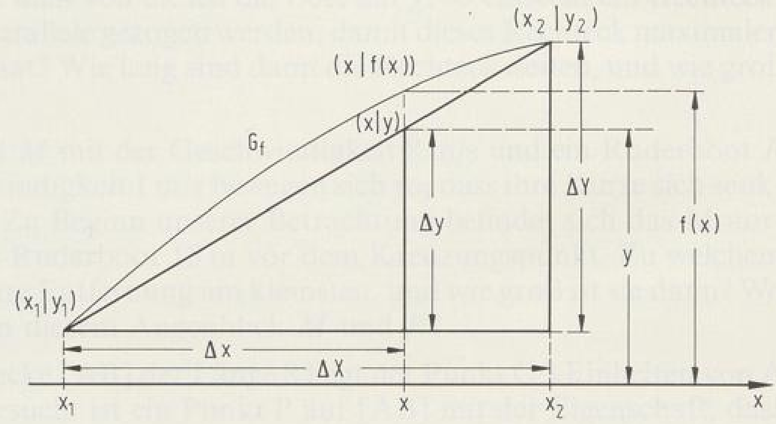

Abb. 196.1 Interpolation mit zwei Stützpunkten

* Das Wort *interpolieren* kommt aus dem Lateinischen und bedeutet *zurechtstutzen* oder *verfälschen*. Der erste, der es in dem obigen mathematischen Sinn gebraucht hat, war John WALLIS (1616–1703).

Beispiel:

Am Thermometer einer meteorologischen Station wurden im Laufe eines Tages folgende Temperaturen abgelesen:

x = Uhrzeit t in Std.	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y = Temperatur θ in °C	7,1	5,0	8,3	14,9	19,0	22,2	18,8	12,5	9,8

Wir wollen einen Näherungswert für die Temperatur um 10 Uhr durch lineare Interpolation bestimmen. Als Stützpunkte verwenden wir die nächstgelegenen bekannten Punkte $(9|14{,}9)$ und $(12|19{,}0)$. Damit berechnen wir:

$\Delta Y = 19{,}0 - 14{,}9 = 4{,}1$

$\Delta X = 12 - 9 = 3$

$\Delta x = 10 - 9 = 1$ und damit

$$y = y_1 + \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x = 14{,}9 + \frac{4{,}1}{3} \cdot 1 \approx 14{,}9 + 1{,}4 = 16{,}3$$

16,3 °C ist der Schätzwert für die Temperatur um 10 Uhr, der sich bei linearer Interpolation ergibt. Der wirkliche Wert und damit auch der Fehler sind allerdings weiterhin unbekannt!

Über den Fehler kann man sich informieren, wenn man den interpolierten Wert mit dem wahren Wert vergleichen kann, wenn man z. B. die Interpolation bei einer Funktion durchführt, deren Term bekannt ist.
Als Beispiel betrachten wir die Wurzelfunktion.
Wir berechnen mit den Stützpunkten $(0|0)$, $(1|1)$ und $(2|\sqrt{2})$ durch Interpolation Näherungswerte für $\sqrt{0{,}5}$ und für $\sqrt{1{,}5}$.

$\sqrt{0{,}5}$: $\Delta Y = 1 - 0 = 1$

$\Delta X = 1 - 0 = 1$

$\Delta x = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$ und damit

$$y = y_1 + \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$$

$\sqrt{1{,}5}$: $\Delta Y = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41$

$\Delta X = 2 - 1 = 1$

$\Delta x = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$ und damit

$$y = y_1 + \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \Delta x = 1 + 0{,}41 \cdot 0{,}5 = 1{,}2$$

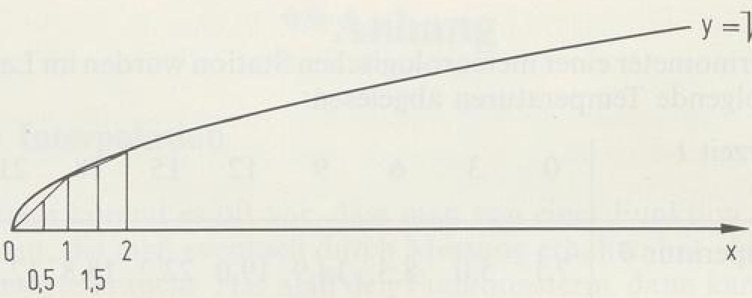

Abb. 198.1 Interpolation bei der Wurzelfunktion

Der **absolute Fehler** = »Näherungswert minus wahrer Wert« ist

im ersten Fall $0{,}5-\sqrt{0{,}5}\approx -0{,}2$,

im zweiten Fall $1{,}2-\sqrt{1{,}5}\approx -0{,}02$.

Der aussagekräftigere **relative Fehler** $=\dfrac{\text{absoluter Fehler}}{\text{wahrer Wert}}$ ist

im ersten Fall $-0{,}2:\sqrt{0{,}5}\approx -0{,}28 = -28\%$,

im zweiten Fall $-0{,}02:\sqrt{1{,}5}\approx -0{,}02 = -2\%$.

Im zweiten Fall ist der relative Fehler erheblich kleiner, weil die Kurve im Interpolationsbereich nicht so stark gekrümmt ist.

Aufgaben

1. Berechne mit der Tabelle des Beispiels von Seite 197 Näherungswerte für die Temperatur um

a) 1 Uhr **b)** 2 Uhr **c)** 18.30 Uhr.

2. Berechne mit der Tabelle des Beispiels von Seite 197 Näherungswerte für die Uhrzeit zwschen 3 Uhr und 15 Uhr, zu der die Temperatur folgende Werte hatte:

a) 7 °C **b)** 7,1 °C **c)** 10 °C.

3. Unter der Deklination δ des Polarsterns versteht man den Breitengrad des Sterns auf der Himmelskugel. Wäre $\delta = 90°$, dann stünde der Polarstern genau am N-Pol der Himmelskugel. In einer Tabelle lesen wir die Deklination des Polarsterns für verschiedene Jahre ab:

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990
Deklination δ	89°01,7′	89°04,7′	89°07,6′	89°10,4′	89°13,2′

a) Berechne Näherungswerte für die Deklination im Jahr

1) 1988 **2)** 1965 **3)** 1977.

b) Berechne Näherungswerte für das Jahr, in dem die Deklination den Wert
1) 89°05′ **2)** 89°10′ **3)** 89°12,4′ hat.

c) Berechne mittels Extrapolation Näherungswerte für die Deklination im Jahr
1) 1940 (Tabellenwert 88°58,7′)
2) 2000 (Tabellenwert 89°15,9′)

4. Als Zeitgleichung bezeichnet man in der Astronomie die Differenz »Wahre Sonnenzeit« minus »Mittlere Sonnenzeit«, das ist also die Zeit, um die die wahre Sonne sich »verfrüht« gegenüber dem Durchschnittswert, der sich ergibt, wenn man eine gleichmäßig umlaufende Sonne annimmt.
Für die Zeitgleichung im Dezember 1988 findet man in einer Tabelle ($+11^m = 11$ min)

Datum	1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.
Zeitgleichung	$+11^m$	$+9^m$	$+7^m$	$+4^m$	$+2^m$	-1^m	-3^m

a) Berechne Näherungswerte für die Zeitgleichung am
1) 5.12.88 **2)** 22.12.88 **3)** 24.12.88.

b) An welchem Dezembertag wird die Zeitgleichung den Wert
1) $+10^m$ **2)** $+5^m$ **3)** 0^m
gehabt haben?

5. Berechne durch Interpolation (Extrapolation) aus den Stützstellen 10 und 11 und den Werten $\sqrt{10} \approx 3{,}1623$ und $\sqrt{11} \approx 3{,}3166$ Näherungswerte für

a) $\sqrt{10{,}5}$ **b)** $\sqrt{10{,}9}$ **c)** $\sqrt{10{,}95}$

d) $\sqrt{10{,}1}$ **e)** $\sqrt{10{,}05}$ **f)** $\sqrt{12}$.

6. Bestimme mit einem Taschenrechner die absoluten und die relativen Fehler, die bei den Näherungen von Aufgabe **5** auftreten. Erkläre die Unterschiede anhand des Graphen der Wurzelfunktion.