Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

3.2 Die allgemeine Wurzel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

»ERATOSTHENES berichtet in der Schrift, die den Titel *Πλατωνικός* (Platonikós) trägt, daß zufolge eines Orakelspruches des Gottes an die Delier, des Inhalts, sie sollten zur Befreiung von der Pest einen Altar von doppelter Größe des bereits bestehenden errichten, die Architekten in große Verlegenheit geraten seien, als sie forschten, wie man einen Körper verdoppeln müsse; und sie seien schließlich gegangen, um in dieser Sache PLATON um Rat zu fragen. PLATON habe ihnen aber erklärt, daß der Gott nicht einen Altar von doppelter Größe nötig habe, ihnen vielmehr ein solches Orakel erteilt habe, um die Griechen zu tadeln, daß sie die Mathematik vernachlässigten und die Geometrie geringschätzten.«

Und so kam das Problem zu seinem Namen »Delisches Problem«.
Wozu aber diese Dichtung? Vermutlich wollte ERATOSTHENES auf seine große Erfindung aufmerksam machen, auf das Mesolabium*, mit dem man zu zwei beliebigen Strecken a und b die beiden mittleren Proportionalen erzeugen kann (Abbildung 48.1).
Zeige: Verschiebt man von den drei aneinanderliegenden kongruenten Rechtecken die beiden schraffierten so, daß die Punkte A, X, Y und B auf einer Geraden liegen, dann bilden a, x, y und b eine stetige Proportion.

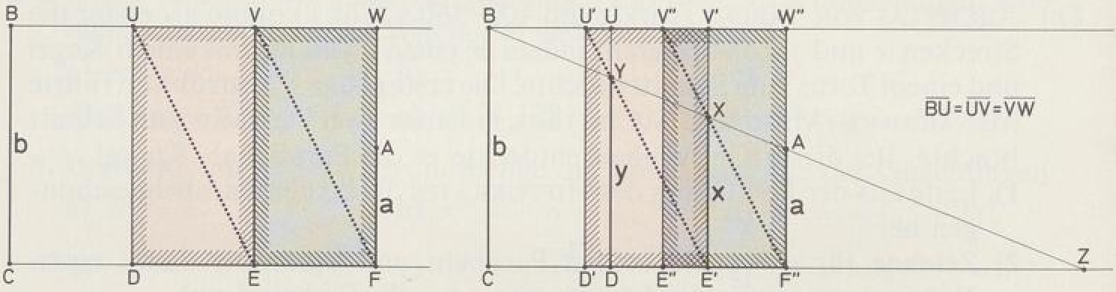

Abb. 48.1 Das Mesolabium des ERATOSTHENES

3.2 Die allgemeine Wurzel

Nach Satz 45.1 hat jede Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ genau eine nichtnegative Lösung. Man bezeichnet sie mit dem Symbol $\sqrt[n]{a}$, gesprochen »n-te Wurzel aus a«. Wir halten dies fest in

Definition 48.1: Für $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Die unter dem Wurzelzeichen stehende Zahl heißt **Radikand**, die auf das Wurzelzeichen geschriebene natürliche Zahl **Wurzelexponent**.

* griechisch μεσόλαβον (mesólabon), von μέσος (mésos) = *mittlerer* und λαβεῖν (labeīn) = *fassen, gewinnen*, also *Mittelgewinner*. ERATOSTHENES war auf seine Erfindung so stolz, daß er PTOLEMAIOS III. EUERGETES (reg. 246–221 v. Chr.) eine Säule errichtete, auf der er das Mesolabium in Bronze anbringen und den Beweis samt einem Epigramm einmeißeln ließ. Beide überlieferte uns EUTOKIOS in dem falschen ERATOSTHENES-Brief.

Beispiele:

$\sqrt[3]{8} = 2$; denn 2 ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^3 = 8$. Ebenso gilt

$\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[4]{625} = 5$

$\sqrt[5]{0{,}00032} = 0{,}2$ $\sqrt[3]{0{,}343} = 0{,}7$ $\sqrt[10]{1024} = 2$

$\sqrt[2]{16} = 4$ $\sqrt[5]{0} = 0$ $\sqrt[3]{a^6} = a^2$

$\sqrt[4]{a^4} = |a|$ $\sqrt[2]{1{,}21} = 1{,}1$ $\sqrt[6]{(-a)^6} = |a|$.

Wie man sieht, ist die früher eingeführte Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ein Sonderfall der allgemeinen Wurzel, nämlich für den Wurzelexponenten $n = 2$. Es gilt also: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. In der Regel läßt man jedoch bei der Quadratwurzel (aber nur bei dieser!) den Wurzelexponenten weg.
Wir fassen die Eigenschaften der allgemeinen Wurzel zusammen in

Satz 49.1: 1) $\sqrt[n]{a}$ ist definiert für nichtnegative Radikanden a und natürliche Wurzelexponenten n.

2) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} \geqq 0}$ **3)** $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$

Die Verwendung des Symbols $\sqrt[n]{a}$ beinhaltet bereits die Voraussetzungen $a \geqq 0$ und n natürliche Zahl; dies braucht also im folgenden nicht jedesmal besonders angegeben zu werden.
Auf Grund der allgemeinen Wurzeldefinition gilt für $a \geqq 0$ die Beziehung $\sqrt[1]{a} = a$. Auf das Zeichen $\sqrt[1]{}$ wird man also im allgemeinen verzichten können. Für negatives a und gerades n ist a^n positiv und damit $\sqrt[n]{a^n}$ definiert. Nach Definition 48.1 bezeichnet man damit die positive Lösung der Gleichung $x^n = a^n$, also $-a = |a|$. Demnach gilt

Satz 49.2: Für $a \in \mathbb{R}$ und gerades n ist $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^n} = |a|}$.

Bei der Quadratwurzel ist dir dieser Sachverhalt schon längst bekannt; denn dort gilt

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, aber $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ausdrücke der Form $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ und $\sqrt[n]{a^m}$ lassen sich mit Hilfe von Satz 14.2 leicht berechnen, wenn n ein Teiler von m ist. So gilt z.B.

$\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12} = \left(\sqrt[4]{5}\right)^{4\cdot 3} = \left(\left(\sqrt[4]{5}\right)^4\right)^3 = 5^3 = 125.$

$\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{5^{3\cdot 4}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125.$

Bei negativen Basen ist Satz 49.2 zu beachten:
$\sqrt[4]{(-5)^{12}} = \sqrt[4]{(-5)^{3\cdot 4}} = \sqrt[4]{[(-5)^3]^4} = |(-5)^3| = 5^3 = 125.$

Aufgaben

1. a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[3]{125}$ d) $\sqrt[3]{343}$ e) $\sqrt[3]{216}$
f) $\sqrt[3]{729}$ g) $\sqrt[3]{512}$ h) $\sqrt[3]{1000}$ i) $\sqrt[4]{1}$ k) $\sqrt[4]{16}$
l) $\sqrt[5]{32}$ m) $\sqrt[6]{0}$ n) $\sqrt[4]{81}$ o) $\sqrt[5]{100000}$ p) $\sqrt[9]{512}$

2. a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ c) $\sqrt[5]{\frac{243}{1024}}$ d) $\sqrt{\frac{289}{324}}$ e) $\sqrt[6]{\frac{1}{729}}$
f) $\sqrt[3]{0{,}125}$ g) $\sqrt[5]{0{,}00032}$ h) $\sqrt[4]{0{,}0625}$ i) $\sqrt[7]{0{,}0000001}$ k) $\sqrt[5]{0{,}03125}$

3. a) $\sqrt{361} + 5\sqrt[3]{0{,}064} - 29\sqrt[9]{512}$ b) $4\sqrt[8]{\frac{1}{256}} - 12\sqrt[3]{\frac{27}{64}} + 0{,}4\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$

4. a) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$ b) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^5$ c) $\left(\sqrt[4]{11}\right)^8$ d) $\left(\sqrt{2}\right)^6$ e) $\left(\sqrt[6]{7}\right)^{18}$

5. a) $\left(\sqrt[4]{c}\right)^4$ b) $\left(\sqrt[7]{3a^2}\right)^7$ c) $\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)^n$ d) $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^{2n}$ e) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n^2+n}$

6. Für welche Werte von a und b sind die folgenden Wurzelausdrücke definiert? Führe, wenn notwendig, eine Fallunterscheidung durch.
a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[6]{a^{-1}}$ c) $\sqrt[5]{a^2}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$ e) $\sqrt[10]{\frac{a^2}{b}}$
f) $\sqrt[n]{ab}$ •g) $\sqrt[n]{a^{-3}b^{n+3}}$ h) $\sqrt[k]{a^{1-2k}}$ •i) $\sqrt[4]{a^{n-1}b^n}$ k) $\sqrt[7]{\frac{a^{2n+1}}{b^{2n-1}}}$

•**7.** Berechne:
a) $\sqrt[5]{3^5} - \sqrt[4]{(-2)^4}$ b) $\sqrt[3]{(-7)^6} + \sqrt{(-3)^6} - 66\sqrt[4]{(-1)^{20}}$
c) $\sqrt[4]{a^4} - \sqrt[7]{b^7}$ d) $\sqrt[8]{a^{16}} + \sqrt[6]{a^{18}b^6} - \sqrt[3]{|a|^9 \cdot |b|^{15}}$

8. $\boldsymbol{\sqrt[3]{729\cdot 125} = \sqrt[3]{9^3\cdot 5^3} = \sqrt[3]{(9\cdot 5)^3} = 9\cdot 5 = 45}$. Löse analog:
a) $\sqrt{64\cdot 324}$ b) $\sqrt[3]{125\cdot 0{,}008}$
c) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}\cdot 0{,}00243}$ d) $\sqrt[4]{625\cdot 5\frac{1}{16}\cdot 0{,}0016}$
e) $\sqrt[3]{0{,}001\cdot(2{,}7\cdot 10^4)\cdot 0{,}125}$ •f) $\sqrt[6]{(6{,}4\cdot 10^{-11})\cdot(0{,}5)^{-6}\cdot(7{,}29\cdot 10^2)}$

9. Berechne, falls möglich:

a) $\sqrt[4]{3^4}$ **b)** $\sqrt[4]{(-3)^4}$ **c)** $\sqrt[4]{(-3)^{-4}}$ **d)** $\sqrt[5]{3^5}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^5}$ **f)** $\sqrt[5]{(-3)^{-5}}$ **g)** $\sqrt[5]{|-3|^5}$ **h)** $\sqrt[5]{|-3|^{-5}}$

i) $\sqrt[8]{(-1)^8}$ **j)** $\sqrt[8]{(-1)^{-8}}$ **k)** $\sqrt[8]{-1^{-8}}$ **l)** $\sqrt[8]{(-\frac{1}{100})^{-4}}$

•m) $\sqrt[9]{(-\frac{27}{8})^{-6}}$ **•n)** $\sqrt[5]{(\frac{32}{243})^2}$ **•o)** $\sqrt[3]{(\frac{27}{125})^2}$ **p)** $\sqrt[6]{(-\frac{9}{25})^3}$

10. Die folgenden Gleichungen sind vom Typ $x^n = a$. Gib jeweils alle Lösungen an. Welche von ihnen kann als $\sqrt[n]{a}$ geschrieben werden?

a) $x^3 = 8$ **b)** $x^3 = -8$ **c)** $x^4 = 625$ **d)** $x^4 = -16$

e) $x^7 = 0$ **f)** $x^5 = -243$ **g)** $x^5 = 2^{10}$ **h)** $x^7 = 0{,}5^{-14}$

**3.3 Zur Geschichte der allgemeinen Wurzel

Die Entdeckung der Inkommensurabilität zweier Strecken und damit letztlich der Irrationalzahl durch die PYTHAGOREER um die Mitte des 5. Jh.s v. Chr. gehört zu den Großtaten der griechischen Mathematik. Erinnern wir uns: Die Aufgabe, ein Quadrat zu finden, dessen Flächeninhalt doppelt so groß wie der eines gegebenen Quadrats ist, führt auf die Gleichung $x^2 = 2$, die durch keine rationale Zahl gelöst werden kann; geometrisch aber existiert eine Strecke für die Seite des gesuchten Quadrats, nämlich die Diagonale des gegebenen Quadrats. $\sqrt{2}$ war geboren!

THEODOROS von Kyrene (um 465 – um 385 v. Chr.) erkannte, wie uns PLATON (428–348 v. Chr.) in seinem um 368 verfaßten Dialog *Theätet* (147c–148b) berichtet, daß die Quadratwurzeln aus einer Nichtquadratzahl immer irrational sind; ihre Existenz konnte er an Quadraten bzw. rechtwinkligen Dreiecken nachweisen. Sein und PLATONS Schüler THEAITETOS (um 415 – 369 v. Chr.) entdeckte die höheren Irrationalitäten; das sind Zahlen, die auch durch Quadrieren nicht rational werden, wie $\sqrt{\sqrt{a}}$ und auch oft $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. EUKLID (um 300 v. Chr.) behandelt im 117 Sätze umfassenden Buch X seiner *Elemente* diese höheren Irrationalitäten erschöpfend. Anders ausgedrückt: Die Griechen verstanden mit Quadratwurzeln und 4. Wurzeln zu rechnen. Wie stand es aber mit den anderen Wurzeln? PLATON läßt THEAITETOS in dem angegebenen Dialog sagen, daß er auch mit Raumgrößen, d.h. mit kubischen Irrationalitäten entsprechend umgehen könne. In Wahrheit gelang dies den Griechen jedoch nicht. Das Delische Problem der Würfelverdopplung (Aufgabe 46/**7**) führt auf die Gleichung $x^3 = 2$, von der sich zwar genauso wie von $x^2 = 2$ zeigen läßt, daß sie durch keine rationale Zahl lösbar ist (Aufgabe 54/**1**). Entscheidend aber war wohl, daß man, anders als bei der Quadratverdopplung, mit Zirkel und Lineal keine Strecke konstruieren konnte, die die Kante des doppelt so großen Würfels ist. Damit fehlte anscheinend für die Griechen trotz der im dreidimensionalen Raum mit Hilfe von Körpern durchgeführten Konstruktion des ARCHYTAS (um 375 v. Chr.) – siehe Aufgabe 46/**7.b**) – der Nachweis, daß $\sqrt[3]{2}$ überhaupt existiert. Für PLATON blieb das Problem ungelöst; wir wissen seit Évariste GALOIS (1811–1832) – siehe Seite 118f. –, daß es mit Zirkel und Lineal unlösbar ist. Da die Griechen aber anscheinend nicht bereit waren, an die Existenz der 3. Wurzeln zu glauben – sie sind ja meist weder rationale Zahlen noch als Strecken konstruierbar –, wurden sie auch zahlentheoretisch nicht behandelt. Lediglich bei