Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

3.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

j) Ersetze in **g)** $\sqrt[4]{}$ durch $\sqrt[11]{}$.

k) Zeige analog zu **f)**, daß

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{N + (n-1)x_k^n}{n x_k^{n-1}}}$$

ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt[n]{N}$ darstellt.

l) Berechne mit der Iterationsformel aus **k)** Näherungswerte für die **1)** in **g)**, **2)** in **h)**, **3)** in **i)**, **4)** in **j)** angegebenen Wurzeln. Rechne so lange, bis dein Taschenrechner keinen neuen Wert mehr anzeigt.

4. Michael Stifel (1487?–1567) zeigt seine Regel zur Berechnung von höheren Wurzeln 1544 in der *Arithmetica integra* an Hand folgender Beispiele:

1) $\sqrt{6765201}$ **2)** $\sqrt[3]{238328}$ **3)** $\sqrt[5]{916132832}$

4) $\sqrt[7]{3521614606208}$ **5)** $\sqrt[8]{45949729863572161}$

a) Berechne die unter **1)** angegebene Wurzel mit dem Divisionsverfahren.

b) Berechne die Wurzeln unter **2)** bis **5)**. Überlege dabei zuerst, wie viele Stellen vor dem Komma das Ergebnis haben kann, und starte dann das Iterationsverfahren aus Aufgabe **3.k)** mit einer Zahl, die bis auf die vorderste Ziffer nur Nullen enthält.

5. Michael Stifel (1487?–1567) zeigt seine Regel zur Berechnung von höheren Wurzeln 1545 in der *Deutsche*[n] *Arithmetica* an Hand folgender Beispiele:

1) $\sqrt[4]{47458321}$ **2)** $\sqrt[7]{280648260320646639744}$

3) $\sqrt[11]{7516865509350965248}$

Berechne sie nach dem Vorgehen in Aufgabe **4.b)**.

3.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Das Rechnen mit allgemeinen Wurzeln ist sehr unhandlich. Wir haben keine Rechenregeln dafür hergeleitet, weil sich erfreulicherweise im Laufe der Entwicklung gezeigt hat, daß man die allgemeinen Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten auffassen kann, was den Umgang mit ihnen wesentlich erleichtert.
Wir lassen zunächst einmal probeweise Stammbrüche als Exponenten einer

Potenz zu. Für $a \geqq 0$ ist $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ gemäß Definition 48.1. Will man $\sqrt[n]{a}$ als Potenz a^r ausdrücken, dann muß gelten $(a^r)^n = a$. Wenn für den Exponenten r auch die Rechenregeln für Potenzen gelten – das wollen wir schließlich erreichen –, dann erhalten wir $(a^r)^n = a^{rn}$ und damit $a^{rn} = a = a^1$. Also muß $rn = 1$ sein, d.h., $r = \frac{1}{n}$. Diese Überlegung führt zu

> **Definition 58.1:** Für $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
> $$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$$

Wegen $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = a^1$ gilt also nach obiger Definition auch $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a^{\frac{n}{n}}$. Diese Beziehung regt dazu an, das Potenzsymbol auf beliebige rationale Exponenten $\frac{m}{n}$ zu erweitern durch

> **Definition 58.2:** Für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt:
> $$a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Bemerkungen:

1) Ist $\frac{m}{n} > 0$, dann darf auch $a = 0$ sein. Es gilt $0^{\frac{m}{n}} = 0$.
2) Die Voraussetzung $a \geqq 0$ bzw. $a > 0$ wird im folgenden nicht immer besonders hervorgehoben. Sie ist bereits im Symbol $a^{\frac{m}{n}}$ enthalten.

Definition 58.2 gewährleistet, daß die Regel II für das Potenzieren einer Potenz auch dann gültig bleibt, wenn man zuerst mit einem Stammbruch und dann mit einer ganzen Zahl potenziert. Es ist nämlich $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m}$. Nun läßt sich aber der Bruch $\frac{m}{n}$ auch als $m \cdot \frac{1}{n}$ schreiben. Daher sollte $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ ebenfalls $a^{\frac{m}{n}}$ sein. Tatsächlich gilt

> **Satz 58.1:** Für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt:
> $$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$
> in Wurzelschreibweise
> $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Beweis: Für $x = a^{\frac{1}{n}}$ gilt nach Definition 48.1 in Verbindung mit Definition 58.1 $x^n = a$ und damit $(x^n)^m = a^m \Leftrightarrow (x^m)^n = a^m$. Setzen wir $y := x^m$, so lautet die

letzte Gleichung $y^n = a^m$. Ihre einzige nichtnegative Lösung ist $y = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$.
Andererseits gilt jedoch $y = x^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Eine unmittelbare Folgerung des soeben bewiesenen Satzes ist

> **Satz 59.1:** Ist $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$, dann ist $a^{\frac{m}{n}}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a^m$.

Beweis: Nach Definition 48.1 in Verbindung mit Definition 58.1 hat die Gleichung $x^n = a^m$ die Lösung $(a^m)^{\frac{1}{n}}$, was aber nach Satz 58.1 gleich $a^{\frac{m}{n}}$ ist.

Abschließend stellt sich noch die Frage, ob sich $a^{\frac{m}{n}}$ ändert, wenn der Bruch im Exponenten erweitert oder gekürzt wird, ob also z. B. $a^{\frac{2}{3}}$ dasselbe ist wie $a^{\frac{4}{6}}$. Nun gilt aber: Potenziert man die Gleichung $x^n = a^m$ mit $k \in \mathbb{N}$, so erhält man die Gleichung $x^{kn} = a^{km}$ mit der einzigen nichtnegativen Lösung $a^{\frac{km}{kn}}$. Potenzieren ist eine Gewinnumformung, d.h., die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind auch Lösungen der potenzierten Gleichung. Da beide Gleichungen genau eine nichtnegative Lösung haben, gilt also

> **Satz 59.2:** Für $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ und n, $k \in \mathbb{N}$ gilt
> $$\boldsymbol{a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}}},$$
> d.h., eine Potenz mit positiver Basis ändert ihren Wert nicht, wenn der Exponent erweitert oder gekürzt wird.

Die Einschränkung in Satz 59.2 auf *positive* Basen ist wichtig! Zur Warnung diene folgende »Schlußkette«:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

Das zweite Gleichheitszeichen wurde zu Unrecht gesetzt, weil gebrochene Exponenten nur bei positiver Basis verwendet werden dürfen.

Beachte: $\sqrt[3]{(-5)^2}$ ist definiert, und es gilt $\sqrt[3]{(-5)^2} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$. Die Umformung $\sqrt[3]{(-5)^2} = (-5)^{\frac{2}{3}}$ ist nicht zulässig. Die rechte Seite ist nämlich nicht definiert, weil die Basis negativ ist.

Noch mehr Vorsicht ist aber am Platz, wenn Variable im Spiel sind. So kann $\sqrt[4]{x^2}$ in $\mathbb{R}$ nicht in $x^{\frac{2}{4}}$ verwandelt werden, weil $x^{\frac{2}{4}}$ nur in $\mathbb{R}_0^+$ definiert ist. Richtig kann man $\sqrt[4]{x^2}$ wegen $x^{2n} = |x|^{2n}$ nur auf folgende Art in $\mathbb{R}$ vereinfachen:

$$\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{|x|^2} = |x|^{\frac{2}{4}} = |x|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x|}.$$

Aufgaben

1. Berechne:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ **b)** $27^{-\frac{1}{3}}$ **c)** $64^{-\frac{1}{2}}$ **d)** $64^{\frac{1}{3}}$ **e)** $32^{\frac{1}{5}}$

f) $625^{-\frac{1}{4}}$ **g)** $729^{\frac{1}{6}}$ **h)** $128^{\frac{1}{7}}$ **i)** $343^{-\frac{1}{3}}$ **k)** $1024^{\frac{1}{10}}$

2. **a)** $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **c)** $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$ **d)** $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ **e)** $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

f) $0{,}125^{-\frac{1}{3}}$ **g)** $(6\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ **h)** $0{,}000729^{\frac{1}{6}}$ **i)** $3{,}375^{-\frac{1}{3}}$ **k)** $(5\tfrac{1}{16})^{\frac{1}{4}}$

3. **a)** $8^{\frac{2}{3}}$ **b)** $9^{-\frac{3}{2}}$ **c)** $27^{\frac{4}{3}}$ **d)** $16^{\frac{3}{4}}$ **e)** $125^{-\frac{5}{3}}$

f) $64^{\frac{5}{6}}$ **g)** $243^{-\frac{3}{5}}$ **h)** $100^{\frac{5}{2}}$ **i)** $1000^{-\frac{2}{3}}$ **k)** $1024^{\frac{7}{10}}$

4. **a)** $(\tfrac{4}{25})^{\frac{3}{2}}$ **b)** $(4\tfrac{17}{27})^{-\frac{2}{3}}$ **c)** $0{,}0256^{\frac{5}{4}}$ **d)** $(4\tfrac{12}{125})^{\frac{2}{3}}$ **e)** $0{,}01024^{-\frac{2}{5}}$

f) $0{,}01^{-\frac{3}{2}}$ **g)** $0{,}343^{\frac{4}{3}}$ **h)** $0{,}00001^{\frac{6}{5}}$ **i)** $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}$ **k)** $(11\tfrac{25}{64})^{\frac{5}{6}}$

5. **a)** $49^{0,5}$ **b)** $32^{-0,2}$ **c)** $81^{0,25}$ **d)** $1024^{-0,1}$ **e)** $25^{1,5}$

f) $256^{0,125}$ **g)** $243^{-0,8}$ **h)** $625^{-0,75}$ **i)** $1024^{0,9}$ **k)** $256^{-0,875}$

6. Vergleiche die Werte von

a) $(2^{-2})^3$ und 2^{-2^3} **b)** $(2^{-3})^2$ und 2^{-3^2}

c) $(3^{-2})^2$ und 3^{-2^2} **d)** $(2^2)^{-3}$ und $2^{2^{-3}}$

e) $(2^3)^{-2}$ und $2^{3^{-2}}$ **f)** $(3^2)^{-2}$ und $3^{2^{-2}}$

g) $(2^{-2})^{-3}$ und $2^{-2^{-3}}$ **h)** $(2^{-3})^{-2}$ und $2^{-3^{-2}}$

i) $(3^{-2})^{-2}$ und $3^{-2^{-2}}$ **j)** $3^{(-2)^{-2}}$ und $3^{-(2^{-2})}$.

7. Schreibe als Potenz mit möglichst einfacher Grund- und Hochzahl:

a) $\sqrt[7]{2}$ **b)** $\sqrt[5]{4}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ **d)** $\sqrt[10]{128}$ **e)** $\sqrt[4]{\frac{8}{343}}$

f) $\sqrt[6]{625}$ **g)** $\sqrt[9]{0{,}125}$ **h)** $\sqrt[12]{\frac{81}{256}}$ **i)** $\sqrt[8]{0{,}000064}$ **k)** $\sqrt[15]{\frac{243}{100000}}$

8. Gib die maximale Definitionsmenge des jeweiligen Terms an und vereinfache ihn, falls möglich.

a) $\sqrt[6]{x^4}$ und $\sqrt[4]{x^6}$

b) $\sqrt[8]{x^2}$, $\sqrt[8]{x^3}$, $\sqrt[8]{x^4}$, $\sqrt[8]{x^5}$, $\sqrt[8]{x^6}$ und $\sqrt[8]{x^7}$

c) $\sqrt{x^8}$, $\sqrt[3]{x^8}$, $\sqrt[4]{x^8}$, $\sqrt[5]{x^8}$, $\sqrt[6]{x^8}$ und $\sqrt[7]{x^8}$

9. Welche der folgenden Ausdrücke sind äquivalent? (*Anleitung*: Überlege, für welche Werte von a die Ausdrücke jeweils definiert sind.)

a) $\sqrt{a}$ und $a^{\frac{1}{2}}$ **b)** $\sqrt[3]{a^2}$ und $a^{\frac{2}{3}}$ **c)** $\sqrt[3]{a^4}$ und $|a|^{\frac{4}{3}}$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{a^6}}$ und $a^{-\frac{6}{5}}$ **e)** $\sqrt[3]{a^5}$ und $a^{\frac{5}{3}}$ **f)** $\sqrt[6]{a^4}$ und $a^{\frac{2}{3}}$

g) $\sqrt[7]{|a|^{-3}}$ und $a^{-\frac{3}{7}}$ **h)** $\sqrt[7]{a^{-3}}$ und $|a|^{-\frac{3}{7}}$ **i)** $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^4}}$ und $|a|^{-\frac{4}{7}}$

k) $\sqrt[3]{1+2a+a^2}$ und $(1+a)^{\frac{2}{3}}$ **l)** $\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2}$ und $|a+b|^{\frac{1}{2}}$

m) $\sqrt[6]{(b^2-2ab+a^2)^2}$ und $(a-b)^{\frac{2}{3}}$

•**10.** Gib für folgende Ausdrücke die Potenzschreibweise an:

a) $\sqrt[3]{a}$ **b)** $\sqrt[5]{x^2}$ **c)** $\sqrt[4]{y^3}$ **d)** $\sqrt[6]{\dfrac{1}{z^4}}$ **e)** $\sqrt{m^{-3}}$

f) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{x^6}}$ **g)** $\sqrt[3]{|a|}$ **h)** $\sqrt[4]{|a|^{-3}}$ **i)** $\sqrt[10]{|x|\cdot x^6}$ **k)** $\sqrt[12]{\dfrac{y^{10}}{|y|}}$

11. Vereinfache und fasse zusammen:

a) $2^{\frac{3}{4}}+5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}+3\cdot 2^{\frac{6}{8}}$ **b)** $\dfrac{6}{4^{-\frac{2}{3}}}-\sqrt[6]{256}-5\cdot 4^{\frac{6}{9}}$

c) $2a^{\frac{2}{3}}-5a^{\frac{6}{9}}+4a^{\frac{4}{6}}$ **d)** $\dfrac{3}{x^{0,2}}+10x^{-\frac{1}{5}}-11\cdot\sqrt[15]{\dfrac{1}{x^3}}$

⁝**12.** Welche Lösungsmengen haben folgende Gleichungen?

a) $x^{\frac{1}{2}}-3=0$ **b)** $3\cdot x^{\frac{2}{3}}=2-x^{\frac{2}{3}}$ **c)** $x^{1,5}-x^{-\frac{1}{6}}=0$

d) $x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{3}{4}}+2=0$ **e)** $x^{0,2}=3$ **f)** $x^{\frac{3}{4}}=\sqrt{2\sqrt{2}}$

g) $x^{\frac{4}{3}}=4$ **h)** $x^{\frac{1}{3}}=-1$ **i)** $3=x^{0,17}$