Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

3.5 Zur Geschichte der gebrochenen Exponenten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

**3.5 Zur Geschichte der gebrochenen Exponenten

In Buch V, Definition 9 und 10, seiner *Elemente* bezeichnet EUKLID (um 300 v. Chr.) $(a:b)^2$ bzw. $(a:b)^3$ als das zweifache bzw. dreifache Verhältnis von a und b (Aufgabe 63/**1** und **2**). ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) erweitert in seiner Schrift *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* (perí sphaíras kai kylíndru) – »Über Kugel und Zylinder« – diese Sprechweise und bezeichnet $(a:b)^{\frac{3}{2}}$ als das anderthalbfache Verhältnis (ἡμιόλιος λόγος) [hemiólios lógos]) von a und b, ein Ausdruck, den Johannes KEPLER (1571–1630) – vgl. Aufgabe 84/**10** – und sogar noch 1718 Isaac NEWTON (1643–1727) benützt. Dieses Verhältnis ist in unserer Deutung die früheste Form einer Potenz mit gebrochenem Exponenten. Wann und wo ARCHIMEDES' Bezeichnung Früchte trug, können wir nicht entscheiden, da zu viele griechische und arabische Werke im Laufe der Zeit verlorengingen, so auch die *Proportionenlehre* des AL-KINDI († um 874), die im 14. Jh. noch in lateinischer Übersetzung vorhanden war! Der erste, der nach unserer Kenntnis mit gebrochenen Exponenten recht sicher rechnen konnte, war Nicole ORESME (1320/25–1382), und zwar in seinen Werken *Tractatus proportionum* – »Abhandlung über Verhältnisse« – und *Algorismus proportionum* – »Rechnen mit Verhältnissen« –, beide um 1360 entstanden. Michael STIFEL (1487?–1567) greift die Idee 1544 in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – auf und erweitert sie, wie wir später sehen werden (Aufgabe 67/**8**). Aber niemand erkennt den Fortschritt. Simon STEVIN (1548 bis 1620) benützt zwar 1585 in seiner *L'Arithmétique* $\frac{1}{2}$ als Symbol für $\sqrt{x}$ und $\frac{2}{3}$ für $\sqrt[3]{x^2}$, scheut sich aber davor, diese Symbole wirklich zu verwenden. Albert GIRARD (1595–1632) kommt 1629 in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre* auf die Idee, die Exponenten vor die Basen zu schreiben; dabei findet sich neben (1)18 für 18^1 auch $(\frac{3}{2})49$ für $49^{\frac{3}{2}}$. Im oben (Seite 41f.) zitierten Brief Isaac NEWTONS (1643–1727) vom 13. Juni 1676 können wir nun die damals ausgelassene Stelle nachtragen:
»so schreibe ich für $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$ usw.

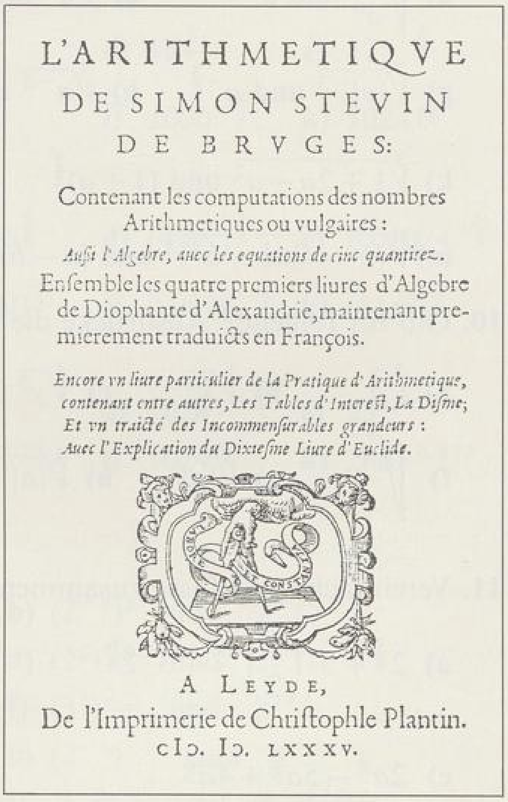
L'ARITHMETIQVE
DE SIMON STEVIN
DE BRVGES:
Contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires :
Aussi l'Algebre, auec les equations de cinc quantitez.
Ensemble les quatre premiers liures d'Algebre de Diophante d'Alexandrie, maintenant premierement traduicts en François.
Encore vn liure particulier de la Pratique d'Arithmetique, contenant entre autres, Les Tables d'Interest, La Disme; Et vn traicté des Incommensurables grandeurs : Auec l'Explication du Dixiesme Liure d'Euclide.
A LEYDE,
De l'Imprimerie de Christophle Plantin.
CIↃ. IↃ. LXXXV.

Abb. 62.1 Titelblatt der *L'Arithmétique* des Simon STEVIN aus dem Jahre 1585*

* Die Arithmetik | des Simon Stevin | aus Brügge. | Enthaltend die Rechnungen mit arithmetischen oder gewöhnlichen Zahlen: | Auch die Algebra, mit Gleichungen mit 5 Unbekannten. | Zusammen mit den ersten vier Büchern der Algebra | des Diophant von Alexandria, jetzt | erstmals ins Französische übersetzt. | Dazu noch ein besonderes Buch über die Handhabung der Arithmetik, | enthaltend unter anderen die Zinstafeln, den Zehnten, | und eine Abhandlung über die inkommensurablen Größen: | Mit der Erklärung des zehnten Buchs von Euklid. | Zu Leiden | aus der Druckerei des Christophle Plantin. | 1585.
Das Motto in der Vignette lautet: Labore et constantia – Durch Arbeit und Beständigkeit

$a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{5}{3}}$«. In diesem Brief teilt NEWTON auch den allgemeinen binomischen Lehrsatz mit, nämlich die Berechnung von $\overline{P+PQ}\}^{\frac{m}{n}}$, d.h. von $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ durch eine unendliche Reihe. John WALLIS (1616–1703) hat ihn 1685 durch Aufnahme in seinen *Treatise of Algebra* bekanntgemacht. In NEWTONS *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* von 1687 wird von gebrochenen Exponenten, auch in allgemeiner Form, Gebrauch gemacht. Klipp und klar formuliert aber als erster 1706 William JONES (1675–1749) in seiner *Synopsis Palmariorum Matheseos*: »$\sqrt[r]{a^n}$ is more Naturally express'd by $a^{\frac{n}{r}}$.« Dort wird auch das Rechnen mit gebrochenen Exponenten gründlich behandelt.

Aufgaben

1. Definition 9 aus Buch V der *Elemente* von EUKLID lautet: »Wenn drei Größen in stetiger Proportion stehen, dann sagt man von der ersten, daß sie zur dritten zweimal im Verhältnis stehe wie zur zweiten.«
Modern ausgedrückt: $a:b = b:c \Rightarrow a:c = (a:b)^2$.

Beweise die Richtigkeit der aufgestellten Beziehung.

2. Definition 10 aus Buch V der *Elemente* von EUKLID lautet: »Wenn vier Größen in stetiger Proportion stehen, dann sagt man von der ersten, daß sie zur vierten dreimal im Verhältnis stehe wie zur zweiten und ähnlich immer der Reihe nach je nach der vorliegenden Proportion.«
Modern ausgedrückt: $a:b = b:c = c:d \Rightarrow a:d = (a:b)^3$.

Beweise die Richtigkeit der aufgestellten Beziehung.

3.6 Das Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition 58.2 für Potenzen mit rationalen Exponenten ist erst dann voll gerechtfertigt, wenn man mit den so definierten Potenzen nach denselben Regeln rechnen kann wie mit Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.
Wir überprüfen das der Reihe nach:

I. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$; $m, n \in \mathbb{N}$?

Wir betrachten zunächst Exponenten mit gleichnamigen Brüchen.

Nach Definition 58.2 gilt $a^{\frac{p}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p$ und $a^{\frac{q}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^q$.
Damit können wir schreiben

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p \cdot \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^q = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{p+q} = a^{\frac{p+q}{m}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{m}}.$$

Sind die Exponenten ungleichnamig, dann erweitern wir:

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pn}{mn}} \cdot a^{\frac{qm}{mn}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}}.$$