Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

3.6 Das Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

$a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{5}{3}}$«. In diesem Brief teilt NEWTON auch den allgemeinen binomischen Lehrsatz mit, nämlich die Berechnung von $\overline{P+PQ}\}^{\frac{m}{n}}$, d.h. von $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ durch eine unendliche Reihe. John WALLIS (1616–1703) hat ihn 1685 durch Aufnahme in seinen *Treatise of Algebra* bekanntgemacht. In NEWTONS *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* von 1687 wird von gebrochenen Exponenten, auch in allgemeiner Form, Gebrauch gemacht. Klipp und klar formuliert aber als erster 1706 William JONES (1675–1749) in seiner *Synopsis Palmariorum Matheseos*: »$\sqrt[r]{a^n}$ is more Naturally express'd by $a^{\frac{n}{r}}$.« Dort wird auch das Rechnen mit gebrochenen Exponenten gründlich behandelt.

Aufgaben

1. Definition 9 aus Buch V der *Elemente* von EUKLID lautet: »Wenn drei Größen in stetiger Proportion stehen, dann sagt man von der ersten, daß sie zur dritten zweimal im Verhältnis stehe wie zur zweiten.«
   Modern ausgedrückt: $a:b = b:c \Rightarrow a:c = (a:b)^2$.

   Beweise die Richtigkeit der aufgestellten Beziehung.
2. Definition 10 aus Buch V der *Elemente* von EUKLID lautet: »Wenn vier Größen in stetiger Proportion stehen, dann sagt man von der ersten, daß sie zur vierten dreimal im Verhältnis stehe wie zur zweiten und ähnlich immer der Reihe nach je nach der vorliegenden Proportion.«
   Modern ausgedrückt: $a:b = b:c = c:d \Rightarrow a:d = (a:b)^3$.

   Beweise die Richtigkeit der aufgestellten Beziehung.

3.6 Das Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition 58.2 für Potenzen mit rationalen Exponenten ist erst dann voll gerechtfertigt, wenn man mit den so definierten Potenzen nach denselben Regeln rechnen kann wie mit Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.
Wir überprüfen das der Reihe nach:

I. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$; $m, n \in \mathbb{N}$?

Wir betrachten zunächst Exponenten mit gleichnamigen Brüchen.

Nach Definition 58.2 gilt $a^{\frac{p}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p$ und $a^{\frac{q}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^q$.
Damit können wir schreiben
$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p \cdot \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^q = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{p+q} = a^{\frac{p+q}{m}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{m}}.$$
Sind die Exponenten ungleichnamig, dann erweitern wir:
$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pn}{mn}} \cdot a^{\frac{qm}{mn}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}}.$$

II. Potenzieren einer Potenz

Gilt $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pq}{mn}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$; $m, n \in \mathbb{N}$?

Für $q \geqq 2$ gilt $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^q = a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{p}{m}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{p}{m}+\cdots+\frac{p}{m}} = a^{\frac{pq}{m}}$.

Offenbar ist dies auch für $q = 1$ und $q = 0$ richtig.

Für $q = -1$ gilt $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{-1} = \dfrac{1}{a^{\frac{p}{m}}} = \dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{-p} = a^{\frac{-p}{m}}$. Dabei wendet man der Reihe nach Definition 24.2, Satz 58.1, Satz 25.2 und Definition 58.2 an.

Ist $q \leqq -2$, dann erhält man $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^q = \left[\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{-q}\right]^{-1} = \left[a^{\frac{-pq}{m}}\right]^{-1} = a^{\frac{pq}{m}}$.

Betrachten wir nun $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = \left(\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^q\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{pq}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} =: x$, dann gilt $x^n = a^{\frac{pq}{m}}$ und somit $x^{nm} = a^{pq}$.

Das aber bedeutet nach Satz 59.1, daß $x = a^{\frac{pq}{mn}}$ ist, was zu beweisen war.

III. Potenzieren eines Produkts

Gilt $(a \cdot b)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}}$ für $a, b > 0$ *und* $p \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$?

Nennen wir die linke Seite x und die rechte y, dann gilt

$x^m = (ab)^p = a^p \cdot b^p$ und wegen II

$y^m = \left(a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}}\right)^m = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^m \cdot \left(b^{\frac{p}{m}}\right)^m = a^p \cdot b^p$.

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichung gilt $x = y$.

IV. Potenzieren eines Quotienten

Gilt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{m}} = \dfrac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}$ für $a, b > 0$ *und* $p \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$?

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{m}} = (ab^{-1})^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot (b^{-1})^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{-p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{-\frac{p}{m}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}.$$

V. Division von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $\dfrac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{q}{n}}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$; $m, n \in \mathbb{N}$?

$$\frac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{q}{n}}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot \left(a^{\frac{q}{n}}\right)^{-1} = a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{-\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}+\left(-\frac{q}{n}\right)} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten auch für die neu definierten Potenzen mit rationalen Exponenten gelten. Wir merken uns:

Satz 65.1: Für $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt

I. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ **V.** $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

II. $(a^r)^s = a^{rs}$

III. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ **IV.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

Bemerkung: Satz 65.1 gilt auch für $a = 0$ bzw. $b = 0$, solange kein Nenner null wird oder nicht der undefinierte Term 0^0 entsteht.

Beispiele:

zu I: $a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)} = a^{-\frac{2}{6}} = a^{-\frac{1}{3}}$

zu II: $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{8}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}} = a^{\frac{3}{4}}$

zu III: $(3a)^{\frac{4}{7}} = 3^{\frac{4}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

zu IV: $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{4}{7}} = \dfrac{a^{\frac{4}{7}}}{2^{\frac{4}{7}}} = 2^{-\frac{4}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

zu V: $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}}$

Beachte: Bei allen Umformungen ist darauf zu achten, daß die auftretenden Basen nicht negativ sind. Zur Verdeutlichung dienen die folgenden **Beispiele:**

zu II:

1) $(a^3)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$. Hier ist nur $a \in \mathbb{R}_0^+$ möglich, die Umformung also problemlos.

2) $(a^2)^{\frac{1}{6}} = (|a|^2)^{\frac{1}{6}} = |a|^{\frac{2}{6}} = |a|^{\frac{1}{3}}$, falls $a \in \mathbb{R}$ gilt, was bei $(a^2)^{\frac{1}{6}}$ tatsächlich möglich ist.

zu III:

Bei $(a \cdot b)^{\frac{5}{3}}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$(a\cdot b)^{\frac{5}{3}} = \begin{cases} a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{\frac{5}{3}} \text{ für } a,\ b\in\mathbb{R}_0^+ \\ (-a)^{\frac{5}{3}}\cdot(-b)^{\frac{5}{3}} \text{ für } a,\ b\in\mathbb{R}^- \end{cases}$$

Dafür schreibt man kurz:

$$(a\cdot b)^{\frac{5}{3}} = |a|^{\frac{5}{3}}\cdot|b|^{\frac{5}{3}} \text{ für } a,\ b\in\mathbb{R}\wedge a\cdot b\geqq 0.$$

Aufgaben

1. a) $2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}$ **b)** $4^{\frac{3}{4}}\cdot 4^{-\frac{1}{4}}$ **c)** $27^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{\frac{1}{6}}$ **d)** $125^{\frac{5}{6}}\cdot 125^{0,5}$

e) $256^{\frac{1}{12}}\cdot 256^{\frac{7}{24}}\cdot 256^{-\frac{1}{4}}$ **f)** $5^{1,5}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}$ **g)** $341^{-0,5}\cdot 341^{\frac{5}{7}}\cdot 341^{-\frac{3}{14}}$

2. a) $\dfrac{9^{\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ **b)** $216^{-\frac{1}{4}}:216^{\frac{5}{12}}$ **c)** $\dfrac{32^{0,3}}{32^{0,5}}$ **d)** $17^{\frac{7}{6}}:17^{-\frac{3}{4}}$

3. a) $a^{\frac{3}{5}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$ **b)** $x^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}}$ **c)** $b^{0,25}\cdot b^{\frac{1}{3}}$ **d)** $y^{\frac{11}{8}}\cdot y^{-1,5}\cdot y^{\frac{3}{4}}$

e) $\dfrac{a^{-2}}{a^{\frac{3}{5}}}$ **f)** $\dfrac{m^{1,6}\cdot m^{\frac{1}{3}}}{m}$ **g)** $\dfrac{x^{4,5}}{x^{\frac{11}{4}}\cdot x^{\frac{5}{6}}}$ **h)** $\dfrac{z^{-2}\cdot z^{\frac{13}{3}}}{z^{1,5}\cdot z^{-\frac{1}{6}}}$

4. a) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6$ **b)** $\left(25^{\frac{3}{4}}\right)^{-2}$ **c)** $\left(16^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$ **d)** $\left(243^{-\frac{3}{4}}\right)^{-1,6}$

e) $(a^{-1})^{\frac{1}{2}}$ **f)** $(b^{0,4})^{\frac{5}{6}}$ **g)** $\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{8}}$ **h)** $\left[\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-0,8}$

5. a) $(16\cdot 64)^{\frac{3}{4}}$ **b)** $(125\cdot 17)^{-\frac{1}{3}}$ **•c)** $(96\cdot 54\cdot 144)^{\frac{2}{5}}$

d) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$ **e)** $\left(\dfrac{64}{81}\right)^{-\frac{2}{3}}$ **f)** $\left(\dfrac{24\cdot 36}{18\cdot 216}\right)^{\frac{5}{4}}$

6. Alle vorkommenden Variablen seien positiv.

a) $(ab^2)^{\frac{5}{2}}$ **b)** $(x^6y^2)^{\frac{3}{4}}$ **c)** $(u^8v^{-6})^{0,25}$ **d)** $(a^{-3}b^9c)^{-\frac{2}{3}}$

e) $\left(\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{z^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ **f)** $\left(\dfrac{x^{-0,6}\cdot z^{1,2}}{y^{1,2}}\right)^{\frac{5}{3}}$ **g)** $\left(\dfrac{(ab)^{\frac{3}{5}}}{a^4b^{-0,4}}\right)^{-2,5}$ **h)** $\left(\dfrac{p^{\frac{1}{6}}\cdot q^{-0,3}}{q^{\frac{1}{5}}(p^{-1}r^{0,5})^{\frac{1}{2}}}\right)^6$

• **7.** Hieronymus DE HANGEST († 1538), ein Kanonikus und Universitätsprofessor aus Paris, schreibt 1508 in seinem *Liber proportionum* folgende Gleichungen. Untersuche, ob sie stimmen.

a) $2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\frac{3}{2} : 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$ **c)** $2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 72^{\frac{1}{6}}$ **d)** $3^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{6}}$

8. Michael STIFEL behandelt 1544 in seiner *Arithmetica integra* die folgenden Gleichungen. Untersuche, ob die erste stimmt, und löse die beiden anderen.*

a) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{27}{8}$ **b)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = \frac{729}{64}$ ⁝ **c)** $\left(\frac{27}{8}\right)^{x} = \frac{2187}{128}$

9. a) $\left(\frac{a^3b}{c}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{ab^2}{c^2}\right)^{\frac{4}{5}}$ mit $a, b, c > 0$ **b)** $\left(12m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}\right) : \left(36m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$

10. a) $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^2$ **b)** $\left(y^{\frac{3}{5}} + y^{-\frac{2}{5}}\right) \cdot \left(y^{-\frac{3}{5}} - y^{\frac{2}{5}}\right)$ **c)** $\left(s^{\frac{7}{2}} + t^{0,75}\right)\left(t^{\frac{3}{4}} - s^{3,5}\right)$

11. Ordne das Ergebnis nach fallenden Potenzen:

$\left(a^{\frac{7}{8}} - 2a^{-\frac{3}{4}} + 3a^{-\frac{7}{6}}\right) \cdot \left(a^{\frac{23}{24}} - 2a^{-\frac{13}{12}} + 3a^{-\frac{3}{2}}\right)$

Zu den Aufgaben 12 bis 46:

Schreibe die Wurzeln mit Hilfe gebrochener Exponenten und löse dann die Aufgabe. Verwende im Ergebnis ggf. wieder das Wurzelzeichen. Die Grundmengen für die vorkommenden Variablen seien jeweils maximal, also z. B. $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}$.

12. a) $\sqrt[5]{2^{10}}$ **b)** $\sqrt[4]{\sqrt{0{,}00000256}}$ **c)** $\sqrt[10]{\sqrt[3]{531441}}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{6^{60}}}}$

13. a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ **d)** $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$

e) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{8}$ **f)** $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{12}$ **g)** $\sqrt[10]{2} \cdot \sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[10]{8} \cdot \sqrt[10]{16}$

⁝ **14.** Berechne die in Aufgabe 57/**4** angegebene 8. Wurzel mit Hilfe des Divisionsverfahrens. Beachte dabei $\sqrt[8]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$.

15. a) $\sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{32a}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}5a^4} \cdot \sqrt[3]{2a^2}$ **c)** $\sqrt[4]{2a^2} \cdot \sqrt[4]{8a^{10}}$

d) $\sqrt[5]{ab^3} \cdot \sqrt[5]{a^3b} \cdot \sqrt[5]{ab}$ **e)** $\sqrt[6]{x^5y^2} \cdot \sqrt[6]{x^2y^7} \cdot \sqrt[6]{x^{-1}y^3}$

f) $\sqrt[4]{\sqrt{2}m^7n^{-3}} \cdot \sqrt[4]{4m^{-2}n} \cdot \sqrt[4]{2\sqrt{2}m^3n^{-2}}$

* STIFEL schreibt natürlich keine Gleichungen mit unbekannten Exponenten, sondern fragt nach dem wievielfachen Verhältnis (im Sinne von ARCHIMEDES [vgl. Seite 62]), das zwischen den Brüchen besteht.

16. a) $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^6}}$ b) $\sqrt[6]{\frac{x^{12}}{y^{18}}}$ c) $\sqrt[4]{\frac{16n^{12}}{m^8}}$ d) $\sqrt[5]{\frac{p^5q^{10}}{r^{20}}}$

e) $\sqrt[4]{(a^5b):(ab^9)}$ f) $\sqrt[7]{(256x^3y^{12}):(2x^{-4}y^5)}$ g) $\sqrt[3]{\left(\frac{(9u)^2v}{w^5}\right)^2:\left(\frac{3vw}{u}\right)^5}$

17. a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{16}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{62{,}5}}{\sqrt[4]{1000}}$

18. a) $\frac{\sqrt[5]{a^7}}{\sqrt[5]{a^2}}$ b) $\frac{\sqrt[7]{b^3}}{\sqrt[7]{b^{10}}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{ab^5}}{\sqrt[4]{ab}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{40a^2b}}{\sqrt[3]{5a^5b^4}}$

19. Vereinfache durch teilweises Radizieren.

Beispiel: $\mathbf{\sqrt[5]{320} = (2^5 \cdot 10)^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot 10^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot \sqrt[5]{10}}$

a) $\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt[5]{160}$ c) $\sqrt[4]{160}$ d) $\sqrt{176}$ e) $\sqrt[6]{7290}$

f) $\sqrt[4]{1250}$ g) $\sqrt{62{,}5}$ h) $\sqrt[3]{1{,}715}$ i) $\sqrt[5]{0{,}243}$ k) $\sqrt{13{,}31}$

20. Beispiel: $\mathbf{\sqrt[6]{a^{32}} = (a^{30} \cdot a^2)^{\frac{1}{6}} = |a|^5 \cdot |a|^{\frac{1}{3}} = |a|^5 \cdot \sqrt[3]{|a|}}$

a) $\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt[4]{a^7}$ c) $\sqrt[5]{a^6b^{10}}$ d) $\sqrt[3]{a^{11}b^8}$ e) $\sqrt[10]{a^{13}b^{25}c^7}$

f) $\sqrt[3]{(a-b)^5}$ g) $\sqrt[3]{(a+b)^4}$ h) $\sqrt[5]{(a-2b)^8 \cdot (b+c)^7}$

21. Mache die Nenner rational.

Beispiel: $\mathbf{\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} = \frac{1 \cdot 2^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}}} = \frac{2^{\frac{3}{5}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{8}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ d) $\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$

e) $\frac{5}{\sqrt[4]{5}}$ f) $\frac{6}{\sqrt[5]{27}}$ g) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ h) $6 \cdot \sqrt[4]{\frac{13}{108}}$

22. a) $\sqrt[4]{\frac{3}{8a^3}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{11}{8a}}$ •c) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ ⁝d) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

⁝e) $\sqrt[5]{\frac{(a+b)}{(a-b)^4}}$ f) $\frac{ab^2}{\sqrt[7]{a^5b^{12}}}$ g) $\frac{4a^2b}{\sqrt[4]{8a^2b^3}}$ •h) $\sqrt[3]{\frac{6b}{16a^2(a+b)^{10}}}$

23. **a)** $\sqrt{4^7}$ **b)** $\sqrt[4]{81^3}$ **c)** $\sqrt[5]{32^4}$ **d)** $\sqrt[3]{343^2}$ **e)** $\sqrt[10]{1024^9}$

f) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$ **g)** $\left(\sqrt[4]{9}\right)^2$ **h)** $\left(\sqrt[5]{4}\right)^3$ **i)** $\left(\sqrt{12}\right)^3$ **j)** $\left(\sqrt[6]{0{,}216}\right)^4$

24. **a)** Nicolas CHUQUET († 1488) zeigt 1484 auf folio 48v in seinem *Triparty*, daß sich mehrfache Wurzeln durch eine einzige Wurzel darstellen lassen:

℞.^{2} ℞.^{3} 13. = ℞.^{6} 13. bzw. ℞.^{3} ℞.^{2} ℞.^{5} 12. = ℞.^{30} 12.,

in unserer Schreibweise

$\sqrt{\sqrt[3]{13}} = \sqrt[6]{13}$ bzw. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{12}}} = \sqrt[30]{12}.$

Zeige die Richtigkeit.

b) Drücke durch eine einzige Wurzel aus:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ **2)** $\sqrt[5]{\sqrt{b^3}}$ **3)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$ **4)** $\sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{2ab}}}$ **5)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}$

25. Beweise: Die Reihenfolge ineinandergeschachtelter Wurzeln kann man beliebig vertauschen. Es gilt zum Beispiel: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[k]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}.$

26. Vereinfache unter Anwendung des Satzes aus Aufgabe **25**:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[4]{32}}$ **c)** $\sqrt{\sqrt[7]{9}}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{512}}}$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$ **f)** $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^4}}$ **g)** $\sqrt[3]{\sqrt[10]{x^9}}$ **h)** $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}}}$

27. **a)** $\sqrt[6]{a^3}$ **b)** $\sqrt[4]{a^6}$ **c)** $\sqrt[6]{a^{12}b^3}$ **d)** $\sqrt[24]{a^{18}b^{30}c^6}$

28. **a)** $\sqrt[6]{8}$ **b)** $\sqrt[4]{9}$ **c)** $\sqrt[9]{64}$ **d)** $\sqrt[12]{216}$

e) $\sqrt[8]{729}$ **f)** $\sqrt[10]{625}$ **g)** $\sqrt[6]{0{,}0081}$ **h)** $\sqrt[12]{2{,}56\cdot 10^{-6}}$

29. Zeige, daß sich sowohl das Produkt als auch der Quotient der Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$ stets durch eine einzige Wurzel darstellen lassen.

30. Drücke durch eine einzige Wurzel aus:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$ **b)** $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$ **c)** $\sqrt[3]{2}:\sqrt[4]{3}$ **d)** $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[5]{5}$

e) $\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[6]{7}$ **f)** $\left(\sqrt{2}:\sqrt[4]{5}\right)\cdot\sqrt[1]{3}$ **g)** $\sqrt{3}:\left(\sqrt[4]{2}:\sqrt[5]{\tfrac{2}{9}}\right)$

31. Drücke durch eine einzige Wurzel aus:

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}$ **b)** $\sqrt[3]{y}:\sqrt[4]{y^2}$ **c)** $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

d) $\sqrt[6]{a^{-5}}:\sqrt[4]{a^{-3}}$ **e)** $\sqrt{b}\cdot\sqrt[5]{b^{-2}}\cdot\sqrt[10]{b}$ **f)** $\left(\sqrt{n}\cdot\sqrt[4]{n^3}\right):\sqrt[10]{n^0}$

32. $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4\cdot 3}}=\sqrt[12]{48}$

Drücke ebenso durch eine einzige Wurzel aus:

a) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{5}{\sqrt{5}}}$ **c)** $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$ **d)** $\sqrt{2\sqrt[5]{\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}}}$

e) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ **f)** $\sqrt[5]{b^{-4}\cdot\sqrt[4]{b}}$ **g)** $\sqrt[4]{a^3b\sqrt[6]{a^5b^3}}$ **h)** $\sqrt[5]{a^m\sqrt[3]{a^n\sqrt{a^p}}}$

•• 33. a) $2\sqrt[3]{864}-5\sqrt{33\tfrac{4}{5}}-5\sqrt[3]{0{,}256}+36\sqrt{\tfrac{225}{180}}-8\sqrt[3]{7\tfrac{13}{16}}$

b) $\sqrt[3]{648}-6\sqrt{\tfrac{32}{3}}-18\sqrt[3]{\tfrac{64}{243}}+32\sqrt{1\tfrac{19}{128}}+20\sqrt[3]{0{,}192}$

•• 34. a) $\left(4\sqrt[3]{54}-\tfrac{5}{4}\sqrt[3]{256}+\sqrt[3]{500}\right)\left(3\sqrt[3]{108}-5\sqrt[3]{128}\right)$

b) $\left(6\sqrt[4]{432}-\sqrt[4]{243}\right)\left(4\sqrt[4]{768}+3\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}-5\sqrt[4]{48}\right)$

35. a) $\sqrt[8]{4}+9\sqrt[4]{\tfrac{32}{81}}-8\sqrt[12]{\tfrac{1}{512}}$ **b)** $\sqrt[9]{8}+5\sqrt[3]{0{,}128}+3\sqrt[6]{\tfrac{4}{729}}$

36. a) $8\sqrt[8]{\tfrac{1}{16}}-3\sqrt[3]{\sqrt{512}}+\sqrt[5]{4\sqrt{2}}$ **b)** $6\sqrt[6]{\tfrac{1}{81}}+2\sqrt{3\sqrt[3]{243}}-3\sqrt{2\sqrt[3]{1{,}25}}$

37. a) $5\sqrt[8]{a^6}+3\sqrt[4]{a^7}-8\sqrt[12]{a^9}$ **b)** $3\sqrt[12]{a^8}+4\sqrt[3]{a^5}-7\sqrt[15]{a^{10}}$

• 38. a) $\dfrac{3b}{a^2}\sqrt[4]{\dfrac{a^{13}}{b}}-\dfrac{2b^2}{a}\sqrt[12]{\dfrac{a^{27}}{b^{15}}}$ **b)** $\dfrac{x}{y}\cdot\sqrt[15]{\dfrac{x^{48}}{y^3}}+\dfrac{2y^2}{x^3}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x^{26}}{y^6}}$

39. a) $\dfrac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[3]{a}}+\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}}+2\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[12]{a^{11}}}{\sqrt{a}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[12]{a^5}}+\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}}-3\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$

40. a) $\sqrt[3]{x^3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x^2\sqrt{x\sqrt{x^5}}}$ **b)** $\sqrt{y^3\sqrt{y\sqrt{y}}}:\sqrt[3]{y^2\sqrt[3]{y^2}}$

41. a) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{a^4c^5}{b^3}}:\sqrt[4]{\dfrac{a^2b}{c^3}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{b\sqrt{b}}}{\sqrt[4]{a^2c^5}}$ **b)** $\left(\sqrt[4]{\dfrac{bc^3}{a^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{b^5c}}\right):\sqrt[3]{\dfrac{ac}{b}}$

42. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen. Unterscheide dabei, wenn nötig, die Fälle $x \geqq 0$ und $x<0$.

a) $4\sqrt{x}-\sqrt[6]{64x^3}=6$ **b)** $\sqrt[9]{8x^3}+\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}}-6=0$

c) $4\cdot\sqrt[4]{x^2}-2\cdot\sqrt[12]{x^6}=6$ **d)** $2\sqrt[4]{x^2}=7\sqrt[6]{x^3}-20$

e) $a\sqrt{bx}+b\sqrt[4]{a^2x^2}=ab(a-b), \quad 0<b<a$

f) $ax+b\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x^6}}=b^2-a^2, \ 0<a<b$

g) $2\sqrt[3]{a^2x^3\sqrt[4]{ab^3}}+\sqrt[4]{a^3bx^4}-\sqrt{a^3b}=0, \quad a>0, b>0$

h) $x\sqrt[3]{ab^2\sqrt[4]{a^2b}}-3\sqrt[4]{a^2b^3x^4}+\sqrt{a^2b^3}=0, \quad a>0, b>0$

i) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}=x$

k) $x^{-1}\cdot\sqrt{x\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x^{-1}}$

Aus Wilhelm Winter: *Algebra / Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen* (1. Auflage 1890), womit der Vater des dritten der Autoren der vorliegenden *Algebra 10* Algebra lernte, stammen die Aufgaben **43** bis **46**.*

43. $\sqrt[3]{x^2\sqrt{\frac{1}{x}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt{\frac{1}{x}}}}$

44. $\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a}\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}:\sqrt{\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a\sqrt[4]{a}}\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a}}}}}$

45. $$\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}\sqrt{\dfrac{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x}}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\sqrt{\dfrac{x\sqrt{x\sqrt{x}}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}$$

46. $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[4]{x}}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt{x}-x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}+x}}}$

* Wilhelm Winter (6.1.1851 Neuburg a.d. Donau – 26.11.1941 München) begann seine Tätigkeit als Lehrer für Mathematik und Naturkunde 1875 in Straubing, wurde noch im gleichen Jahr nach Kaiserslautern versetzt, dann 1886 als K. Gymnasialprofessor nach Regensburg und 1896 nach Neuburg an der Donau. Von 1902 bis 1919 wirkte er am K. Wilhelmsgymnasium in München. Wegen seiner Verdienste wurde er 1908 zum K. Studienrat ernannt. [K. = königlich]

47. Die wohltemperierte Stimmung. Unter *Stimmung* versteht man in der Musik die Festlegung der absoluten und relativen Tonhöhe. Erstere wurde im Mai 1939 in London auf der Internationalen Stimmtonkonferenz so festgelegt, daß der Kammerton a^1 die Frequenz 440 Hz besitzt.* Die relative Tonhöhe wird durch die Angabe des *Intervall*s beschrieben, worunter man in der Musik sowohl den Tonhöhenabstand wie auch das Verhältnis der Schwingungszahlen (kurz: das Schwingungsverhältnis) versteht. Eine Oktave ist durch das Schwingungsverhältnis 2 : 1 festgelegt. Zu Beginn des 18. Jh.s wurde die Oktave in 12 gleich große Intervalle eingeteilt. Jedes solche Intervall heißt *Halbtonschritt*, die erzeugte Stimmung *gleichschwebende Temperatur*** oder *wohltemperierte Stimmung*. Sie hat sich im Abendland durchgesetzt und bildet auch die Grundlage der Zwölftonmusik.

a) Wie groß sind ein Halbton- und ein Ganztonschritt?

b) Der Kammerton a^1 bildet mit den Tönen a^2, a^3, … aufsteigende bzw. mit den Tönen a, A, A_1, … absteigende Oktaven. Berechne die Frequenzen der aufgeführten Töne.

c) Berechne die Frequenzen aller im Intervall $a^1 - a^2$ auftretenden Halbtöne und runde sie auf ganze Zahlen.

d) In der *reinen Stimmung*, die heute nur noch von theoretischem Interesse ist, versteht man unter einer Quarte bzw. einer Quinte das Intervall 4 : 3 bzw. 3 : 2.

1) Berechne die Frequenz desjenigen Tons, der mit a^1 eine reine Quarte bzw. eine reine Quinte bildet. Wie heißen diese Töne?

2) Welche Frequenz haben diese Töne in der wohltemperierten Stimmung?

e) Zeige, daß in der wohltemperierten Stimmung 12 Quinten genau 7 Oktaven ergeben. Gilt dies auch in der reinen Stimmung?

* Der Name *Kammerton* rührt davon her, daß er die absolute Tonhöhe der Stimmung für die Kammermusik festlegte im Gegensatz zum früher tieferen Opern- und höheren Chorton. Der Ausdruck *Kammermusik* wurde um 1600 in Italien als *mụsica da cạmera* geprägt; sie umfaßte alle für die höfische »Kammer«, d. h. die Hofhaltung, bestimmten weltlichen Musikarten. *Kammer* bedeutet ursprünglich das fürstliche Privatgemach, seit dem 12. Jh. die fürstliche Finanzverwaltung; das Wort leitet sich über das lateinische *cạmera* vom griechischen καμάρα (kamára) = *Raum mit gewölbter Decke* ab.

** temperatura (lat.) = gehörige Mischung, gehörige Beschaffenheit