Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

3.7 Potenzen mit irrationalen Exponenten

3.7 Potenzen mit irrationalen Exponenten

Die Potenz a^x hat bis jetzt nur einen Sinn, wenn x eine rationale Zahl ist. So ist z.B. $3^{\sqrt{2}}$ immer noch ein sinnloses Symbol. Man kann jedoch den Potenzbegriff in naheliegender Weise auf irrationale Exponenten so ausweiten, daß die Rechengesetze für Potenzen auch für diesen Fall Gültigkeit behalten.
Wie wir wissen, läßt sich jede irrationale Zahl als unendliche nichtperiodische Dezimalzahl verstehen. So ist z.B.

$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,37\ldots$
$\pi = 3{,}141\,592\,653\,59\ldots$*

Das bedeutet, daß es zu jeder Irrationalzahl ϱ eine unendliche Folge von endlichen Dezimalzahlen r_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ gibt, die der Irrationalzahl ϱ beliebig nahe kommen.
Für $\varrho = \sqrt{2}$ sieht eine solche Folge so aus:

$r_1 = 1; \quad r_2 = 1{,}4; \quad r_3 = 1{,}41; \quad r_4 = 1{,}414; \quad \ldots$

Wir bilden nun die Folge der Zahlen $3^{r_1}, 3^{r_2}, 3^{r_3}, 3^{r_4}, \ldots$, deren Näherungswerte bis zu der Stelle angegeben sind, die sich beim nächsten Schritt ändert:

$$\begin{aligned}
3^{1} &= 3\\
3^{1,4} &= 4{,}6\\
3^{1,41} &= 4{,}70\\
3^{1,414} &= 4{,}727\\
3^{1,414\,2} &= 4{,}728\,73\\
3^{1,414\,21} &= 4{,}728\,78\\
3^{1,414\,213} &= 4{,}728\,801\\
3^{1,414\,213\,5} &= 4{,}728\,804\,0\\
3^{1,414\,213\,56} &= 4{,}728\,804\,37\\
3^{1,414\,213\,562} &= 4{,}728\,804\,385\\
3^{1,414\,213\,562\,3} &= 4{,}728\,804\,387\,4\\
3^{1,414\,213\,562\,37} &= 4{,}728\,804\,387\,82
\end{aligned}$$

Es hat den Anschein, als ob die Folge der Zahlen 3^{r_i} die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl aufbauen würde. Man kann tatsächlich zeigen, daß dem so ist. Der Beweis hierfür überschreitet aber unsere Möglichkeiten. Der durch diese Dezimalentwicklung entstehenden reellen Zahl gibt man das Zeichen $3^{\sqrt{2}}$.
Die vorstehende Überlegung führt durch Verallgemeinerung zur Definition der Potenz mit irrationalem Exponenten:

* David und Gregory Chudnovsky von der Columbia-Universität in New York haben, einer Pressenotiz vom 21.9.1989 zufolge, die Zahl π auf 1 Milliarde Stellen nach dem Komma berechnet.

Definition 74.1: Ist ϱ eine Irrationalzahl mit der Folge der rationalen Näherungszahlen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ und ist a positiv, dann ist a^ϱ diejenige Zahl, der sich die Folge $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ beliebig nähert. Ferner gelte $0^\varrho := 0$ für $\varrho > 0$.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß die Definition von a^ϱ unabhängig von der Wahl der Folge ist, mit der man ϱ annähert.

Mit der vorstehenden Definition ist nun das Symbol a^x für jede reelle Zahl x definiert. Man vergesse jedoch nicht, daß bis auf wenige Ausnahmen, nämlich $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, die Basis a positiv sein muß.

Die Frage, ob $3^{\sqrt{2}}$ rational oder irrational ist, ist schwer zu entscheiden. Seltsamerweise kann man aber ohne Schwierigkeit zeigen, daß es sogar Fälle gibt, bei denen die irrationale Potenz einer Irrationalzahl eine rationale Zahl liefert. Ist nämlich $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ rational, dann haben wir einen solchen Fall. Ist aber $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ irrational, dann bilden wir $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ und erhalten $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, also eine rationale Zahl. Somit ist entweder $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ oder $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ ein Beispiel für eine Potenz mit irrationaler Basis und irrationalem Exponenten, die einen rationalen Wert hat.

Bei der vorstehenden Überlegung haben wir so getan, als ob die Rechengesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten gelten würden. Das ist tatsächlich der Fall, was sich aber nur mit einigem Aufwand zeigen läßt. Wir begnügen uns daher mit einem Beispiel und zeigen die Gültigkeit der Regel I für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis.
Sind ϱ bzw. σ durch die Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ bzw. $s_1, s_2, s_3, \ldots$ definiert, dann definiert $r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3, \ldots$ die reelle Zahl $\varrho + \sigma$. Dem Produkt $a^\varrho \cdot a^\sigma$ ist die Folge $a^{r_1} \cdot a^{s_1}, a^{r_2} \cdot a^{s_2}, a^{r_3} \cdot a^{s_3}, \ldots$ zugeordnet. Das ist aber wegen der Gültigkeit von Regel I für rationale Exponenten die Folge $a^{r_1+s_1}, a^{r_2+s_2}, a^{r_3+s_3}, \ldots$, die nach Definition 74.1 die Zahl $a^{\varrho+\sigma}$ liefert. Somit gilt $a^\varrho \cdot a^\sigma = a^{\varrho+\sigma}$.

**Zur Geschichte

Das Bewußtsein, daß der Begriff der Potenz mit irrationalen Exponenten einer eigenen Definition bedarf, entwickelte sich erst im letzten Jahrhundert, als man den Begriff der reellen Zahl präzisierte. Immerhin notierte aber Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) auf dem ihm zugegangenen Brief Isaac NEWTONS (1643–1727) vom 13. Juni 1676 (siehe Seite 62f.) neben dem Ausdruck $\overline{P + PQ}\}^{\frac{m}{n}}$: »Potest *m* vel *n* etiam esse fractus vel irrationalis, quod magni est momenti.« [Es kann *m* oder *n* gebrochen oder irrational sein, was von großer Bedeutung ist.] Irrationale Exponenten benützt NEWTON tatsächlich im Brief vom 24. Oktober 1676 an OLDENBURG, der wiederum zur Weiterleitung an LEIBNIZ bestimmt ist: