



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

4.1 Definition

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83532)

4 Potenzfunktionen

4.1 Definition

In den ersten drei Kapiteln haben wir den Potenzbegriff so erweitert, daß wir die Potenz b^q für jede positive Basis b und jede reelle Zahl q als Exponenten bilden können. Stellen wir uns vor, daß entweder die Basis oder der Exponent variabel ist, dann entsteht jeweils ein Funktionsterm. Ist die Basis variabel, dann spricht man von einer Potenzfunktion, ist der Exponent variabel, dann nennt man die zugehörige Funktion Exponentialfunktion. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Potenzfunktionen.

Definition 78.1: Die Funktion $x \mapsto x^q$ mit $q \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge heißt **Potenzfunktion**.

Bemerkung: Die maximale Definitionsmenge hängt von q ab:

- a) Ist q eine natürliche Zahl n , dann ist $D_{\max} = \mathbb{R}$. Die Funktion $x \mapsto x^n$, $D = \mathbb{R}$ heißt auch **Potenzfunktion n -ter Ordnung**, ihr Graph wurde früher auch Parabel n -ter Ordnung genannt.*
- b) Ist q null oder eine negative ganze Zahl, dann ist $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph der Funktion $x \mapsto x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wurde früher auch Hyperbel n -ter Ordnung genannt.* Heute verwendet man das Wort Hyperbel nur noch für $n = 1$. Es handelt sich dabei um den Spezialfall der gleichseitigen Hyperbel, der uns schon als Graph der indirekten Proportionalität bekannt ist.
- c) Ist q keine ganze Zahl, dann ist $D_{\max} = \mathbb{R}_0^+$, falls $q > 0$, und $D_{\max} = \mathbb{R}^+$, falls $q < 0$.

In Tabellenform zusammengefaßt:

$q \in$	\mathbb{N}	\mathbb{Z}_0^-	$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$
$D_{\max} =$	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	\mathbb{R}_0^+	\mathbb{R}^+

Mit einer Wertetabelle kann man sich einen ersten Eindruck vom Verlauf des Graphen verschaffen. Man erkennt, daß es verschiedene Typen von Graphen gibt.

1) $q \in \mathbb{N}$ und q gerade

z. B. $f_2(x) = x^2$

$f_4(x) = x^4$

$f_6(x) = x^6$

...

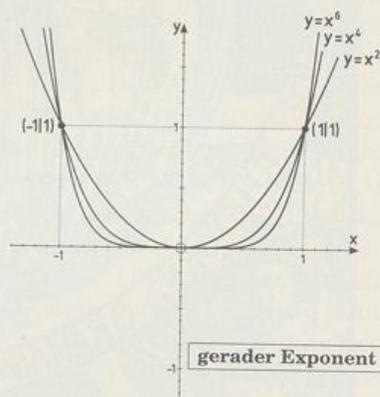


Abb. 78.1 Die Graphen der Potenzfunktionen mit geraden natürlichen Exponenten

* **Parabel** nennt Pierre DE FERMAT (1601–1665) spätestens 1636 jede Kurve $y^n = kx^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$, also unsere Typen 1, 2 und 5. Im Druck erschien diese Verallgemeinerung wohl erstmals 1644 in den *Cogitata*

Alle Graphen liegen (bis auf den Punkt $(0|0)$) im 1. und 2. Quadranten und enthalten die Punkte $(0|0)$, $(1|1)$ und $(-1|1)$.

Im Bereich $] -1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 78.1).

Ersetzt man x durch $-x$, dann ändert sich wegen

$$f_{2k}(-x) = f_{2k}(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

der Funktionsterm, also auch der Graph, nicht; der Graph ist symmetrisch zur y -Achse. Siehe Abbildung 79.1.

2) $q \in \mathbb{N}$ und q ungerade

z. B. $f_1(x) = x^1$

$$f_3(x) = x^3$$

$$f_5(x) = x^5$$

...

Alle Graphen liegen (bis auf den Punkt $(0|0)$) im 1. und 3. Quadranten und enthalten die Punkte $(0|0)$, $(1|1)$ und $(-1|-1)$.

Im Bereich $] -1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 79.2).

Ersetzt man x durch $-x$, dann ändert wegen

$$f_{2k-1}(-x) = -f_{2k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

der Funktionsterm sein Vorzeichen, also ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$. Siehe Abbildung 79.3.

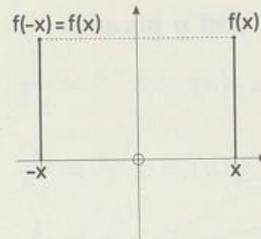


Abb. 79.1 Achsensymmetrie der Graphen der Potenzfunktionen mit geraden natürlichen Exponenten

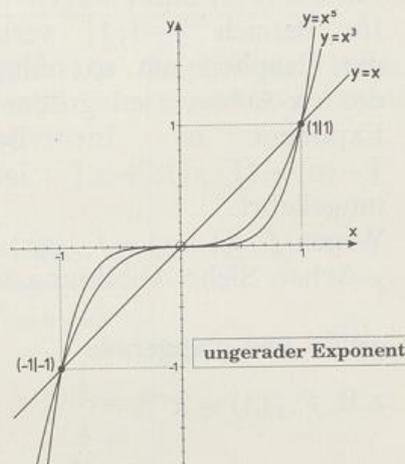


Abb. 79.2 Die Graphen der Potenzfunktionen mit ungeraden natürlichen Exponenten

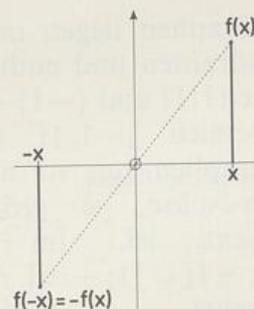


Abb. 79.3 Punktsymmetrie der Graphen der Potenzfunktionen mit ungeraden natürlichen Exponenten

physicomathematica von Marin MERSENNE (1588–1648), der dort einen über ihn für Bonaventura CAVALIERI (1598?–1647) bestimmten, aber nicht angekommenen Brief FERMATS von 1642 im wesentlichen wörtlich abdruckt. Als 1643 Evangelista TORRICELLI (1608–1647) von den französischen Arbeiten erfährt, bricht er seine Studien der Parabeln ab und wendet sich den Kurven $x^m y^n = k$ zu, die er **allgemeine Hyperbel** nennt

3) $q \in \mathbb{Z}^-$ und q gerade

$$\text{z.B. } f_{-2}(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$f_{-4}(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

$$f_{-6}(x) = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$$

...

Alle Graphen liegen im 1. und 2. Quadranten und enthalten die Punkte $(1|1)$ und $(-1|1)$.

Im Bereich $] -1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ ist es umgekehrt.

Wegen $f_{-2k}(-x) = f_{-2k}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, sind die Graphen symmetrisch zur y -Achse. Siehe Abbildung 80.1.

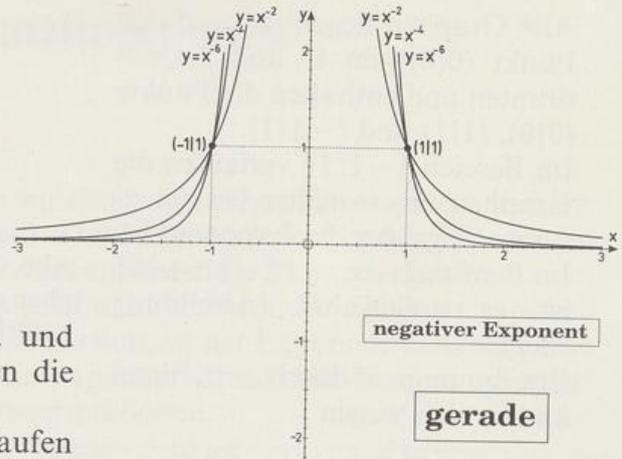


Abb. 80.1 Die Graphen der Potenzfunktionen mit geraden negativen Exponenten

4) $q \in \mathbb{Z}^-$ und q ungerade

$$\text{z.B. } f_{-1}(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$f_{-3}(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$f_{-5}(x) = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

Alle Graphen liegen im 1. und 3. Quadranten und enthalten die Punkte $(1|1)$ und $(-1|-1)$.

Im Bereich $] -1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x -Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ ist es umgekehrt.

Wegen $f_{-(2k-1)}(-x) = -f_{-(2k-1)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, sind die Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$. Siehe Abbildung 80.2.

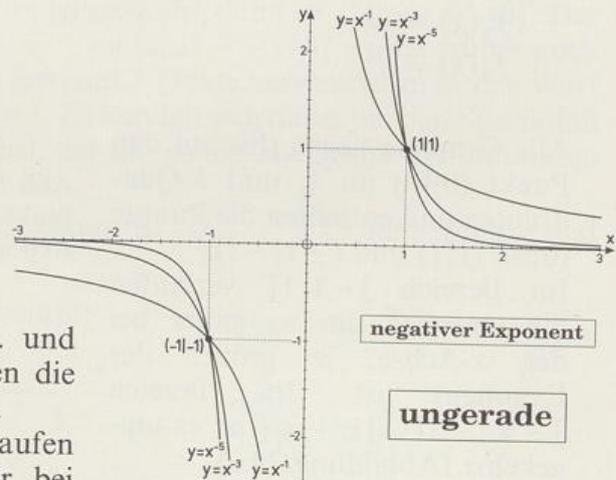


Abb. 80.2 Die Graphen der Potenzfunktionen mit ungeraden negativen Exponenten

(Typen 3, 4 und 6). 1646 informiert er in mehreren Briefen CAVALIERI, FERMAT, MERSENNE und CARCAVY (um 1600–1684). JOHN WALLIS (1616–1703), der 1657 gestand, den Namen FERMAT noch nie gehört zu haben, nennt 1655 in seinem *De sectionibus conicis, nova methodo expositis, tractatus* die Typen 1 und 2 *Paraboloides* (= Parabelartige), 3 und 4 *Hyperboloides*. 5 und 6 behandelt er 1655 in seiner *Arithmetica infinitorum*.

5) $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$

z. B. $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f_{\frac{3}{2}}(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$f_{\frac{1}{3}}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f_{\frac{2}{3}}(x) = x^{\frac{2}{3}}$

...

Alle Graphen liegen (bis auf den Punkt (0|0)) im 1. Quadranten und enthalten die Punkte (0|0) und (1|1).

Im Bereich]0; 1[verlaufen die Graphen um so näher bei der x-Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich]1; +∞[ist es umgekehrt (Abbildung 81.1).

Der Graph mit der Funktionsgleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ ist bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrisch zu dem Graphen mit der Funktionsgleichung $y = x^{\frac{n}{m}}$ (Abbildung 81.2).

6) $q \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$

z. B. $f_{-\frac{1}{2}}(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$f_{-\frac{3}{2}}(x) = x^{-\frac{3}{2}}$

$f_{-\frac{1}{3}}(x) = x^{-\frac{1}{3}}$

$f_{-\frac{2}{3}}(x) = x^{-\frac{2}{3}}$

Alle Graphen liegen im 1. Quadranten und enthalten den Punkt (1|1).

Im Bereich]0; 1[verlaufen die Graphen um so näher bei der x-Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich]1; +∞[ist es umgekehrt (Abbildung 81.3).

Der Graph mit der Funktions-

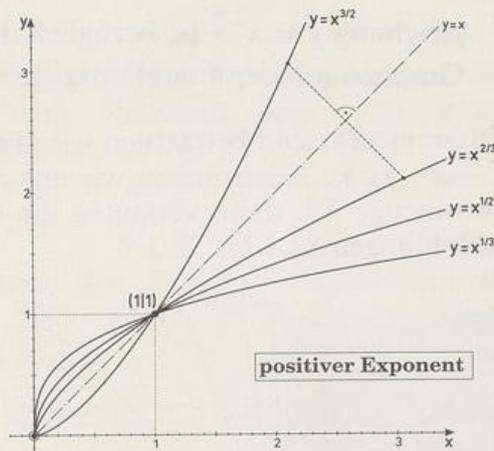


Abb. 81.1 Die Graphen der Potenzfunktionen mit positiven rationalen Exponenten

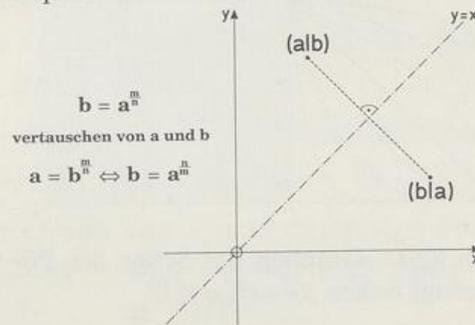


Abb. 81.2 Symmetrie des Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ zum Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{n}{m}}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten

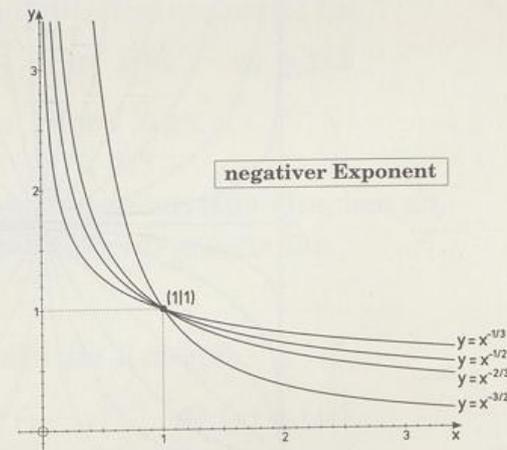


Abb. 81.3 Die Graphen der Potenzfunktionen mit negativen rationalen Exponenten

gleichung $y = x^{-\frac{m}{n}}$ ist bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrisch zu dem Graphen mit der Funktionsgleichung $y = x^{\frac{n}{m}}$.

Zusammenfassend betrachten wir nun noch die Schar der Potenzfunktionen $x \mapsto x^q$, $q \in \mathbb{R}$. Beschränken wir uns auf ihre maximale gemeinsame Definitionsmenge \mathbb{R}^+ , dann verlaufen die Graphen alle im 1. Quadranten. Siehe Abbildungen 82.1 bis 82.3.

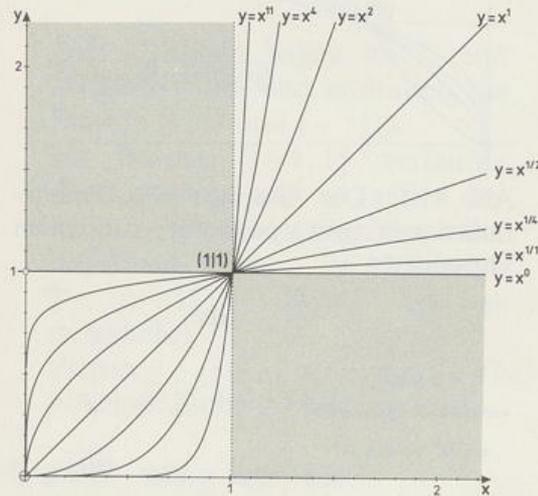


Abb. 82.1 Graphen der Schar der Potenzfunktionen $x \mapsto x^q$, $q > 0$

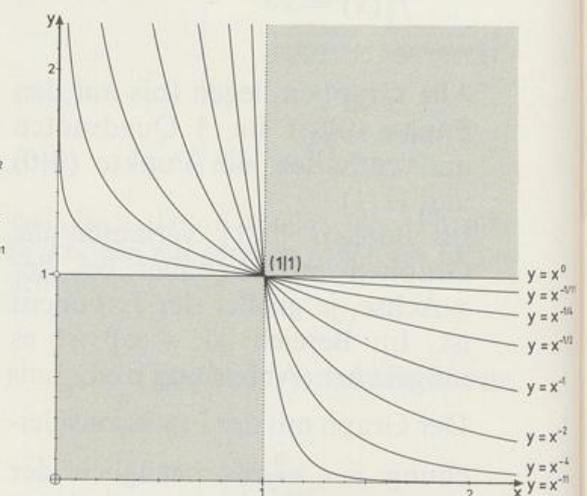


Abb. 82.2 Graphen der Schar der Potenzfunktionen $x \mapsto x^q$, $q < 0$

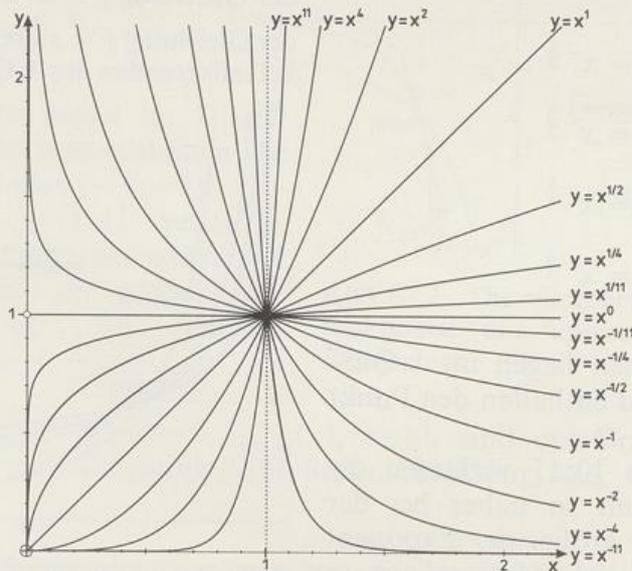


Abb. 82.3 Graphen der Schar der Potenzfunktionen $x \mapsto x^q$, $q \in \mathbb{R}$

Aufgaben

1. Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle den Teil des Graphen mit der folgenden Gleichung, der in dem Rechteck liegt, das durch $-2 \leq x \leq 2 \wedge -9 \leq y \leq 17$ bestimmt ist.

a) $y = x^0$ b) $y = x$ c) $y = x^2$ d)* $y = x^3$ e) $y = x^4$
 f) $y = x^{-1}$ g) $y = x^{-2}$ h) $y = x^{-3}$ i) $y = x^{-4}$

2. Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle den Teil des Graphen mit der folgenden Gleichung, der in dem Rechteck liegt, das durch $0 \leq x \leq 10 \wedge 0 \leq y \leq 27$ bestimmt ist.

a) $y = x^{\frac{1}{2}}$ b) $y = x^{\frac{1}{3}}$ c) $y = x^{\frac{2}{3}}$ d) $y = x^{\frac{3}{2}}$
 e) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ f) $y = x^{-\frac{1}{3}}$ g) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ h) $y = x^{-\frac{3}{2}}$

3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der Schar der Potenzfunktionen und der Graphik auf dem Buchdeckel?

4. Für welche Exponenten ϱ geht der Graph von $x \mapsto x^\varrho$ durch den Punkt

a) (2|8) b) (2|-8) c) (-2|8) d) (-2|-8)?

5. Für welche Exponenten ϱ geht der Graph von $x \mapsto x^\varrho$ durch den Punkt

a) (2|16) b) (3|81) c) (0,5|0,25) d) (4|2) e) (64|4) f) (2|0,25)?

6. Für welche Exponenten ϱ geht der Graph von $x \mapsto x^\varrho$ durch den Punkt

a) (1|1) b) (-1|1) c) (1|-1) d) (-1|-1) e) (0|0)
 f) (0|1) g) (1|0) h) (1|2) i) (2|1)?

7. a) Bestimme mit dem Taschenrechner die auf Hundertstel gerundeten Werte von $x^{\frac{3}{4}}$ für $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, 5, 6$ und zeichne damit den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$.

- b) Bestimme mit Hilfe dieses Graphen Näherungswerte für

1) $0,7^{\frac{3}{4}}$ 2) $1,4^{\frac{3}{4}}$ 3) $2,6^{\frac{3}{4}}$ 4) $3,1^{\frac{3}{4}}$ 5) $3,25^{\frac{3}{4}}$.

- c) Für welche Werte von x nimmt $x^{\frac{3}{4}}$ den Wert

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) 2 4) 3 5) 3,5

an? Lies entsprechende Näherungswerte aus dem Graphen ab.

- d) Bestimme mit Hilfe des Graphen Näherungswerte für

1) $0,5^{\frac{4}{3}}$ 2) $2,5^{\frac{4}{3}}$ 3) $3,75^{\frac{4}{3}}$.

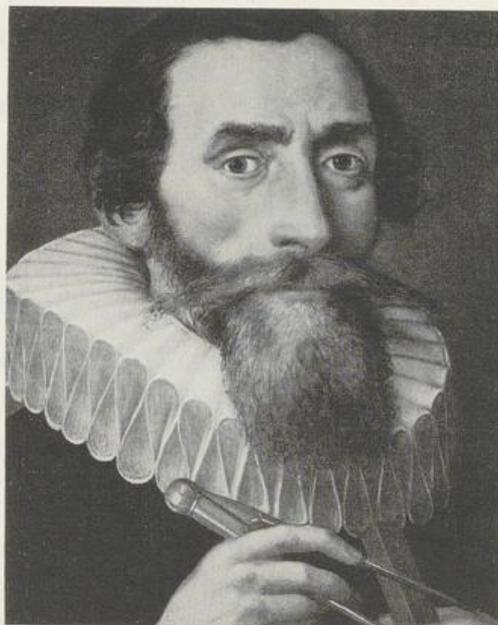
8. Zeichne für $x \in [-5; 5]$ den Graphen der Relation

a) $y = x^{\frac{1}{2}}$ b) $y = |x|^{\frac{1}{2}}$ c) $|y| = x^{\frac{1}{2}}$ d) $|y| = |x|^{\frac{1}{2}}$.

* Dieser Graph heißt **kubische Parabel**. *Parabola cubica* nannte ihn z. B. 1642 Pierre DE FERMAT (1601–1665) im Brief an Bonaventura CAVALIERI (1598?–1647), abgedruckt 1644 in den *Cogitata* des Marin MERSENNE (1588–1648). Bei John WALLIS (1616–1703), der ihn zu entdecken glaubte, heißt er *Paraboloides cubicale (De sectionibus conicis, 1655)*. Siehe auch Fußnote auf Seite 78.

9. a) Zeichne den Graphen mit der Gleichung $|y| = x^{\frac{3}{2}}$. John WALLIS (1616–1703) nannte ihn 1659 **semikubische Parabel***, Isaac NEWTON (1643–1727) spätestens seit 1693 auch **Neilsche Parabel** zu Ehren von William NEIL (1637–1670)**.
- b) Zeichne den Graphen mit der Gleichung $y = |x|^{\frac{2}{3}}$. Auch er ist eine Neilsche Parabel. Wie entsteht er aus dem Graphen der Aufgabe a)?
10. Johannes KEPLER (1571–1630) veröffentlichte 1619 im 3. Kapitel des letzten Buches seiner *Harmonices mundi libri V* – »Fünf Bücher über die Harmonie der Welt« – seine heute als 3. Keplersches Gesetz bezeichnete Entdeckung: »Das Verhältnis der Umlaufzeiten zweier Planeten ist das anderthalbfache Verhältnis der Bahnradien.«***

- a) Zeige, daß die moderne Formulierung »Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der Bahnradien« dasselbe besagt.
- b) Gib die Umlaufzeit T als Funktion des Bahnradius r an. Welche Kurve ist ihr Graph? Wie verändert sich die Umlaufzeit bei Verdopplung (Verdreifachung, Vervierfachung) des Bahnradius?



1610

Jo: Keplerus

Abb. 84.1 Johannes KEPLER (27.12.1571 Weil der Stadt – 15.11.1630 Regensburg)

* semi (lat.) = halb. – curva paraboloidis semicubicalis bei WALLIS, der sehr stolz ist, den parabelartigen Charakter erkannt zu haben; parabola semicubica bei NEWTON (*Enumeratio linearum tertii ordinis* 1704).

** gesprochen ni:l, geschrieben auch NEILE (7.12.1637 Bishopsthorpe – 25.8.1670 Berkshire). Allgemein nennt man jeden Graphen mit einer Gleichung $y^2 = ax^3$ bzw. $y^3 = ax^2$ eine Neilsche Parabel. – 1659 veröffentlichte Frans VAN SCHOOTEN (um 1615–1660) in der zweiten lateinischen Ausgabe der *Géométrie* von René DESCARTES (1596–1650) einen an ihn gerichteten Brief des Niederländers Hendrik VAN HEURAET (1633–1660?) vom 13.1.1659 unter dem Titel *De transmutatione curvarum linearum in rectas* – »Über die Verwandlung gekrümmter Linien in Gerade« –, in dem er eine allgemeine Methode bewies, mit der man die Länge eines beliebigen Stücks einer gekrümmten Kurve berechnen konnte, und die er auch an der semikubischen Parabel vorführte. Christiaan HUYGENS (1629–1695) teilte diese Entdeckung am 9.6.1659 John WALLIS (1616–1703) mit. Dieser antwortete am 4.12.1659 in einem Brief, den er als den letzten der *Tractatus duo. Prior de Cycloide* [...] *Posterior, Epistolaris; in qua agitur de Cissoide* [...] 1659 publizierte. Darin teilte er mit, daß und wie William NEIL bereits 1657 die Länge der semikubischen Parabel berechnet hat. Das Verfahren HEURAETS ist im Gegensatz zum NEILSchen auch auf andere Kurven anwendbar. Bis 1897 glaubte man, William NEIL gebühre die Ehre, als erster die Länge einer vom Kreis verschiedenen gekrümmten Kurve berechnet zu haben. Tatsächlich gelang dies aber Evangelista TORRICELLI (1608–1647) bei der logarithmischen Spirale, wie er Februar 1645 Pierre DE CARCAY (um 1600–1684) mitteilte. DESCARTES war 1637 noch der Meinung, daß dies »nie von Menschen« geleistet werden könne!

*** Abweichend von der Erkenntnis KEPLERS werden hier mit guter Näherung die Umlaufbahnen der Planeten als Kreise um die Sonne aufgefaßt. – Zur Bedeutung des Wortes Verhältnis siehe Seite 62.

11. Druck p und Volumen V einer abgeschlossenen Gasmenge von konstanter Temperatur genügen dem Boyle-Mariotteschen Gesetz* $pV = c$. Stelle p als Funktion von V dar und zeichne den Graphen für $c = 3 \text{ bar} \cdot \text{m}^3$.
12. **Das Delische Problem der Würfelverdopplung** (Vgl. Aufgabe 46/7.)**
 MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) löste das Problem nicht nur durch den Schnitt zweier Parabeln, sondern auch durch den Schnitt der Parabel $ay = x^2$ mit der gleichseitigen Hyperbel $xy = ab$. Bei dieser Gelegenheit entdeckte er übrigens erst Parabel und Hyperbel.
- a) Leite aus der Bedingung des HIPPOKRATES $a : x = x : y = y : b$ (siehe Aufgabe 46/7.b)) die beiden Gleichungen her und berechne die beiden mittleren Proportionalen als Koordinaten des Schnittpunkts.
- b) Zeichne für $a = 1$ und $b = 2$ die beiden Graphen und bestimme damit einen Näherungswert für $\sqrt[3]{2}$. (Einheit 5 cm)
- 13. Zeichne den Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{2}{3}}$ im Bereich $0 \leq x \leq 9$. Erzeuge aus ihm die Graphen mit der Gleichung
- a) $y = x^{\frac{2}{3}} + 3$ b) $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ c) $y = 2x^{\frac{2}{3}} + 3$
 d) $y = (x - 4)^{\frac{2}{3}}$ e) $y = 2(x - 4)^{\frac{2}{3}} + 3$ f) $y = -3(x + 2)^{\frac{2}{3}} + 1$
- 14. Zeichne die Graphen der Funktionen $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ und $x \mapsto x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ (Einheit 4 cm). Was kannst du daraus über die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ schließen? Bestimme graphisch einen möglichst guten Näherungswert. Verbessere ihn mit dem Taschenrechner zu der auf Tausendstel genauen Lösung.
15. Löse wie in Aufgabe 14 die Gleichungen
- a) $x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{2}} - 2$ (Einheit 8 cm) b) $x^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} + x^{\frac{3}{2}}$ (Einheit 8 cm)
 c) $x^{-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} - 1$ (Einheit 2 cm). Gib auch die exakte Lösung an.

4.2 Die Monotoniegesetze

Ein Blick auf die Graphen der Potenzfunktionen läßt vermuten, daß für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:

Die Graphen steigen echt monoton, wenn der Exponent positiv ist, die Graphen fallen echt monoton, wenn der Exponent negativ ist.

* Das Gesetz geht auf Messungen zurück, deren Werte Sir Robert BOYLE (1627–1691), ein englischer Physiker und Chemiker, 1661 veröffentlichte. Unabhängig von BOYLE führte Edme MARIOTTE (1620–1684), ein französischer Geistlicher und Physiker, seine Experimente aus und veröffentlichte seine Erkenntnisse als Gesetz im Jahre 1676 in seinem *Discours de la Nature de l'Air*.

** Das Problem hat immer wieder zur Lösung herausgefordert, so auch Giacomo CASANOVA (1725–1798), der seine *Solution du Problème deliaque* 1790 auf eigene Kosten in Dresden drucken ließ.