Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

4.2 Die Monotoniegesetze

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

11. Druck p und Volumen V einer abgeschlossenen Gasmenge von konstanter Temperatur genügen dem Boyle-Mariotteschen Gesetz* $pV = c$. Stelle p als Funktion von V dar und zeichne den Graphen für $c = 3\,\text{bar} \cdot \text{m}^3$.

12. Das Delische Problem der Würfelverdopplung (Vgl. Aufgabe 46/**7**.)**
MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) löste das Problem nicht nur durch den Schnitt zweier Parabeln, sondern auch durch den Schnitt der Parabel $ay = x^2$ mit der gleichseitigen Hyperbel $xy = ab$. Bei dieser Gelegenheit entdeckte er übrigens erst Parabel und Hyperbel.

a) Leite aus der Bedingung des HIPPOKRATES $a : x = x : y = y : b$ (siehe Aufgabe 46/**7.b)**) die beiden Gleichungen her und berechne die beiden mittleren Proportionalen als Koordinaten des Schnittpunkts.

b) Zeichne für $a = 1$ und $b = 2$ die beiden Graphen und bestimme damit einen Näherungswert für $\sqrt[3]{2}$. (Einheit 5 cm)

:13. Zeichne den Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{2}{3}}$ im Bereich $0 \leqq x \leqq 9$. Erzeuge aus ihm die Graphen mit der Gleichung

a) $y = x^{\frac{2}{3}} + 3$ **b)** $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ **c)** $y = 2x^{\frac{2}{3}} + 3$

d) $y = (x-4)^{\frac{2}{3}}$ **e)** $y = 2(x-4)^{\frac{2}{3}} + 3$ **f)** $y = -3(x+2)^{\frac{2}{3}} + 1$

•14. Zeichne die Graphen der Funktionen $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ und $x \mapsto x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ (Einheit 4 cm). Was kannst du daraus über die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ schließen? Bestimme graphisch einen möglichst guten Näherungswert. Verbessere ihn mit dem Taschenrechner zu der auf Tausendstel genauen Lösung.

15. Löse wie in Aufgabe **14** die Gleichungen

a) $x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{2}} - 2$ (Einheit 8 cm) **b)** $x^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} + x^{\frac{3}{2}}$ (Einheit 8 cm)

c) $x^{-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} - 1$ (Einheit 2 cm). Gib auch die exakte Lösung an.

4.2 Die Monotoniegesetze

Ein Blick auf die Graphen der Potenzfunktionen läßt vermuten, daß für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:

Die Graphen steigen echt monoton, wenn der Exponent positiv ist, die Graphen fallen echt monoton, wenn der Exponent negativ ist.

* Das Gesetz geht auf Messungen zurück, deren Werte Sir Robert BOYLE (1627–1691), ein englischer Physiker und Chemiker, 1661 veröffentlichte. Unabhängig von BOYLE führte Edme MARIOTTE (1620–1684), ein französischer Geistlicher und Physiker, seine Experimente aus und veröffentlichte seine Erkenntnisse als Gesetz im Jahre 1676 in seinem *Discours de la Nature de l'Air*.

** Das Problem hat immer wieder zur Lösung herausgefordert, so auch Giacomo CASANOVA (1725–1798), der seine *Solution du Problème deliaque* 1790 auf eigene Kosten in Dresden drucken ließ.

Die anschaulichen Begriffe »steigt echt monoton« und »fällt echt monoton« werden präzisiert durch

Definition 86.1: Die Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ heißt **echt monoton zunehmend in M**, wenn für alle $a, b \in M \subset D_f$ gilt: $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
Der Graph G_f **steigt** dann **echt monoton**.
Die Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ heißt **echt monoton abnehmend in M**, wenn für alle $a, b \in M \subset D_f$ gilt: $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
Der Graph G_f **fällt** dann **echt monoton**.

Den **Beweis** der obigen Vermutung beginnen wir mit Satz 44.1. Er besagt:
$0 \leqq a < b \Leftrightarrow 0 \leqq a^n < b^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Ersetzen wir a durch $a^{\frac{1}{n}}$ und b durch $b^{\frac{1}{n}}$, dann erhalten wir

$0 \leqq a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 0 \leqq \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n < \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n$, d.h.,

$0 \leqq a < b \Leftrightarrow 0 \leqq a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$.

Ersetzen wir in dieser Zeile a durch a^m und b durch b^m mit $m \in \mathbb{N}$, dann ergibt sich

$0 \leqq a^m < b^m \Leftrightarrow 0 \leqq (a^m)^{\frac{1}{n}} < (b^m)^{\frac{1}{n}}$.

Das bedeutet

$0 \leqq a < b \Leftrightarrow 0 \leqq a^m < b^m \Leftrightarrow 0 \leqq a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}}$.

Damit ist gezeigt, daß die Graphen der Potenzfunktionen für $x \in \mathbb{R}^+$ und positive rationale Exponenten echt monoton steigen.
Da sich jede positive reelle Zahl ϱ beliebig genau durch eine positive rationale Zahl $\frac{m}{n}$ annähern läßt, ist es plausibel, daß die Behauptung über die Monotonie der Potenzfunktionen sogar für positive reelle Exponenten gilt. Auf den Beweis müssen wir hier aber verzichten.
Ist schließlich ϱ negativ, dann ist $(-\varrho)$ positiv, und wir können nach dem eben Gezeigten schreiben:

$$\begin{aligned} 0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^{-\varrho} < b^{-\varrho} &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a^\varrho} < \frac{1}{b^\varrho} \quad \Big\| \cdot a^\varrho b^\varrho \\ &\Leftrightarrow 0 < b^\varrho < a^\varrho. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir haben den Fall $a = 0$ weggelassen, weil für $\varrho < 0$ der Term 0^ϱ nicht definiert ist.

Wir fassen zusammen zu

Satz 87.1: Das erste Monotoniegesetz für Potenzen
Für $\varrho > 0$ gilt: $0 \leqq a < b \Leftrightarrow 0 \leqq a^\varrho < b^\varrho$
Für $\varrho < 0$ gilt: $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < b^\varrho < a^\varrho$

Dieser Satz kann auch als Satz über das Monotonieverhalten der Potenzfunktionen formuliert werden:

Satz 87.2: Für $x \in \mathbb{R}^+$ ist die Potenzfunktion $x \mapsto x^\varrho$
echt monoton zunehmend, wenn der Exponent ϱ positiv ist,
echt monoton abnehmend, wenn der Exponent ϱ negativ ist.

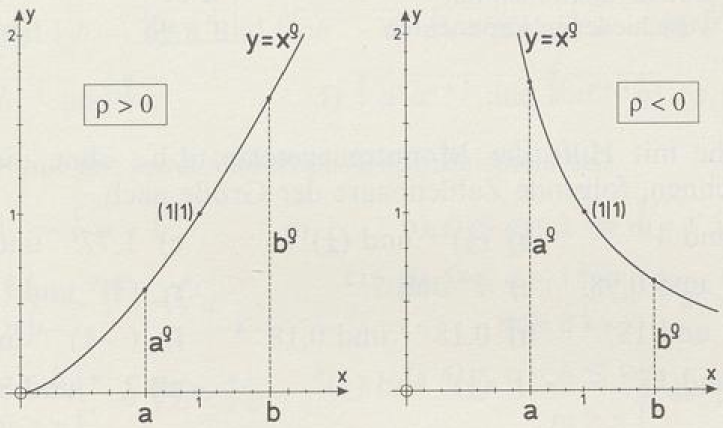

Abb. 87.1 Monotonieverhalten der Potenzfunktionen in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Exponenten

Das erste Monotoniegesetz gibt Auskunft über das Monotonieverhalten *einer* Potenzfunktion $x \mapsto x^\varrho$. Beim Vergleich der Graphen *zweier* Potenzfunktionen $x \mapsto x^\varrho$ und $x \mapsto x^\sigma$ haben wir weiter oben festgestellt, daß für $0 < x < 1$ der Graph der Funktion mit dem größeren Exponenten näher bei der x-Achse läuft; für $x > 1$ ist es umgekehrt.
Jetzt können wir diese Beobachtung durch einen Beweis untermauern:

Ist $\varrho < \sigma$, dann ist $\sigma - \varrho > 0$, und es gilt nach Satz 87.1

einerseits

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 &\Leftrightarrow 0 < a^{\sigma-\varrho} < 1^{\sigma-\varrho} \quad \| \cdot a^\varrho \text{ (positiv!)} \\ &\Leftrightarrow 0 < a^\sigma < a^\varrho, \end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned} 1 < a &\Leftrightarrow 0 < 1^{\sigma-\varrho} < a^{\sigma-\varrho} \quad \| \cdot a^\varrho \text{ (positiv!)} \\ &\Leftrightarrow 0 < a^\varrho < a^\sigma. \end{aligned}$$

Damit haben wir

> **Satz 88.1: Das zweite Monotoniegesetz für Potenzen**
>
> **Für $0 < a < 1$ gilt:**
>
> $$\varrho < \sigma \Leftrightarrow a^{\sigma} < a^{\varrho}$$
>
> **Für $1 < a$ gilt:**
>
> $$\varrho < \sigma \Leftrightarrow a^{\varrho} < a^{\sigma}$$

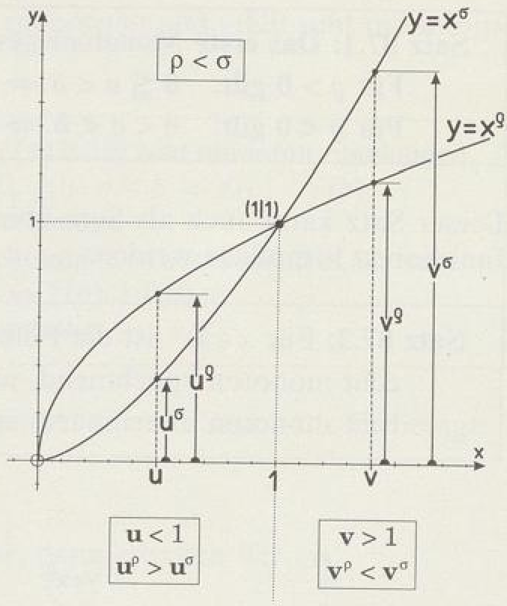

Abb. 88.1 Vergleich von Potenzfunktionen mit verschiedenen Exponenten

Aufgaben

1. Vergleiche mit Hilfe der Monotoniegesetze, d.h., ohne die Potenzen auszurechnen, folgende Zahlenpaare der Größe nach.

a) 3^{10} und 4^{10} **b)** $(\frac{1}{3})^{10}$ und $(\frac{1}{4})^{10}$ **c)** $1{,}77^{13}$ und $1{,}78^{13}$

d) $0{,}99^5$ und $0{,}98^5$ **e)** 7^9 und 7^{12} **f)** $(\frac{1}{7})^9$ und $(\frac{1}{7})^{12}$

g) 18^{-3} und 18^{-4} **h)** $0{,}18^{-3}$ und $0{,}18^{-4}$ **i)** $(-1)^{-4}$ und $(-1)^{-6}$

• **k)** 16^5 und 17^6 • **l)** $(\frac{1}{2})^6$ und $(\frac{2}{3})^5$ • **m)** 2^{-4} und 3^{-6}

2. Ordne die folgenden Potenzen der Größe nach.

a) $5^{\frac{3}{8}}$; $5^{\frac{2}{5}}$; $5^{0,3}$ **b)** $1{,}1^{-\frac{5}{2}}$; $1{,}1^{-\frac{8}{3}}$; $1{,}1^{-\frac{13}{6}}$

c) $(\frac{2}{3})^{1,3}$; $(\frac{2}{3})^{\frac{6}{5}}$; $(\frac{3}{2})^{-\frac{4}{3}}$; $(\frac{2}{3})^{\frac{9}{7}}$ **d)** $0{,}1^{\frac{5}{4}}$; $0{,}1^{-\frac{4}{5}}$; $10^{\frac{4}{3}}$; $100^{-\frac{9}{16}}$

3. Bestimme die Größenbeziehung zwischen

a) $2^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ und $2^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}$ **b)** $(\frac{12}{11})^{\pi}$ und $(\frac{12}{11})^{\frac{22}{7}}$ **c)** $5^{10^{\frac{3}{7}}}$ und $5^{2^{\frac{10}{7}}}$

d) $(\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{5}}$ und $(\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{6}}$ **e)** $0{,}9^{\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}}$ und $0{,}9^{\sqrt[4]{\frac{1}{8}}}$

f) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{10}}$ und $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\pi}$.

4. Welche Ungleichung besteht zwischen

a) $1{,}5^{\sqrt[7]{3}}$ und $1{,}6^{\sqrt[7]{3}}$ **b)** $0{,}87^{\sqrt[3]{5}}$ und $(\frac{7}{8})^{\sqrt[3]{5}}$ **c)** $(\frac{14}{15})^{1-\sqrt{3}}$ und $(\frac{15}{16})^{1-\sqrt{3}}$

5. Es sei $0 < a < b$. Welche Ungleichungen bestehen dann zwischen folgenden Potenzen?

a) a^2 und b^2 **b)** $a^{1,2}$ und $b^{1,2}$ **c)** $a^{0,1}$ und $b^{0,1}$

d) a^{-4} und b^{-4} **e)** $a^{-\frac{3}{8}}$ und $b^{-\frac{3}{8}}$ **f)** $a^{-0,01}$ und $b^{-0,01}$

:6. Warum kann man unter der Voraussetzung $0 < a < b$ noch keinen Größenvergleich der Potenzen **a)** a^2 und b^3 **b)** $a^{0,5}$ und $b^{0,2}$ durchführen? Nimm eine Fallunterscheidung vor und gib jeweils passende Zahlenbeispiele an.

•7. Es sei $0 < x < 1 < y$. Welche Größenbeziehung besteht dann zwischen

a) $x^{\frac{2}{3}}$ und $y^{0,1}$ **b)** $x^{0,1}$ und $y^{\frac{2}{3}}$ **c)** $x^{-\frac{1}{5}}$ und y^{-3}.

8. Es sei $0 < a < b$. Ordne folgende Ausdrücke der Größe nach.

a) $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ **b)** a und $\sqrt{ab}$ **c)** $a\sqrt{b}$ und $b\sqrt{a}$ **d)** $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[3]{b^2}$

e) $\sqrt[4]{a^2 b^{-1}}$ und $\sqrt[4]{a}$ **f)** $\sqrt[n]{a^p b^{q+1}}$ und $\sqrt[n]{a^{p+1} b^q}$ $(p, q > 0)$

•9. Beweise und gib jeweils auch passende Beispiele an.

a) $a > 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > 1$ **b)** $0 \leqq a < 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < 1$

c) $\left.\begin{array}{r} a > 1 \\ m > n \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} 0 \leqq a < 1 \\ m > n \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$

e) $\left.\begin{array}{r} 1 \leqq a < b \\ m > n \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{b}$ **f)** $\left.\begin{array}{r} 0 \leqq a < b \leqq 1 \\ m > n \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{b}$

•10. **a)** Begründe aus den Monotoniegesetzen für Potenzen, warum bei positiven Exponenten ϱ kein Funktionsgraph aus der Schar $x \mapsto x^{\varrho}$, $\varrho > 0$, im Feld $\{(x|y) \,|\, 0 \leqq x < 1 \wedge y \geqq 1\} \cup \{(x|y) \,|\, x > 1 \wedge 0 \leqq y \leqq 1\}$ verläuft.
(*Hinweis*: Zeichne das Sperrgebiet in ein Koordinatensystem ein.)

b) Begründe aus den Monotoniegesetzen für Potenzen, warum bei negativen Exponenten ϱ kein Funktionsgraph aus der Schar $x \mapsto x^{\varrho}$, $\varrho < 0$, im Feld $\{(x|y) \,|\, 0 \leqq x < 1 \wedge 0 \leqq y \leqq 1\} \cup \{(x|y) \,|\, x > 1 \wedge y \geqq 1\}$ verläuft.
(*Hinweis*: Zeichne das Sperrgebiet in ein Koordinatensystem ein.)

11. Welche der folgenden Funktionen sind in D monoton? Welche Art von Monotonie liegt gegebenenfalls vor?

a) $x \mapsto x^2$, $D = \mathbb{R}_0^+$ **b)** $x \mapsto x^2$, $D = \mathbb{R}^-$

c) $x \mapsto x^2$, $D = \{x \,|\, -3 \leqq x < 5\}$ **d)** $x \mapsto x^0$, $D = \mathbb{R}^+$

e) $x \mapsto x^{-1}$, $D = \mathbb{R}^+$ **f)** $x \mapsto x^{-1}$, $D = \mathbb{R}^-$

g) $x \mapsto x^{-1}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ **h)** $x \mapsto x^{-2}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$