Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

4.3 Umkehrung der Potenzfunktion

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

4.3 Umkehrung der Potenzfunktion

Wir betrachten die Potenzfunktion $x \mapsto x^\varrho$, $\varrho \neq 0$, auf der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$. Weil die Gleichung $x^\varrho = \sigma$ für *jedes* positive σ die Lösung $x = \sigma^{\frac{1}{\varrho}}$ hat, nimmt x^ϱ jeden positiven Wert σ an. Also ist $\mathbb{R}^+$ die Wertemenge von $x \mapsto x^\varrho$. Wegen der echten Monotonie der Potenzfunktionen auf $\mathbb{R}^+$ ist die Gleichung $x^\varrho = \sigma$ sogar eindeutig lösbar. Jede Parallele zur x-Achse in der Höhe σ schneidet also den Graphen genau einmal. Daher ist jede Potenzfunktion auf $\mathbb{R}^+$ umkehrbar. Wir suchen nun den Term der Umkehrfunktion:

$f\colon x \mapsto x^\varrho$, $\varrho \neq 0$, $D_f = \mathbb{R}^+$, $W_f = \mathbb{R}^+$.

Funktionsgleichung: $y = x^\varrho$ Auflösen nach x: $x = y^{\frac{1}{\varrho}}$

Umkehrfunktion mit y als unabhängiger Variabler:

$f^{-1}\colon y \mapsto y^{\frac{1}{\varrho}}$, $D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}^+$, $W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}^+$.

In dieser Darstellung der Umkehrfunktion stimmt ihr Graph mit dem Graphen G_f der Ausgangsfunktion f überein. Die Zuordnung geht dabei von der y-Achse zur x-Achse. Wählt man, wie üblich, x als unabhängige Variable für die Umkehrfunktion f^{-1}, dann erhält man für sie die Darstellung

$f^{-1}\colon x \mapsto x^{\frac{1}{\varrho}}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$.

Der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion in dieser Darstellung geht aus dem Graphen G_f der Ausgangsfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten hervor. Jetzt geht die Zuordnung wieder von der x-Achse zur y-Achse.

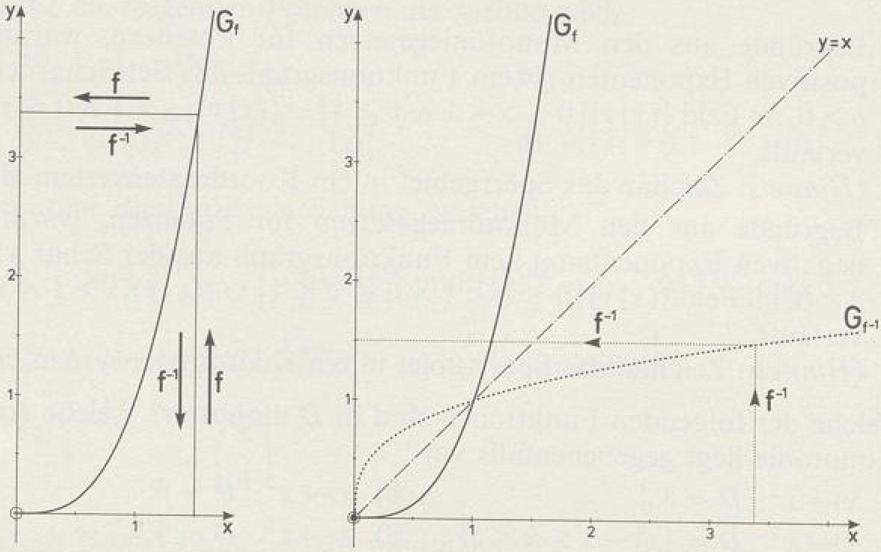

Abb. 90.1 Zusammenhang zwischen dem Graphen G_f der Funktion f und dem Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1}

Für $\varrho > 0$ ist die Funktion $x \mapsto x^{\varrho}$ sogar in $\mathbb{R}_0^+$ definiert und dort auch umkehrbar.

Ist aber der Exponent ϱ eine ungerade ganze Zahl, also $\varrho = 2z + 1, z \in \mathbb{Z}$, dann ist $x \mapsto x^{\varrho}$ für $z \in \mathbb{N}_0$ sogar auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar, für $z \in \mathbb{Z}^-$ aber nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In $\mathbb{R}^+$ hat nach dem Obigen der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1} die Gleichung $y = x^{\frac{1}{2z+1}}$. Weil G_f und damit auch $G_{f^{-1}}$ punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems sind, gewinnen wir in $\mathbb{R}^-$ die Gleichung des Graphen $G_{f^{-1}}$, indem wir in der für $x \in \mathbb{R}^+$ gültigen Gleichung x durch $-x$ und y durch $-y$ ersetzen. Wir erhalten $-y = (-x)^{\frac{1}{2z+1}}$ und damit $y = -(-x)^{\frac{1}{2z+1}}$. Weil schließlich für $z \in \mathbb{N}_0$ noch $(0|0) \in G_f$ ist, gilt in diesem Fall auch $(0|0) \in G_{f^{-1}}$.

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen in

Satz 91.1: Für $\varrho > 0$ hat die Funktion $f\colon x \mapsto x^{\varrho}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon x \mapsto x^{\frac{1}{\varrho}}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Für $\varrho < 0$ hat die Funktion $f\colon x \mapsto x^{\varrho}$, $x \in \mathbb{R}^+$ die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon x \mapsto x^{\frac{1}{\varrho}}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Die Funktion $f\colon x \mapsto x^{2z+1}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{N}_0$ bzw. mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}^-$ hat die Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{2z+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \\ -(-x)^{\frac{1}{2z+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \\ 0 & \text{für } x = 0, \text{ falls außerdem } z \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Abbildung 92.1 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto x^{2z+1}$ und dem ihrer Umkehrfunktion **a)** für $z \in \mathbb{N}_0$ **b)** für $z \in \mathbb{Z}^-$.

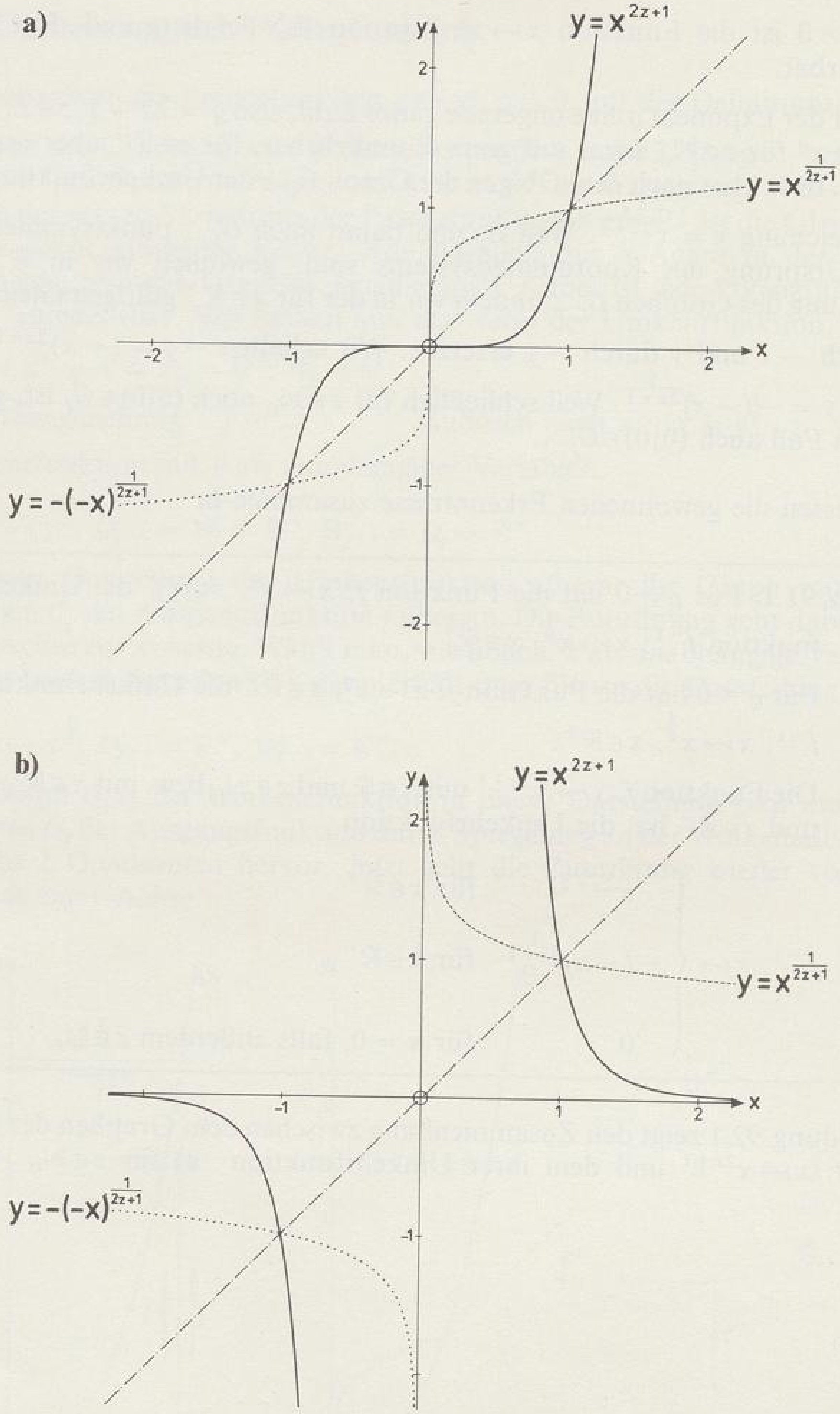

Abb. 92.1 Zusammenhang zwischen dem Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto x^{2z+1}$ und dem ihrer Umkehrfunktion **a)** für $z \in \mathbb{N}_0$ **b)** für $z \in \mathbb{Z}^-$

Aufgaben

1. Zeichne im Bereich $0 < x < 17$, $0 < y < 17$ den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{-2}$ und konstruiere daraus den Graphen von $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$.

2. Zeichne für $0 \leqq x \leqq 4$ den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ und konstruiere daraus den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$.

3. Bestimme zu der gegebenen Funktion $x \mapsto f(x)$ die Umkehrfunktion $x \mapsto f^{-1}(x)$. Gib jeweils Definitions- und Wertemenge von f^{-1} an.

a) $f(x) = 2x^2 + 3, \quad D = \{x | x \geqq 0\}$
b) $f(x) = (x-3)^5, \quad D = \{x | x \geqq 3\}$
c) $f(x) = (x-3)^5, \quad D = \{x | x < 3\}$
d) $f(x) = 5x^{\sqrt{2}} - 4, \quad D = \{x | x \geqq 0\}$
e) $f(x) = 0{,}2x^{-0{,}3} + \sqrt[3]{5}, \quad D = \{x | x > 0\}$
f) $f(x) = 6x^{-\frac{1}{3}} + 5, \quad D = \{x | 8 \leqq x \leqq 27\}$

4. Bestimme zu f: $x \mapsto (x+2)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}$, $D = [-2; +\infty[$ die Umkehrfunktion f^{-1} samt Definitions- und Wertemenge. Zeichne G_f und $G_{f^{-1}}$.

5. f: $x \mapsto x^3$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$.
a) Zeichne G_f.
b) Bestimme den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge.
c) Zeichne $G_{f^{-1}}$.
• **d)** Löse **a)**–**c)** für die Funktion g: $x \mapsto x^3$, $D_g = \mathbb{R}$.

6. f: $x \mapsto x^{-3}$, $D_f = \mathbb{R}^+$.
a) Zeichne G_f.
b) Bestimme den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge.
c) Zeichne $G_{f^{-1}}$.
d) Löse **a)**–**c)** für die Funktion g: $x \mapsto x^{-3}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. f: $x \mapsto x^{-1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
a) Zeichne G_f.
b) Bestimme den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge.
c) Zeichne $G_{f^{-1}}$.

• **8.** Für $n \in \mathbb{Z}^-$ ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die maximale Definitionsmenge der Funktionen f_n: $x \mapsto x^n$. Für welche n lassen sich die Funktionen f_n umkehren? Gib für diese den Term der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge an.

Zu Seite 95:

TARTAGLIA stützt sich auf ein Brett mit seinem Namen und dem Wahlspruch

LE INVENTIONI SONO DIFFICILI, MA LO AGGIONGERVI È FACILE
Die Erfindungen sind schwierig, aber ihnen etwas hinzuzufügen ist leicht.

Der Text unter dem Bildnis lautet:

Mit der Gunst und dem Privileg des hochverehrten venezianischen Senats, daß sich niemand erkühne oder anmaße, das vorliegende Werk zu drucken noch andernorts gedruckte zu verkaufen oder verkaufen zu lassen, weder in Venedig noch in irgendeinem Orte oder Gebiet der venezianischen Herrschaft innerhalb der nächsten 10 Jahre unter Strafe von 300 Dukaten und des Verlusts der Werke; ein Drittel dieser Strafe, unmittelbar nachdem sie ausgesprochen wurde, erhält das Arsenal, ein Drittel der Magistrat oder das Oberhaupt der Gemeinde, wo man die Verfolgung durchführt, und das restliche Drittel der Anzeigende oder Anklagende, der geheimgehalten werden wird, wie es im Privileg verlautet.