Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

5 Algebraische Gleichungen

5 Algebraische Gleichungen


QVESITI, ET INVENTIONI DI-
VERSE DE NICOLO TARTALEA
BRISCIANO.

Con gratia, & priuilegio dal Illustrissimo Senato Veneto, che niuno ardisca
ne presuma, di stampere la presente opera, ne stampate altroue uendere ne
far uendere in Venetia, ne in alcuno altro luoco, o terra del Dominio Vene-
to, per anni diece sotto pena de ducati trecento, & perdere le opere, el ter-
zo della qual pena immediate che sia denontiata, si applica al Arsenale,
& un terzo sia del magistrato, ouer rettore del luoco doue se fara la
assecutione, & laltro terzo sara del denuntiante, ouer accusato-
re, & sara tenuto secreto, come nel priuilegio appare.

QUESITI, ET INVENTIONI DIVERSE DE NICOLO TARTALEA BRISCIANO
»Aufgaben und verschiedene Erfindungen von Nicolò TARTALEA aus Brescia«

Titelseite des 1546 in Venedig erschienenen Buchs

5 Algebraische Gleichungen

5.1 Definition und Sonderfälle

Der Umgang mit höheren Potenzen führte dazu, daß man sich auch an Gleichungen wagte, in denen die Unbekannte in höheren Potenzen vorkam. Man beschäftigte sich also nicht nur mit linearen und quadratischen Gleichungen, sondern auch mit kubischen Gleichungen, in denen die Unbekannte in dritter Potenz auftritt, und sogar mit Gleichungen noch höheren Grades.
Allgemein legt man fest:

> **Definition 96.1:** Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heißt **algebraische Gleichung *n*-ten Grades**.
> Ist $a_n = 1$, dann liegt die Gleichung in **Normalform** vor.
> Die Gleichung $x^n + a_0 = 0$ heißt **reine Gleichung *n*-ten Grades**.

In *Algebra 3* haben wir Sonderfälle algebraischer Gleichungen höheren als zweiten Grades bereits kennen- und lösen gelernt. Gewisse kubische, biquadratische und reziproke Gleichungen sogar bis zum Grad 8 wurden dort behandelt. Allerdings konnten wir für Gleichungen mit höherem als zweitem Grad keine allgemeine Lösungsformel angeben. In **3.1** haben wir die Gleichungen $x^n = a, a > 0$, d. h. die reine algebraische Gleichung n-ten Grades $x^n + a_0 = 0$ für $a_0 = -a$ gelöst. Die Lösungsmenge der reinen Gleichung

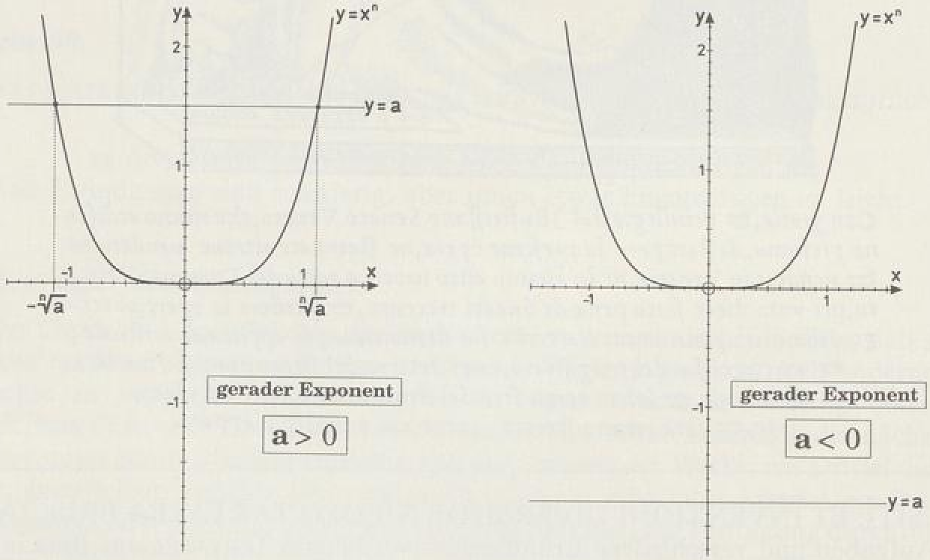


Abb. 96.1 Graphische Lösung der Gleichung $x^n = a$ für gerades n

$x^n = a$, $a \in \mathbb{R}$, hängt von n und dem Vorzeichen von a ab. Graphisch erhält man die Lösungen der Gleichung $x^n = a$, indem man den Graphen der Potenzfunktion $x \mapsto x^n$ mit der zur x-Achse parallelen Geraden $y = a$ zum Schnitt bringt. Aus Abbildung 96.1 lesen wir ab:

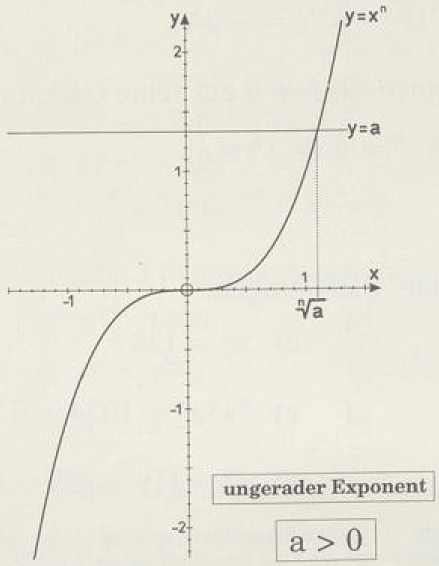
Satz 97.1: Ist n gerade, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösungsmenge

$L = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$, falls $a > 0$
$L = \{0\}$, falls $a = 0$
$L = \{\ \}$, falls $a < 0$.

Beispiele:

$x^4 = 16$ hat die Lösungen -2 und 2.
$x^8 = 768$ hat die Lösungen $-2\sqrt[8]{3}$ und $2\sqrt[8]{3}$.
$x^{18} = 0$ hat die Lösung 0.
$x^{56} = -9$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.
$x^6 = a^6$ hat die Lösungen $-a$ und a.
$x^6 = a^{18}$ hat die Lösungen $-a^3$ und a^3.

Für ungerades n lesen wir aus Abbildung 97.1 ab:
Ist $a > 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösung $x = \sqrt[n]{a}$.
Ist $a < 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösung $x = -\sqrt[n]{-a}$.



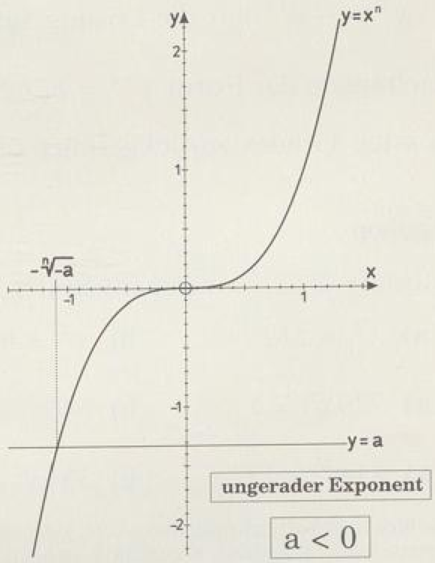


Abb. 97.1 Graphische Lösung der Gleichung $x^n = a$ für ungerades n

Die Fallunterscheidung für a kann man vermeiden, wenn man für das Vorzeichen von a die Abkürzung sgn a, gesprochen »signum von a« einführt.*

Definition 98.1:

$$\operatorname{sgn} a := \begin{cases} +1, \text{ falls } a > 0 \\ 0, \text{ falls } a = 0 \\ -1, \text{ falls } a < 0 \end{cases}$$

Wenn Mißverständnisse zu befürchten sind, setzt man das Argument der Signum-Funktion besser in Klammern. Es könnte nämlich $\operatorname{sgn} x \cdot x$ einerseits $\operatorname{sgn}(x) \cdot x = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$, andererseits aber auch $\operatorname{sgn}(x \cdot x) = \operatorname{sgn}(x^2) = \operatorname{sgn} x^2$ bedeuten.

Unter Verwendung von Definition 98.1 formulieren wir

Satz 98.1: Ist n ungerade, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösung $x = \operatorname{sgn}(a)\sqrt[n]{|a|}$.

Beispiele:

$x^5 = 32$ hat die Lösung 2.

$x^5 = -1024$ hat die Lösung -4.

$x^9 = 27$ hat die Lösung $\sqrt[9]{27} = \sqrt[3]{3}$.

$x^9 = -27$ hat die Lösung $-\sqrt[9]{27} = -\sqrt[3]{3}$.

$x^7 = a^7$ hat die Lösung $\operatorname{sgn}(a^7)\sqrt[7]{|a^7|} = (\operatorname{sgn} a)^7\sqrt[7]{|a|^7} = |a| \operatorname{sgn} a = a$.

$x^7 = -a^{14}$ hat die Lösung $\operatorname{sgn}(-a^{14})\sqrt[7]{|-a^{14}|} = -a^2$.

Gleichungen der Form $x^{-n} = b$, $n \in \mathbb{N}$, können für $b \neq 0$ auf reine Gleichungen n-ten Grades zurückgeführt werden: $x^{-n} = b \Leftrightarrow x^n = \frac{1}{b}$.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

1. a) $x^3 = 512$ **b)** $x^4 = 625$ **c)** $x^7 = 128$

2. a) $729x^6 = 1$ **b)** $64x^3 = 343$ **c)** $243x^5 - 1024 = 0$

3. a) $81x^2 = 27$ **b)** $32x^{10} = 1024$ **c)** $x^9 - 119 = 139 - x^9$

* Die Idee einer Vorzeichenfunktion, d. h., jeder reellen Zahl ihr Vorzeichen zuzuordnen, stammt von Leopold Kronecker (1823–1891), der sie 1878 erstmals veröffentlichte und 1884 die Bezeichnung sgn.a einführte. Verbreitung fand das Symbol sgn dadurch, daß Giuseppe Peano (1858–1932) es 1898 in sein *Formulaire de mathématiques*, II-§2 aufnahm.

4. a) $x^3 = -1$ b) $9x^6 + 1 = 0$ c) $5x^7 + 640 = 0$

5. a) $365x^4 + 12 = 85$ b) $19x^6 - 295 = 25 - x^6$
c) $800x^6 + 7 = 71(1 + x^6)$ d) $5(x^5 + 28) = 2(x^5 - 26)$

6. a) $x^{-4} = 16$ b) $x^{-1} = \frac{2}{3}$ c) $x^{-5} = -0{,}03125$

7. a) $\frac{1}{5}x^{-2} = \frac{0{,}2}{x^2}$ b) $4x^{-3} - 14 = (2x^3)^{-1} + 14$ c) $4x^6 - 20 = -\frac{1}{x^{-6}}$

8. a) $|x|^3 = 1$ b) $5\sqrt{x^6} = 0{,}04$ c) $\sqrt{x^{10}} + 62 = \left(2\sqrt[6]{x^6}\right)^5$

⁑9. Löse graphisch und durch Rechnung die folgenden Gleichungssysteme:

a) I $x^2 = a$, II $x^3 = a$ b) I $x^2 = a$, II $x^4 = a$ c) I $x^3 = a$, II $x^7 = a$ d) I $x = a$, II $x^3 = a$

⁑10. Für welche Werte von a haben folgende Gleichungen eine gemeinsame Lösung? Untersuche jeweils, wie viele gemeinsame Lösungen vorhanden sind. ($m, n \in \mathbb{N}$)

a) $x^n = a$ und $x^{n+1} = a$ b) $x^n = a$ und $x^{n+2} = a$
c) $x^n = a$ und $x^{n+m} = a$.

11. Ist die Aussage »Die Gleichung $x^n = a$ hat $\sqrt[n]{a}$ als Lösung« richtig?

•12. Bestimme die Lösungsmengen ggf. mit Fallunterscheidungen.

a) $x^2 = a^2$ b) $x^3 = a^3$ c) $x^4 = a^{-2}$
d) $x^6 = a^3$ e) $x^9 = a^3$ f) $x^{-4} = a^6$
g) $x^{-5} = \sqrt[3]{a^5}$ •h) $a \cdot x^0 - \sqrt{a^3} = 0$ •i) $a^3 \cdot x^{-21} = \sqrt[3]{a^2}$

13. a) $x^8 - 25x^4 + 144 = 0$ b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
c) $31x^5 + 32x^{10} = 1$ d) $x^7 + 27x^4 = 0$
e) $(x^3 + 7) \cdot (x^{-6} - 8) = 0$ f) $x^4 + 2 = 3x^{-4}$

14. Welche Lösungsmengen haben die folgenden Ungleichungen?

a) $x^3 > 1000$ b) $x^4 \geqq 16$ c) $x^6 < 27$
d) $x^5 < \frac{243}{1024}$ e) $x^0 \leqq 0$ •f) $x^{-3} \geqq -2$
g) $x^{-8} \leqq 25$ h) $-7 < x^5 < 11$ i) $1 \leqq x^2 < 20$

15. Welche Lösungsmengen haben folgende Ungleichungen?

a) $x^{\frac{2}{3}} \geqq \frac{2}{3}$ b) $x^{0,2} < 3$ c) $x^{\frac{3}{4}} \geqq \sqrt{2\sqrt{2}}$
d) $1 \leqq x^{\frac{4}{3}} < 4$ e) $x^{\frac{1}{3}} > -1$ f) $-3 \leqq x^{0,17} < -2$

16. Zur sgn-Funktion

a) Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Beweise durch Fallunterscheidung:

1) $x \operatorname{sgn} x = |x|$ **2)** $|x| \operatorname{sgn} x = x$

3) $\operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn}(x \cdot y)$ **4)** $\dfrac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn} y} = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

5) $\operatorname{sgn}(x^n) = (\operatorname{sgn} x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ **6)** $\dfrac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x$ für $x \neq 0$

17. a) Gib mit Hilfe der Betrags- und der Signum-Funktion den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion von f: $x \mapsto x^3$, $D_f = \mathbb{R}$ an.

b) Löse **a)** für f: $x \mapsto x^{2z+1}$, $z \in \mathbb{Z}$ und D_f maximal. Gib $D_{f^{-1}}$ an.

5.2 Näherungslösungen

Gleichungen höheren als zweiten Grades können wir nur in Sonderfällen exakt lösen. In allen anderen Fällen müssen wir uns mit Näherungswerten für die exakten Lösungen begnügen. Dazu fassen wir das Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ als Aufgabe auf, die Nullstellen der Funktion $f: x \mapsto f(x)$ zu bestimmen. Mit Hilfe einer Wertetabelle läßt sich der zugehörige Graph $y = f(x)$ zeichnen, aus dem man Näherungslösungen ablesen kann.

Beispiel: $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-19	-3	1	-1	-3	1	17

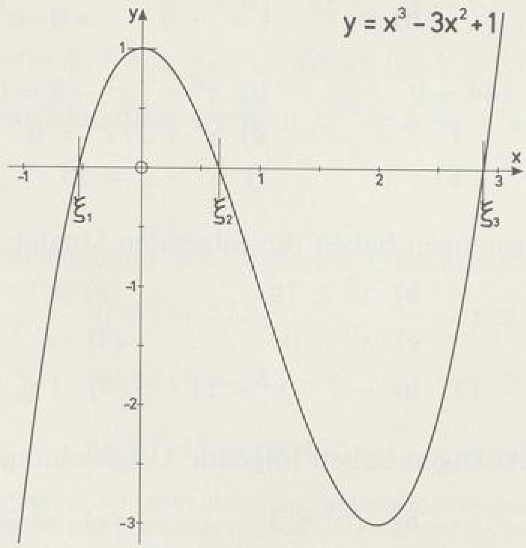


Abb. 100.1 Graph der Funktion $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$

Aus Abbildung 100.1 lesen wir für die Nullstellen ab: $\xi_1 \approx -0{,}5$, $\xi_2 \approx 0{,}6$ und $\xi_3 \approx 2{,}9$.
Zur Verbesserung der Genauigkeit brauchen wir rechnerische Methoden. Eine einfache gebräuchliche Methode ist das **Iterationsverfahren**. Dabei bringt man die zu lösende Gleichung $f(x) = 0$ auf die Form $x = g(x)$, was man auf unterschiedlichste Art und Weise bewerkstelligen kann. Dann beginnt man mit einem Näherungswert x_0 und berechnet der Reihe nach

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$x_3 = g(x_2)$$
$$\ldots$$
$$x_{n+1} = g(x_n)$$

usw.

Falls $g(x)$ geeignet gewählt wurde, nähern sich die Werte x_n beliebig genau einer Lösung der Gleichung $x = g(x)$ und damit auch der Gleichung $f(x) = 0$.
Wir lösen jetzt unser Beispiel durch Iteration.

1. Versuch:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \quad \| + x$$
$$x = x^3 - 3x^2 + x + 1 \Rightarrow x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + x_n + 1$$

$x_0 = 0{,}6$	$x_3 = 0{,}8628\ldots$	$x_6 = -0{,}1402\ldots$
$x_1 = 0{,}736$	$x_4 = 0{,}2716\ldots$	
$x_2 = 0{,}5096\ldots$	$x_5 = 1{,}0702\ldots$	

Da diese Werte sich immer weiter von der vermuteten Nullstelle entfernen, versuchen wir es mit einem anderen Startwert:

$x_0 = 0$	$x_2 = 0$	$x_4 = 0$
$x_1 = 1$	$x_3 = 1$	$x_5 = 1$

Die Werte wiederholen sich unentwegt. Wir sind in eine Schleife geraten; die Nullstelle wird wieder nicht erreicht. Das gewählte $g(x)$ ist offenbar ungeeignet.

2. Versuch:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$
$$3x^2 = x^3 + 1$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{x^3+1}{3}} \Rightarrow (1)\ x_{n+1} = -\sqrt{\frac{x_n^3+1}{3}} \quad \text{und} \quad (2)\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^3+1}{3}}$$

(1) könnte sich zur Berechnung von ξ_1,
(2) zu der von ξ_2 oder ξ_3 eignen:

$x_0 = -0{,}5$	$x_0 = 0{,}6$
$x_1 = -0{,}5400\ldots$	$x_1 = 0{,}6366\ldots$
$x_2 = -0{,}5299\ldots$	$x_2 = 0{,}6475\ldots$
$x_3 = -0{,}5326\ldots$	$x_3 = 0{,}6510\ldots$
$x_4 = -0{,}5319\ldots$	$x_4 = 0{,}6521\ldots$
$x_5 = -0{,}5321\ldots$	$x_5 = 0{,}6525\ldots$
$x_6 = -0{,}53207\ldots$	$x_6 = 0{,}6526\ldots$
$x_7 = -0{,}53209\ldots$	$x_7 = 0{,}65268\ldots$

Da $f(-0{,}53215) < 0$ und $f(-0{,}53205) > 0$ ist, erhält man für die Nullstelle ξ_1 den Näherungswert $-0{,}5321$, und da $f(0{,}65265) > 0$ und $f(0{,}65275) < 0$ ist, erhält man für die Nullstelle ξ_2 den Näherungswert 0,6527. Die Güte dieser Näherungen erkennt man aus $f(-0{,}5321) \approx -4{,}4 \cdot 10^{-5}$ bzw. $f(0{,}6527) \approx 9{,}6 \cdot 10^{-6}$.
Der Startwert 2,9 führt weder bei (1) noch bei (2) zu einem Ergebnis.

Die noch fehlende Nullstelle ξ_3 liefert aber der

3. Versuch:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$x^2(x-3) = -1$$

$$x - 3 = -\frac{1}{x^2}$$

$$x = 3 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n^2}$$

$x_0 = -0{,}5$	$x_0 = 0{,}6$	$x_0 = 2{,}9$
$x_1 = -1$	$x_1 = 0{,}222\ldots$	$x_1 = 2{,}8810\ldots$
$x_2 = 2$	$x_2 = -17{,}2499\ldots$	$x_2 = 2{,}8795\ldots$
$x_3 = 2{,}75$	$x_3 = 2{,}9986\ldots$	$x_3 = 2{,}8793\ldots$
$x_4 = 2{,}8677\ldots$	$x_4 = 2{,}8886\ldots$	$x_4 = 2{,}87938\ldots$
$x_5 = 2{,}8784\ldots$	$x_5 = 2{,}8801\ldots$	
$x_6 = 2{,}8793\ldots$	$x_6 = 2{,}8794\ldots$	
$x_7 = 2{,}87937\ldots$	$x_7 = 2{,}87939\ldots$	

Dieses Verfahren führt überraschenderweise unabhängig vom Startwert immer zur Nullstelle ξ_3. Da $f(2{,}87935) < 0$ und $f(2{,}87945) > 0$ ist, gilt gerundet $\xi_3 \approx 2{,}8794$, wofür man $f(2{,}8794) \approx 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ erhält.

Aufgaben

1. $x^3 - 9x - 10 = 0$

a) Bestimme die ganzzahlige Lösung dieser Gleichung durch Raten.*

b) Berechne eine »Näherungslösung« auf 0,001 genau für die ganzzahlige Lösung mittels der Iteration $x_{n+1} = -\sqrt{\frac{10}{x_n} + 9}$ und dem Startwert $x_0 = -2{,}5$.

c) Bestimme durch Iteration die beiden nicht ganzzahligen Lösungen näherungsweise auf die dritte Dezimalstelle genau. Suche dazu jeweils ein geeignetes $g(x)$ und einen passenden Startwert x_0.

2. $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$ war die Gleichung 4. Grades, an Hand derer CARDANO 1545 das Lösungsverfahren für Gleichungen 4. Grades demonstrierte (siehe Seite 114). Berechne mit Hilfe der angegebenen Iterationsverfahren Näherungen für die beiden reellen Lösungen auf die vierte Dezimalstelle genau.

a) $x_{n+1} = \dfrac{36}{60 - 6x_n - x_n^3}, \qquad x_0 = 0{,}5$

b) $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{60x_n - 36}{x_n^2 + 6}}, \qquad x_0 = 3$

c) $x_{n+1} = \sqrt[4]{6(10x_n - x_n^2 - 6)}, \qquad x_0 = 3$

3. Wie tief taucht eine schwimmende Kugel mit dem Radius $r = 1\,\text{dm}$ und der Dichte $\varrho = 0{,}75\,\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ in Wasser ein? Stelle eine Gleichung für die Eintauchtiefe $x\,\text{dm}$ auf und löse sie näherungsweise auf 10^{-4} gerundet durch ein geeignetes Iterationsverfahren.**

**5.3 Allgemeine Sätze

Nach der Behandlung des Sonderfalls $x^n + a_0 = 0$ wenden wir uns nun den algebraischen Gleichungen in ihrer allgemeinen Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ zu. Bei den Gleichungen 3. Grades haben wir gelernt, daß man sie auf eine Gleichung 2. Grades zurückführen kann, wenn man eine Lösung kennt. In einem solchen Fall kann man auch eine Gleichung n-ten Grades auf eine vom Grad $n-1$ zurückführen. Zum Beweis dieser Behauptung verallgemeinern wir einen Gedankengang, den Geronimo CARDANO (1501–1576) in Regel 6 von Kapitel XXV seiner *Ars magna* 1545 angesprochen hat und den François VIÈTE (1540–1603) in seinem 1615 postum

* Zur historischen Bedeutung dieser Gleichung siehe Seite 113.

** Auf eine solche Gleichung (mit $\frac{n}{m+n}$ an Stelle von ϱ) stieß AL-MAHANI (um 860), als er das von ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) in *Über Kugel und Zylinder* (II,4) gestellte Problem algebraisch lösen wollte: Eine Kugel durch eine Ebene so zerschneiden, daß die Volumina der entstehenden Segmente das Verhältnis $m:n$ haben.

erschienenen *Tractatus de emendatione aequationum* erweiterte. Als Hilfsmittel benützen wir wie VIÈTE die auf Seite 44 bewiesene Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel, nämlich

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \qquad (\blacksquare)$$

Damit können wir uns dem eigentlichen Problem zuwenden. Die linke Seite der algebraischen Gleichung $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ist ein Polynom vom Grad n, für das wir kurz $P_n(x)$ schreiben. Für eine beliebige reelle Zahl r gilt

$$P_n(x) - P_n(r) = a_n(x^n - r^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - r^{n-1}) + \ldots + a_1(x-r).$$

Wendet man auf jede der Klammern ($\blacksquare$) an, so kann man $(x-r)$ ausklammern und erhält

$$\begin{aligned}
P_n(x) - P_n(r) &= \\
&= a_n(x-r)(x^{n-1} + x^{n-2}r + \ldots + xr^{n-2} + r^{n-1}) + \\
&\quad + a_{n-1}(x-r)(x^{n-2} + x^{n-3}r + \ldots + xr^{n-3} + r^{n-2}) + \\
&\quad + a_{n-2}(x-r)(x^{n-3} + x^{n-4}r + \ldots + xr^{n-4} + r^{n-3}) + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad + a_1(x-r) = \\
&= (x-r)[a_n(x^{n-1} + \ldots + r^{n-1}) + a_{n-1}(x^{n-2} + \ldots + r^{n-2}) + \ldots + a_1].
\end{aligned}$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist ein Polynom $(n-1)$-ten Grades in x, so daß gilt

$$P_n(x) - P_n(r) = (x-r)P_{n-1}(x).$$

Ist r eine Nullstelle des Polynoms $P_n(x)$, dann ist $P_n(r) = 0$, und es ergibt sich

$$P_n(x) = (x-r)P_{n-1}(x).$$

Damit ist bewiesen

Satz 104.1: Reduktionssatz

Ist x_1 eine Lösung der algebraischen Gleichung $P_n(x) = 0$, dann läßt sich $P_n(x)$ faktorisieren zu $(x - x_1)P_{n-1}(x)$, wobei $P_{n-1}(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist. Die Lösung der algebraischen Gleichung $P_n(x) = 0$ ist damit zurückgeführt auf die Lösung der äquivalenten Gleichung $(x - x_1)P_{n-1}(x) = 0$, d.h. auf die Lösung von $x = x_1 \vee P_{n-1}(x) = 0$.

René DESCARTES (1596–1650) hat den Inhalt dieses Satzes 1637 in seinem Werk *La Géométrie* mitgeteilt. Zu seiner Veranschaulichung wählen wir eine Gleichung aus einer 1654/55 entstandenen Arbeit des Jan HUDDE (1628–1704), in der dieser die Methoden DESCARTES' ausbaute. HUDDE sandte diese Arbeit als Brief, datiert vom

15. Juli 1657, an seinen Lehrer Frans VAN SCHOOTEN (um 1615–1660). Dieser übersetzte sie aus dem Niederländischen ins Lateinische und fügte sie unter dem Titel *De reductione aequationum* – »Über die Reduktion von Gleichungen« – 1659 seiner zweiten lateinischen Ausgabe des DESCARTESschen Werks bei, wo sie 100 Druckseiten in Anspruch nimmt.

Beispiel: $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

Die Lösung $x_1 = 1$ läßt sich erraten. Das gesuchte Polynom $P_3(x)$ erhält man entweder durch Polynomdivision oder durch die von DESCARTES 1637 in seiner *La Géométrie* erfundene Methode des Koeffizientenvergleichs, von der er mit Stolz schreibt, »daß sie nicht eine der geringsten unter den Methoden ist, deren ich mich bediene«.

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 6x^2 + 8x - 3) : (x - 1) = x^3 + x^2 - 5x + 3 =: P_3(x) \\
\underline{-(x^4 - x^3)} \\
\qquad\quad x^3 - 6x^2 + 8x - 3 \\
\qquad\; \underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad\qquad -5x^2 + 8x - 3 \\
\qquad\quad \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
\qquad\qquad\qquad 3x - 3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(3x - 3)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Koeffizientenvergleich:

Man setzt das gesuchte Polynom $P_3(x)$ als $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ an und hat damit

$$
\begin{aligned}
x^4 - 6x^2 + 8x - 3 &= (x-1)P_3(x) = \\
&= Ax^4 + (B-A)x^3 + (C-B)x^2 + (D-C)x - D.
\end{aligned}
$$

Linke und rechte Seite stellen dasselbe Polynom 4. Grades dar. Übereinstimmung liegt sicher vor, wenn die Koeffizienten gleich sind. Wir erhalten also für die vier unbekannten Koeffizienten A, B, C und D das folgende aus fünf Gleichungen bestehende Gleichungssystem:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{I} & A = 1 \\
\text{II} & B - A = 0 \\
\text{III} & C - B = -6 \\
\text{IV} & D - C = 8 \\
\text{V} & -D = -3
\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}
A = 1 \\
B = 1 \\
C = -5 \\
D = 3
\end{array}\right.
$$

Somit ist $P_3(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

Die linke Seite der gegebenen Gleichung 4. Grades kann damit faktorisiert werden; man erhält

$$x^4-6x^2+8x-3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2-5x+3)=0.$$

Falls die gegebene Gleichung noch weitere Lösungen besitzt, erhält man sie als Lösungen von $x^3+x^2-5x+3=0$. Durch Probieren findet man, daß $x_2=1$ diese Gleichung löst. Damit kann man ihre linke Seite nach einem der obigen Verfahren faktorisieren zu $(x-1)(x^2+2x-3)$. Die quadratische Gleichung $x^2+2x-3=0$ hat die Lösungen $x_3=1$ und $x_4=-3$, so daß wir schreiben können

$$x^4-6x^2+8x-3=0 \Leftrightarrow (x-1)^3(x+3)=0.$$

Die gegebene Gleichung 4. Grades besitzt also die Lösungen -3 und 1. Da bei der Faktorisierung der Linearfaktor $(x-1)$ in der 3. Potenz auftritt, sagt man, 1 sei eine dreifache Lösung der Gleichung.

Der Reduktionssatz gestattet eine Abschätzung der Anzahl der Lösungen, die eine Gleichung n-ten Grades haben kann. Jede Lösung x_0 läßt nämlich die Abspaltung des Linearfaktors $(x-x_0)$ zu, und bei einem Polynom n-ten Grades kann ein solcher Faktor höchstens n-mal ausgeklammert werden. Also gilt

Satz 106.1: Eine Gleichung n-ten Grades hat höchstens n Lösungen. Dabei wird jede Lösung in ihrer Vielfachheit gezählt.

Bei quadratischen Gleichungen in Normalform gibt der Satz von VIETA einen Zusammenhang zwischen den Lösungen x_1, x_2 und den Koeffizienten p, q der Gleichung $x^2+px+q=0$ an:

$$p=-(x_1+x_2) \text{ und } q=x_1\cdot x_2.$$

Ein analoger Satz gilt auch für Gleichungen höheren Grades in Normalform, d.h. mit $a_n=1$.

Wir betrachten zunächst eine Gleichung 3. Grades in Normalform:

$x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ habe die 3 Lösungen x_1, x_2 und x_3.

Nach dem Reduktionssatz gilt dann

$$\begin{aligned} &x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)= \\ &=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1)x-x_1\cdot x_2\cdot x_3. \end{aligned}$$

Offenbar ist der Zusammenhang bei dem mittleren Koeffizienten komplizierter. Aber wenigstens bei den Koeffizienten a_0 und a_{n-1} sind die Ausdrücke so einfach, daß es sich lohnt, sie sich zu merken:

Satz 106.2: Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Lösungen der Gleichung

$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$, dann gilt:

$a_{n-1}=-(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ und $a_0=(-1)^n\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$.

Der **Beweis** verläuft wie oben bei der Gleichung 3. Grades.

Die Beziehung $a_0 = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ läßt vermuten, daß ganzzahlige Lösungen einer Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten Teiler von a_0 sein müssen. Tatsächlich gilt

> **Satz 107.1:** Sind alle Koeffizienten der Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ **ganzzahlig**, dann ist jede **ganzzahlige** Lösung Teiler von a_0.

Zum **Beweis** denken wir uns die ganzzahlige Lösung x_1 eingesetzt:
$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = 0$
Daraus folgt $a_0 = -x_1(a_n x_1^{n-1} + a_{n-1} x_1^{n-2} + \ldots + a_1)$,
d.h., x_1 ist Teiler von a_0, q.e.d.

Sind die Koeffizienten a_i zwar rational, aber nicht alle ganzzahlig, dann multiplizieren wir mit dem Hauptnenner der Koeffizienten und erhalten eine Gleichung mit lauter ganzzahligen Koeffizienten, auf die man Satz 107.1 anwenden kann.

Beispiel:

$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 9x + \frac{9}{2} = 0 \quad \| \cdot 2$
$2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$

Ganzzahlige Lösungen können nur Teiler von 9 sein, also ± 1, ± 3, ± 9. Wir setzen ein:

$+1$:	$2 - 1 - 18 + 9 = -8$	keine Lösung
-1:	$-2 - 1 + 18 + 9 = 24$	keine Lösung
$+3$:	$54 - 9 - 54 + 9 = 0$	Lösung
-3:	$-54 - 9 + 54 + 9 = 0$	Lösung
$+9$:	$1458 - 81 - 162 + 9 = 1224$	keine Lösung
-9:	$-1458 - 81 + 162 + 9 = -1368$	keine Lösung

Satz 106.2 liefert uns zu den beiden so gefundenen Lösungen -3 und 3 die dritte:
$(-1)^3 \cdot 3 \cdot (-3) \cdot x_3 = \frac{9}{2}$, also $x_3 = \frac{1}{2}$.

Sucht man nicht nur die ganzzahligen, sondern auch die übrigen rationalen Lösungen, dann kann man sich des folgenden Satzes bedienen:

Satz 108.1: Sind alle Koeffizienten der Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

ganzzahlig, so gilt für jede vollständig gekürzte **rationale** Lösung $\frac{p}{q}$: p ist Teiler von a_0, und q ist Teiler von a_n.

Beweis: Wir setzen die Lösung $\frac{p}{q}$ ein und multiplizieren die Gleichung mit q^n.

Das ergibt $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$.
Somit gilt $a_0 q^n = -p \cdot (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + a_{n-2} p^{n-3} q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1})$
und auch $a_n p^n = -q \cdot (a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})$.

Weil p und q nach Voraussetzung teilerfremd sind, muß p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n sein.

Bei der Gleichung $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ kommen demnach als rationale Lösungen nur die Zahlen ± 1, ± 3, ± 9, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{3}{2}$, $\pm \frac{9}{2}$ in Frage. Tatsächlich heißen die Lösungen -3, $+3$ und $\frac{1}{2}$, wie oben gezeigt wurde.

René DESCARTES (1596–1650) hat 1637 in seiner *La Géométrie* eine Regel für die möglichen Anzahlen positiver bzw. negativer Lösungen angegeben.

Satz 108.2: Vorzeichenregel von DESCARTES
Die Anzahl der positiven Lösungen einer algebraischen Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_0 \neq 0$ ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ oder um eine gerade Anzahl kleiner.
Die Anzahl ihrer negativen Lösungen ist gleich der Anzahl der positiven Lösungen derjenigen Gleichung, die entsteht, wenn man in der gegebenen Gleichung x durch $-x$ ersetzt.
Beachte: Jede Lösung wird gemäß ihrer Vielfachheit gezählt.

Erste Beweisversuche unternahmen 1675 Jean PRESTET (1652–1690) und 1728 Johann Andreas VON SEGNER (9.10.1704 Preßburg – 5.10.1777 Halle/Saale). Vollständig bewiesen hat diesen Satz aber erst 1828 Carl Friedrich GAUSS (1777–1855), von dem auch die obige »zweckmäßige Einkleidung« stammt.* Wer die Verschärfung »oder um eine gerade Anzahl kleiner« lieferte, konnten wir nicht ermitteln.

* DESCARTES selbst schreibt, daß die Anzahl der negativen Lösungen gleich der Anzahl der Vorzeichenwiederholungen in der Koeffizientenfolge ist. Dann müssen Koeffizienten 0 allerdings mit einem Vorzeichen versehen werden! Aber nur eine geschickte Belegung mit + und − liefert eine gute Abschätzung.

Beispiele:

1) DESCARTES zeigt seine Regel an $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$. Die Vorzeichenfolge $+--+-$ hat 3 Wechsel $(+-, -+, +-)$: 3 oder 1 positive Lösung. x durch $-x$ ersetzen: $x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$ hat die Vorzeichenfolge $++---$ mit einem Wechsel $(+-)$: 1 negative Lösung. Tatsächlich hat die Gleichung die Lösungen -5, 2, 3 und 4.
2) $x^7+x^5-x^2-1=0$ hat die Vorzeichenfolge $++--$ mit 1 Wechsel: 1 positive Lösung. x durch $-x$ ersetzen: $-x^7-x^5-x^2-1=0$ hat die Vorzeichenfolge $----$ ohne Wechsel: keine negative Lösung. Tatsächlich hat die Gleichung die Lösung 1.

Aufgaben

1. Bei den folgenden Gleichungen sind die angegebenen Zahlen Lösungen. Bestimme die Lösungsmenge und stelle das Gleichungspolynom als Produkt von Linearfaktoren dar.

a) $x^3-x^2-4x+4=0,\ x_1=2$

b) $x^3-3x-2=0,\ x_1=-1$

c) $x^4+3x^3-3x^2-11x-6=0,\ x_1=-1,\ x_2=2$

2. Gib eine Gleichung möglichst niedrigen Grades in Normalform an, die die angegebenen Lösungen besitzt.

a) $-1, 1, 3$ **b)** -5 zweifach und 5 **c)** $\frac{1}{2}, 1, 2$

d) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, 3$ **e)** $0, 1, 2, 3, 4$

3. Welche Vielfachheit hat die Lösung $x_1=2$ in der Gleichung

a) $x^3-2x^2-x+2=0$,

b) $2x^4-8x^3+7x^2+4x-4=0$,

c) $x^5-6x^4+13x^3-14x^2+12x-8=0$?

4. $x^3-3x-a=0$ hat die Lösung $\sqrt{2}$. Bestimme a und die weiteren Lösungen.

5. Bei der Gleichung $x^3+ax^2-16x+160=0$ haben zwei Lösungen entgegengesetztes Vorzeichen. Bestimme a und alle Lösungen.

6. $x^4-5x^3+6x^2+ax+b=0$ hat eine dreifache Lösung. Bestimme a und b und die Lösungen. (*Hinweis:* Setze das Gleichungspolynom als Produkt von Linearfaktoren an und führe einen Koeffizientenvergleich durch.)

7. Welche Bedingungen müssen a, b und c erfüllen, damit die Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$

a) die Lösungen -1, 1 und 2 hat,

b) die Doppellösung 1 und die einfache Lösung 2 hat,

• **c)** zwei ganzzahlige Lösungen hat, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden? Gib den Gleichungstyp und die Lösungen an.

• **8.** Gib eine Gleichung an, deren Lösungen

a) jeweils doppelt so groß sind wie

b) jeweils halb so groß sind wie

• **c)** jeweils um 1 größer sind als

die Lösungen von

1) $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ **2)** $8x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x + 1 = 0$.

Da **1)** das Beispiel von Seite 107 ist, kannst du die Richtigkeit leicht überprüfen.

9. René DESCARTES (1596–1650) bestimmt 1637 in seiner *La Géométrie* zur Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ eine Gleichung, deren Lösungen **a)** jeweils um 3 kleiner **b)** jeweils um 3 größer sind als die Lösungen der gegebenen Gleichung. Wie heißen die Gleichungen?

⁝ **10.** René DESCARTES (1596–1650) löst 1637 in seiner *La Géométrie* die Gleichung $x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, indem er zunächst eine Gleichung sucht, deren Lösungen das $\sqrt{3}$fache der Lösungen der gegebenen Gleichung sind. Mit Hilfe von Satz 108.1 lassen sich die Lösungen dieser Gleichung und damit auch die der Ausgangsgleichung bestimmen. Mach es nach!

11. $x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$

a) Begründe: Jede rationale Lösung ist ganzzahlig.

b) Welche ganzen Zahlen kommen als Lösungen in Frage?

c) Bestimme die Lösungsmenge.

12. Beweise den **Satz**: Rationale Lösungen einer algebraischen Gleichung in Normalform, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, können nur ganze Zahlen sein.

13. Ermittle die ganzzahligen Lösungen der folgenden Gleichungen mit Hilfe von Satz 108.1, bestimme anschließend die Lösungsmenge und stelle schließlich das Gleichungspolynom als Produkt von Linearfaktoren dar.

a) $x^3 - 2x - 1 = 0$ **b)** $x^3 + 2x^2 - 6x - 9 = 0$

c) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ **d)** $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

14. Ermittle die rationalen Lösungen der folgenden Gleichungen mit Hilfe von Satz 108.1, bestimme anschließend die Lösungsmenge und faktorisiere schließlich das Gleichungspolynom.

• **a)** $4x^5 - 9x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$ **b)** $2x^3 - x + 1 = 0$

c) $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$ **d)** $27x^4 - 27x^3 - 9x^2 + 11x - 2 = 0$

15. Bestimme nach der Vorzeichenregel von DESCARTES die möglichen Anzahlen positiver und negativer Lösungen. Gib die möglichen ganzzahligen Lösungen an. Ermittle die Lösungsmenge.

a) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$ **b)** $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$ **d)** $x^3 + 1 = 0$

e) $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = 0$ **f)** $x^5 - 5x + 22 = 0$

16. Bestimme nach der Vorzeichenregel von DESCARTES die möglichen Anzahlen positiver und negativer Lösungen und die möglichen rationalen Lösungen. Gib schließlich die Lösungsmenge an.

a) $3x^3 + 5x^2 + 7x - 3 = 0$ **b)** $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

c) $9x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$ **d)** $64x^4 - 128x^3 + 84x^2 - 20x + 1 = 0$

17. a) Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung $x^5 + x + 1 = 0$ keine positive, aber genau eine negative Lösung hat, und weise nach, daß sie nicht rational ist.

b) 1) Bestimme eine Näherungslösung von $x^5 + x + 1 = 0$ durch Schneiden der Graphen $y = x^5$ und $y = -x - 1$.

2) Verbessere die Näherungslösung durch die Iteration $x_{n+1} = -\sqrt[5]{x_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}_0$ auf 6 geltende Ziffern.

3) Was ergibt sich bei dem naheliegenden Iterationsverfahren $x_{n+1} = -x_n^5 - 1$, $n \in \mathbb{N}_0$?

****c)** Schreibe $x^5 + x + 1$ als Produkt aus einem Polynom 3. und 2. Grades und bestimme mit der Formel von CARDANO (Seite 116) die Lösung exakt.

18. Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung $2x^6 + 10x^4 + 7x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung hat. Wie kann man das auch einfacher einsehen?

19. Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES: Die Lösungsmenge einer algebraischen Gleichung ungeraden Grades ist nicht leer.

**5.4 Zur Geschichte der Auflösung von Gleichungen

Wie du im letzten Jahr gelernt hast, konnten die Babylonier bereits um 2000 v. Chr. quadratische Gleichungen lösen; aber der Weg zur Lösungsformel war noch lang. Erst Simon STEVIN (1548–1620) schaffte es in seiner 1585 in Leiden erschienenen *L'Arithmétique* dadurch, daß er auch negative Zahlen als Koeffizienten zuließ.
Ungleich schwieriger war es, die kubische Gleichung zu lösen. Die Babylonier benützten hierzu eine Tabelle, in der zu jeder natürlichen Zahl n der Wert von $n^3 + n^2$ aufgeführt wurde (siehe Aufgabe 120/**1**). Bei den Griechen traten kubische Gleichungen bei ganz bestimmten Problemen auf, nämlich dem Delischen Problem der Würfelverdopplung – dem Analogon zur Quadratverdopplung des MENON – (Aufgabe 46/**7** und 85/**12**) oder der Dreiteilung eines Winkels. Gelöst wurden sie geometrisch unter Zuhilfenahme bestimmter Kurven.

Weder die Inder noch die Araber fanden eine algebraische Lösungsmethode für die kubischen Gleichungen. Immerhin gelang es aber dem persischen Dichter, Philosophen, Astronomen und Mathematiker Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) in seiner *Abhandlung über die Beweise und Probleme von Algebra und Muqabala*, alle Typen kubischer Gleichungen graphisch unter Verwendung von Kreisen und Parabeln bzw. Hyperbeln zu lösen (*Algebra 3*, Seite 170). Dabei entgeht ihm aber, daß gewisse Aufgaben drei Lösungen besitzen. Sein Werk wurde dem Abendland leider erst im 19. Jh. bekannt.

Mit der allmählichen Verbreitung algebraischer Kenntnisse versuchte man sich im Italien des 14. Jh.s an der allgemeinen Lösung der kubischen Gleichung. 1494 setzte Luca PACIOLI (1445?–1517) in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*, dem damals weitverbreiteten Standardwerk über das mathematische Wissen seiner Zeit, in einer kleinen Liste von Gleichungen höheren Grades – wir benützen unsere Symbole – neben $Ax^4 + Cx^2 = Dx$ und $Ax^4 + Dx = Cx^2$ das Wort *imposibile* (sic!), zu deutsch *unmöglich*. Klammert man Ax aus, so hat man kubische Gleichungen der Form $x^3 + bx = c$ bzw. $x^3 + c = bx$ vor sich. Für die Koeffizienten b und c wurden dabei nur positive Zahlen zugelassen. Meinte nun PACIOLI mit seinem »unmöglich«, daß man grundsätzlich keine kubische Gleichung lösen könne? Nein; denn auf der übernächsten Seite (folium 150r) liest man sein Bedauern, daß »man bis heute noch keine allgemeinen Regeln aufstellen konnte«. 51 Jahre später wurden sie veröffentlicht, unter dramatischen Umständen, die die Zeitgenossen und auch die Nachwelt bewegten.

1515 oder gar schon 1505 gelingt es Scipione DEL FERRO (1465–1526), seit 1496 Professor für Mathematik an der Universität von Bologna, die Gleichung $x^3 + bx = c$ zu lösen, was er vermutlich nur einigen wenigen seiner Schüler kundtut.* Fachwissen behielt man damals für sich; konnte man doch damit in öffentlichen Wettkämpfen das Publikum in Erstaunen versetzen und erhebliche Geldpreise gewinnen. Und so fordert einer seiner Schüler, nämlich Antonio Maria FIOR, latinisiert zu FLORIDUS, Rechenmeister aus Brescia, den in Venedig wirkenden Rechenmeister Niccolò FONTANA (1499–1557), der sich lateinisch TARTALEA, italienisch TARTAGLIA** nennt, zu einem solchen Wettkampf. Bis zum 22. Februar 1535 sollte jeder 30 Fragen aus verschiedensten Gebieten der Mathematik versiegelt beim Notar ZAMBELLI in Venedig hinterlegen, die dann innerhalb von 50 Tagen zu lösen waren. Um TARTAGLIA einzuschüchtern, brüstet sich FIOR damit, schon vor 30 Jahren von einem großen Mathematiker gelernt zu haben, wie man die Gleichung $x^3 + bx = c$ löst, überzeugt, daß auf Grund von PACIOLIS »unmöglich« es niemand anderer könne. TARTAGLIA weiß also, woher der Wind weht, und so nimmt er seine Studien über kubische Gleichungen wieder auf; denn bereits 1530 hat ihm in Verona ein anderer Rechenmeister aus Brescia, Zuanne de Tonini DA COI, auch Giovanni COLLA genannt, Gleichungen vom Typ $x^3 + mx^2 = n$ bzw. $x^3 + n = mx^2$ mit $m, n > 0$ vorgelegt. TARTAGLIA hat, wie er selbst schreibt, Glück: Am 12. Februar 1535 findet er die Lösung von (1) $x^3 + bx = c$ und anderntags die von (2) $x^3 = bx + c$. Auch seine Vermutung hat ihn nicht getrogen: allen Aufgaben FIORS lag die kubische Gleichung (1) zugrunde. Und so kann TARTAGLIA innerhalb von zwei Stunden alle Aufgaben lösen!***

Irgendwann kommt DA COI nach Mailand und berichtet Geronimo CARDANO

* Wahrscheinlich konnte er auch $x^3 = bx + c$ und $x^3 + c = bx$ lösen.

** Beides bedeutet DER STOTTERER. 1512 wurde Niccolò als Kind bei der Eroberung Brescias durch einen Schwerthieb eines französischen Soldaten so schwer verwundet, daß er nur mehr stottern konnte. Sein voller Bart verdeckte die entstellende Narbe.

*** TARTAGLIA überliefert uns 1546 in den *Quesiti* (siehe Seite 95) alle Aufgaben FIORS, von den seinigen aber nur die neun, die er CARDANO 1539 mitteilte.

(1501–1576) von diesem Wettkampf. Und da dieser gerade seine *Practica Arithmeticae* herausgeben will, bietet er TARTAGLIA am 2. Januar 1539 durch einen Mittelsmann an, die Lösungsformeln unter TARTAGLIAS Namen in seiner *Practica* zu veröffentlichen. TARTAGLIA lehnt ab, da er sich die Veröffentlichung selbst vorbehalten wolle. Am 13. März wiederholt CARDANO sein Angebot, am 19. März hat TARTAGLIA den Brief in Händen. So schnell ging damals die Post! Außerdem lädt er ihn nach Mailand ein, auch im Namen des Marchese Alfonso D'AVALOS*, der sich für TARTAGLIAS neue, 1537 in der *Nova Scientia* veröffentlichte Entdeckungen über die Schießkunst interessiert. Das gibt den Ausschlag, und bereits am 25. März ist TARTAGLIA Gast in CARDANOS Haus, der Marchese aber ist verreist. Nachdem CARDANO auf das heilige Evangelium geschworen hat, niemals TARTAGLIAS Entdeckung zu veröffentlichen und sie außerdem so verschlüsselt aufzuschreiben, daß niemand nach seinem Tode sie verstehen könne, teilt ihm TARTAGLIA seine Formeln für (1), (2) und auch für (3) $x^3 + c = bx$ in Form eines 25zeiligen leicht einprägbaren Gedichts mit, das er selbst immer als Gedächtnisstütze benütze, um die komplizierten Regeln nicht zu vergessen. Einen Beweis gibt er aber nicht preis, und abrupt reist er ab. (Der vierte für uns mögliche Fall, $x^3 + bx + c = 0$, wird überhaupt nicht betrachtet, da er nur durch negative Zahlen gelöst werden könnte, die nach damaliger Auffassung keine Lösungen sind.)

Abb. 113.1 Gerọnimo, auch Girọlamo CARDANO (24.9.1501 Pavia – 20.9.1576 Rom) Bildnis aus der *Ars magna*, 1545
Die Umschrift lautet:
τὸ μέλλον ὅτι γενήσεται εἰς τὸ φέρτερον τίθει
Halte das Zukünftige, das sich entwickeln wird, für das Bessere!

CARDANO gesteht am 9. April TARTAGLIA, mit den Versen nicht zu Rande zu kommen; er möge sie ihm doch an Hand der Gleichung $x^3 + 3x = 10$ erklären. TARTAGLIA entspricht der Bitte am 23. April, fügt als weiteres Beispiel die Gleichung $x^3 + x = 11$ an und erinnert CARDANO an sein Versprechen, worauf ihm dieser am 12. Mai ein noch ungebundenes Exemplar seiner *Practica* zusendet als Beweis, daß er sich an den Eid gehalten habe. Aber TARTAGLIAS Mißtrauen wird wieder geweckt, als ihm sein ehemaliger Schüler Meister Maphio POVEIANI aus Bergamo am 10. Juli kundtut, in Mailand werde erzählt, CARDANO schreibe an einem neuen Werk über Algebra mit neuen Entdeckungen. TARTAGLIA bereut, das Geheimnis preisgegeben zu haben**, und beantwortet zwei Briefe CARDANOS nicht. Als er jedoch am 4. August einen Brief CARDANOS erhält, in dem ihm dieser an Hand der Gleichung $x^3 = 9x + 10$ mitteilt, daß die Formeln in gewissen Fällen versagen, obwohl es eine Lösung gibt – es handelt sich

* Der Spanier war der kaiserliche Gouverneur der Lombardei. † 1546.

** Quello che tu non voi che si sappia nol dir ad alcuno – Was du nicht willst, daß man weiß, das sag keinem. Mit diesem Sprichwort fordert TARTAGLIA Meister POVEIANI am 19. Juli auf, ein wachsames Auge auf CARDANO zu haben und ihn auf dem laufenden zu halten.

um CARDANOs Entdeckung des *casus irreducibilis* (Aufgabe 121/**5** und **6**) –, weicht TARTAGLIA in seiner Antwort vom 7. August diesem Problem aus und meint, CARDANO habe eben die Formeln nicht richtig verstanden; darüber hinaus bedauere er, ihn eingeweiht zu haben, da er sich in Mailand brüste, neue Regeln in der Algebra entdeckt zu haben. Am 18. Oktober verteidigt sich CARDANO, indem er durch Lösen der Gleichung $x^3 = 12x + 20$ zeigt, daß er die Terzinen* TARTAGLIAS wohl verstanden hat; TARTAGLIA aber hat keine Lust mehr zu antworten. Da erreicht ihn ein Brandbrief vom 5. Januar 1540, in dem CARDANO voll des Schreckens schreibt, der »Teufel« DA COI sei wieder in Mailand und behaupte, ebenfalls die Regeln für die kubische Gleichung zu kennen, ja noch mehr, auch die Gleichung 4. Grades lösen zu können, was er ihn lehren wolle, falls er ihm freiwillig seine öffentlichen Vorlesungen über Arithmetik überließe. TARTAGLIA zerpflückt diesen Brief in den *Quesiti*, beantwortet ihn aber nicht. Und so endet die Korrespondenz dieser beiden Mathematiker.
In der Folgezeit gelingt es CARDANO, einen Beweis für TARTAGLIAS Regeln zu finden und darüber hinaus die allgemeine kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen – CARDANO muß natürlich wieder viele Fälle unterscheiden –, indem er sie durch die Transformation $x =: y - \frac{a}{3}$ auf eine der Formen (1) bis (3) bringt, die kein quadratisches Glied enthalten (Aufgabe 121/**7**). Im Jahre 1542 reist er mit seinem überaus begabten Schüler Ludovico FERRARI (1522–1565)** nach Florenz; in Bologna sehen sie dabei den Nachlaß Scipione DEL FERROs bei dessen Nachfolger und Schwiegersohn Annibale DELLA NAVE (um 1500–1558) ein. Sie finden darin gut und elegant erklärt die Lösung, die auch TARTAGLIA angegeben hat. (TARTAGLIA wird später, am 21. April 1547, entgegnen, seine Entdeckung könne zu jeder Zeit auch von anderen gemacht werden, er habe alles selbst gefunden.) Schließlich gelingt es Ludovico FERRARI, das von DA COI in einem Wettstreit gestellte Problem einer Gleichung 4. Grades durch Zurückführung auf eine kubische Gleichung zu lösen.*** Durch diese Entdeckungen und vor allem durch den selbständig gefundenen Beweis fühlt sich CARDANO nicht mehr an seinen Eid gebunden, den es laut FERRARI überhaupt nicht gegeben habe, und veröffentlicht 1545 (Widmung vom 9. Januar) in seiner *Ars magna* die Regeln für die Lösung der kubischen Gleichungen – insgesamt sind es 13 Fälle – und, unter voller Anerkennung der Leistung FERRARIS, die für die Gleichung 4. Grades.
Die drei Regeln TARTAGLIAS und CARDANOs für die Gleichungen (1) bis (3) lassen sich zu einer zusammenfassen, die dann auch für den vierten Fall gilt, wenn man grundsätzlich zuläßt, daß die in Gleichungen auftretenden Buchstaben auch negative Zahlen bedeuten können. Wir eilen nun der Zeit voraus; denn erst Jan HUDDE

* Terzine, vom italienischen *terzo = dritter*, ist eine Strophenform aus ursprünglich je drei elfsilbigen Versen mit dem Reimschema aba/bcb/cdc/.../z. DANTES (1265–1321) *Divina Commedia* z. B. ist in Terzinen verfaßt.

** Er wurde 1536 als 14jähriger in CARDANOs Haushalt als Hausbursche aufgenommen. Von 1540 bis 1556 lehrte er Mathematik in Mailand und anschließend in Bologna. Vermutlich wurde er von seiner Schwester vergiftet.

*** DA COI hat dieses Problem TARTAGLIA bereits am 12. September 1535 zur Lösung vorgelegt, nur mit etwas anderen Zahlen. Unverständlicherweise schickt CARDANO dasselbe Problem als seine eigene Aufgabe am 2. Januar 1539 an TARTAGLIA, der es sofort als das DA COIs erkennt und dies auch CARDANO auf den Kopf zusagt, worüber dieser entrüstet ist. Aber am 5. Januar 1540 ist es in CARDANOs Brief doch wieder das Problem DA COIs, und in Kapitel XXXIX seiner *Ars magna* schreibt CARDANO ehrlich, daß es von DA COI stammt. Es handelt sich in der dortigen Fassung um die Aufgabe, 10 so in drei Summanden zu zerlegen, daß sie in fortlaufender Proportion zueinander stehen und daß das Produkt aus dem ersten und zweiten Summanden 6 ergibt. Für den zweiten Summanden y erhält man die Gleichung $y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$. Die von CARDANO angegebene Lösung ist übrigens falsch. – Im Lösungsheft wird gezeigt, wie FERRARI diese Gleichung gelöst hat.

(1628–1704) hat diese so fruchtbare Idee in seiner 1654/55 entstandenen und 1659 erschienenen Arbeit *De reductione aequationum* (siehe Seite 105). In ihr leitet er auch die dann auf alle Fälle anwendbare, üblicherweise nach CARDANO benannte Formel zur Lösung der kubischen Gleichung her, wobei er den Weg TARTAGLIAS nur geringfügig modifiziert. Er ersetzt nämlich in der Gleichung*

$$x^3 + px + q = 0$$

die Unbekannte x durch $u + v$ und erhält damit die Gleichung

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Diese ist sicher erfüllt, wenn

I $\quad 3uv = -p$
II $\quad u^3 + v^3 = -q$ ist.

Ohne Schwierigkeit erhält man daraus

I′ $\quad 3uv = -p$

II′ $\quad u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$

Gleichung II′ ist eine quadratische Gleichung für u^3. Man kann also aus dem Gleichungssystem leicht u und v berechnen (Aufgabe 121/**2**) und erhält damit für die Unbekannte x die als Formel von CARDANO bezeichnete Darstellung

1686

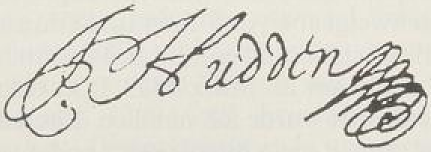


Abb. 115.1 Jan HUDDE (getauft 23.5.1628 Amsterdam – 15.4.1704 Amsterdam) – Gemälde von Michiel VAN MUSSCHER (1645–1705)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

In dieser Darstellung von x wird die Kubikwurzel noch in der in jener Zeit üblichen Art benützt, bei der der Radikand auch negativ sein durfte; $\sqrt[3]{-8}$ ergab -2, so, wie es auch manche Taschenrechner heute tun. Bei dieser Deutung der dritten Wurzel dürfen aber die Potenzgesetze nicht auf gebrochene Exponenten übertragen werden, wie du weißt. Die Taschenrechner zeigen bei $(-8)^{\frac{1}{3}}$ auch ERROR an! Wir lassen zur Vermeidung von Schwierigkeiten aus diesem Grunde nur nichtnegative Radikanden zu und müssen deshalb bei der Auflösung der Gleichung $u^3 = \ldots$ usw. nach Satz 98.1 vorgehen. Dann ergibt sich als

* HUDDE selbst geht vom Ausdruck $x^3 = qx + r$ aus. Wir benutzen die heute übliche Nullform einer Gleichung.

Formel von CARDANO

Die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ hat die Lösung

$$x = \operatorname{sgn} R_1 \sqrt[3]{|R_1|} + \operatorname{sgn} R_2 \sqrt[3]{|R_2|}$$

$$\text{mit}\quad R_1 := -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad R_2 := -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Offensichtlich versagt dieser Lösungsweg, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung für u^3 negativ ist, d.h., wenn $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ ist. Das ist aber genau der von CARDANO entdeckte casus irreducibilis. 1745 zeigte Abraham Gotthelf KÄSTNER (1719–1800), daß in diesem Fall die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ stets drei reelle Lösungen besitzt. 1891 bewies Ludwig Otto HÖLDER (1859–1937), daß diese Bedingung auch notwendig ist und daß sich diese drei Lösungen grundsätzlich nicht durch Wurzeln darstellen lassen.

Kehren wir aber nach diesem Ausflug bis in das 19. Jh. zurück ins Jahr 1545 zu CARDANO und seiner *Ars magna.* Darin berichtet er gleich im 1. Kapitel, daß Scipione DEL FERRO als erster die Lösung der kubischen Gleichung (1) gefunden habe und daß dies später auch TARTAGLIA gelungen sei, der sie ihm auf seine Bitten mitgeteilt habe. Er verschweigt aber, daß TARTAGLIA ihm auch die Formel für Typ (2) und (3) verraten hat! Schließlich kommt er auf Luca PACIOLIS »unmöglich« zu sprechen und wiederholt, was er bereits am 25. März 1539 TARTAGLIA gegenüber geäußert hat:

»Getäuscht wurde ich nämlich durch die Worte Luca PACIOLIS, der behauptet, daß es über seine Regeln hinaus keine andere allgemeingültige geben könne; obwohl diese, da ich vordem schon so vieles gefunden hatte, auf der Hand lag, hatte ich dennoch keine Hoffnung zu finden, was ich nicht zu suchen wagte.«

Aus diesen Worten spricht Überheblichkeit, aber auch Ärger darüber, so schnell aufgegeben zu haben, weil man den Worten eines anderen zu sehr vertraut hatte!

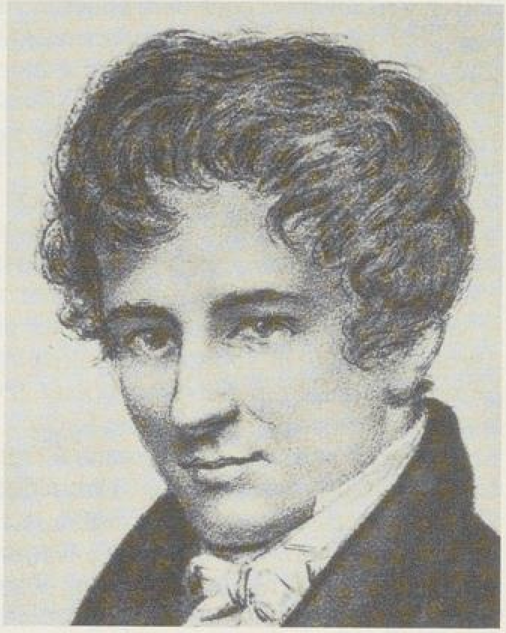
TARTAGLIA fühlt sich getäuscht und bringt Juli 1546 seine HEINRICH VIII. von England (reg. 1509–1547) gewidmeten *Quesiti, et inventioni diverse* – »Aufgaben und verschiedene Erfindungen« – auf den Markt. Im 9. Buch erzählt er den von uns wiedergegebenen Ablauf der Ereignisse und bezichtigt CARDANO des Eidbruchs. Aber nur FERRARI reagiert darauf. Am 10. Februar 1547 erklärt er sich in einem Brief, den er in Abschrift an 53 hochgestellte Persönlichkeiten und Mathematiker Italiens verschickt, zu einem Streitgespräch mit TARTAGLIA bereit. Dieser läßt seine Antwort in 1000 Exemplaren drucken, woraus sich ein Briefwechsel entwickelt, die sog. 12 *cartelli di matematica disfida* – »Briefe der mathematischen Herausforderung«. Darin legen sich die Kontrahenten auch jeweils 31 Probleme vor. Um die immer schärfer werdenden gegenseitigen Vorwürfe zu beenden, erklärt sich TARTAGLIA am 16. Juni 1548 bereit, nach Mailand zu kommen, was FERRARI am 14. Juli 1548 akzeptiert. Mit dessen Vorschlag, Ferrante GONZAGA, der Gouverneur von Mailand, solle die Jury bestimmen, ist TARTAGLIA am 24. Juli 1548 einverstanden. CARDANO verläßt die Stadt. Am 10. August 1548 beginnt zur 18. Stunde* in der Kirche der Hl. Maria im Garten der Minoriten der Wettstreit. TARTAGLIA erscheint in Begleitung seines Bruders, FERRARI mit vielen Freunden. Über den genaueren Verlauf wissen wir wenig: Nach dem ersten Auftritt TARTAGLIAS entwickelt sich ein längerer Disput über die Bestellung der Jury, in

* = 14.30 Uhr. Siehe dazu z. B. GOETHE, *Italienische Reise*, 17.9.1786

dessen Verlauf einer nach dem anderen zum Abendessen geht. TARTAGLIA verläßt, sich angeblich bedroht fühlend, anderntags Mailand auf einem anderen Weg. Eine dunkle und sicher nicht sehr ehrenvolle Geschichte hat ein ruhmloses Ende gefunden.
TARTAGLIA kommt 1551 im *Terzo Ragionamento sopra la Travagliata Inventione* – »Dritte Erörterung über die mühevolle Erfindung« –, 1556 und postum 1560 in seinem *General trattato di numeri, et misure* – »Allgemeine Abhandlung über Zahlen und Maße« – mehrmals auf diese Vorgänge zu sprechen. CARDANO wiederholt 1554 in seinem erst 1557 gedruckten *De libris propriis* – »Über die eigenen Bücher« – die bereits in der *Ars magna* gegebene Darstellung, zeiht TARTAGLIA aber wegen dessen »Verleumdungen der Unverschämtheit und Dummheit«; diese Passage fehlt in der erweiterten Fassung von 1562. Immer aber besteht CARDANO darauf, daß »Niccolò Tartaglia, der übel von mir sprach, später in Mailand widerrufen mußte«, wie es in seiner 1575, also ein Jahr vor seinem Tode, zusammengestellten Autobiographie *De vita propria* – »Über das eigene Leben« – heißt. Aber er gesteht dort auch: »In der Mathematik habe ich einiges, jedoch recht weniges, dem Bruder Niccolò zu danken.« Und er bedauert, daß »dieser mich jedoch lieber zum Rivalen wollte, und zwar zum überlegeneren, als zu einem Freund, der ihm ob seiner Tat Dank schuldet.« Mit der *Ars magna* CARDANOS hat die Geheimniskrämerei der Rechenmeister ein Ende gefunden, die Wissenschaft kann sich fortentwickeln.
In den nächsten 250 Jahren machen sich die besten Mathematiker an die Auflösung der Gleichungen 5. und höheren Grades, darunter VIÈTE, DESCARTES, LEIBNIZ und EULER. Zunächst aber stellt 1608 der Nürnberger Rechenmeister Peter ROTH († 1617) in seiner *Arithmetica philosophica* fest, daß eine Gleichung n-ten Grades höchstens n Lösungen haben kann[+], und 1629 der Flame Albert GIRARD (1595–1632) in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre*, daß es genau n Lösungen gibt, wenn man Wurzeln aus negativen Zahlen zuläßt. Bewiesen hat dies allerdings erst 1799 Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) als 22jähriger in seiner Doktorarbeit *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. Drei weitere Beweise lieferte er im Laufe seines Lebens für diesen Satz, den er 1849 »Grundlehrsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen« nannte und der heute **Fundamentalsatz der Algebra** heißt. Natürlich hat man mit einem solchen Existenzbeweis noch keine Lösungsformel!
Wenn auch z.B. Abraham DE MOIVRE (1667–1754) die Lösung der reziproken Gleichungen höherer Grade (*Algebra 9*, Seite 129) gelungen war, so waren alle Versuche fehlgeschlagen, eine Formel für die allgemeine Gleichung höheren Grades als 4 zu finden. Was keiner glauben wollte, spricht 1799 GAUSS in seiner Doktorarbeit aus: »Es werde vielleicht nicht so schwer sein, die Unmöglichkeit bereits für den 5. Grad in aller Strenge zu beweisen, worüber ich an anderer Stelle meine Untersuchungen breiter darlegen möchte.«* Im selben Jahr veröffentlicht Paolo RUFFINI (1765–1822) ein umfangreiches 324seitiges Werk**, in dem er mehr nachzuweisen versucht, nämlich die Unmöglichkeit, eine Gleichung von höherem Grad als 4 zu lösen. Aber sein Beweis war nicht zwingend. Auch weitere Arbeiten (1802, 1804 und 1813) konnten die Beweislücken nicht schließen.
Der Ruhm, den ersten vollständigen Beweis geliefert zu haben, gebührt dem Norweger Niels Henrik ABEL (1802–1829). Auf der Domschule zu Oslo erkannte 1817 sein neuer Mathematiklehrer*** Bernt Michael HOLMBOE (1795–1850) die Begabung des Jungen;

[+] Jost BÜRGI (1552–1632) sprach dies bereits nach 1598 in seiner (erst 1973 gedruckten) *Coss* aus (s. S. 39).
* Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem jam pro quinto gradu omni rigore demonstrare, de qua re alio loco disquisitiones meas fusius proponam.
** *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generale di grado superiore al quarto*
*** Der Vorgänger mußte die Schule verlassen, weil ein Schüler, den er über die Maßen gezüchtigt hatte, starb.

spätestens 1828



1826

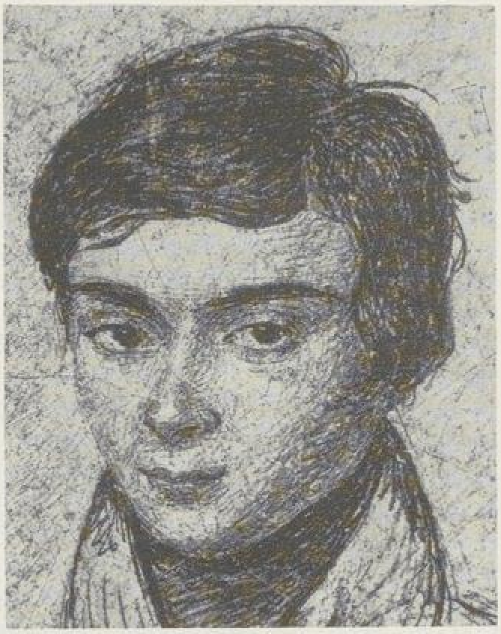
Abb. 118.1 Carl Friedrich GAUSS [Gauß] (30.4.1777 Braunschweig bis 23.2.1855 Göttingen) – Lithographie von Siegfried BENDIXEN (1786 – nach 1864)

Abb. 118.2 Niels Henrik ABEL (5.8.1802 Findø bei Stavanger – 6.4.1829 Froland bei Arendal) – Gemälde von Johan GÖRBITZ (1782–1853)

er förderte ihn, indem er ihm die Originalarbeiten der mathematischen Koryphäen seiner Zeit zu lesen gab. Von RUFFINIS Arbeiten jedoch erfuhr ABEL nichts, und so glaubte er 1821, trotz der Bemerkung GAUSSENS, eine Lösungsformel für die Gleichung 5. Grades gefunden zu haben, und sandte sie an Professor DEGEN nach Kopenhagen, der ihn bat, ein Beispiel durchzurechnen. Da erst ging ihm die Fehlerhaftigkeit seiner Schlußweise auf! 1824 veröffentlichte er auf eigene Kosten eine nur einen halben Druckbogen umfassende Schrift*, in der er die Unmöglichkeit, die Gleichung 5. Grades algebraisch zu lösen, bewies. Er sandte sie GAUSS zu, der sie unaufgeschnitten beiseite legte. 1825 bis 1827 reiste ABEL mit einem kleinen Stipendium der norwegischen Regierung nach Berlin und Paris. August Leopold CRELLE (1780–1855) erkannte die Bedeutung des jungen Mathematikers und veröffentlichte 1826 ABELS abschließende Arbeit als Übersetzung, nämlich den *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten algebraisch aufzulösen* zusammen mit fünf weiteren Arbeiten ABELS in der ersten Nummer seiner neugegründeten Fachzeitschrift *Journal für reine und angewandte Mathematik*, die heute noch existiert.
Nun wußte man es, auf rund 20 Seiten klar bewiesen! Aber ABEL stellt sich sofort die neue spannende Aufgabe, »alle Gleichungen zu finden, die algebraisch lösbar sind«, wie er am 16.1.1826 an HOLMBOE schreibt. Seine Arbeiten gedeihen, kommen aber zu

* *Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*

keinem Abschluß; denn 1829 stirbt er an Schwindsucht. Gelöst hat das Problem Évariste GALOIS (1811–1832) im Januar 1831 durch sein *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* – »Abhandlung über die Bedingungen der Lösbarkeit von Gleichungen durch Radikale« –, aufbauend auf Arbeiten von Joseph-Louis LAGRANGE (1736–1813), GAUSS und Augustin Louis CAUCHY (1789–1857).



1816/17

Abb. 119.1 Évariste GALOIS (25.10.1811 Bourg-la-Reine bei Paris bis 31.5.1832 Paris)

Als GALOIS am Collège Louis-le-Grand in Paris als 15jähriger wegen Schulunlust – in den beiden Jahren davor gehörte er zu den Besten in Latein und Griechisch – die vorletzte Klasse wiederholen muß, besucht er zusätzlich zum ersten Mal einen Mathematikkurs. Bald studiert er die Werke der großen Mathematiker seiner Tage, die *Géométrie* LEGENDRES (1752–1833) und LAGRANGES algebraische Abhandlungen. Im darauffolgenden Jahr vernachlässigt er alle anderen Kurse außer dem der Mathematik und stört, wo er kann. Der Studieneintrag des 2. Trimesters 1827/28 lautet: »Sehr schlechtes Benehmen. […] Er ist darauf aus, sonderbar zu sein. […] Er macht überhaupt nichts für den Unterricht. Die Raserei der Mathematik hat von ihm Besitz ergriffen; deshalb glaube ich, es wäre besser für ihn, wenn seine Eltern zustimmten, daß er sich nur diesem Studium widme; hier verliert er seine Zeit und quält nur seine Lehrer und wird mit Strafen eingedeckt.«* Entgegen allen Ratschlägen lernt er nicht systematisch genug und besteht deswegen zweimal nicht die Aufnahmeprüfung in die berühmte École Polytechnique. Am 25. Mai und am 1. Juni 1829 reicht er zwei Aufsätze über die Auflösung algebraischer Gleichungen bei der Pariser Akademie der Wissenschaften ein, die CAUCHY beurteilen soll. Sie sind nie mehr aufgetaucht.** Im Februar 1830 liefert GALOIS dort eine Arbeit für den Großen Preis der Akademie in Mathematik ein, der Ständige Sekretär Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768–1830) stirbt im Mai. Und auch diese Arbeit wurde nie mehr aufgefunden. Inzwischen war am 20. Februar der republikanisch gesonnene GALOIS in die École préparatoire, die Lehrerbildungsanstalt, aufgenommen worden, in der er, eingeschlossen mit seinen Mitschülern, die drei Glorreichen Tage der Julirevolution untätig verbringen muß. Er greift deswegen den Direktor in einem Brief an, der am

* Conduite fort mauvaise […] Il vise à l'originalité. […] Il ne fait absolument rien pour la classe. C'est la fureur des mathématiques qui le domine; aussi je pense, qu'il vaudrait mieux pour lui que ses parents consentent à ce qu'il ne s'occupe que de cette étude; il perd son temps ici et n'y fait que tourmenter ses maîtres et se faire accabler de punitions.

** ABEL war Ähnliches widerfahren. Ein am 30. Oktober 1826 eingereichtes Manuskript sollte CAUCHY durchsehen; es wurde verschlampt, kam aber 1830 zum Vorschein, als CAUCHY nach der Julirevolution ins Exil ging, und wurde erst 1841 zur Veröffentlichung herausgegeben, nachdem sich die norwegische Regierung eingeschaltet hatte.

5. Dezember 1830 in der *Gazette des Écoles* veröffentlicht wird. Auf Beschluß des Königlichen Rates wird er am 3. Januar 1831 aus der Anstalt ausgestoßen. Am 17. Januar 1831 reicht GALOIS auf Anregung von Siméon-Denis POISSON (1781–1840) sein oben angeführtes *Mémoire* bei der Akademie ein. POISSON und auch Sylvestre-François LACROIX (1765–1843) bemühen sich erheblich, die äußerst knapp gehaltene und auch nicht fehlerfreie Arbeit zu verstehen; schließlich lehnen sie am 4. Juli 1831 ihre Veröffentlichung ab. Am 14. Juli bringt GALOIS sein politisches Engagement zum zweiten Mal ins Gefängnis. Am 29. Mai 1832 wird er zu einem Duell gefordert, dessen Hintergründe von Legenden umrankt sind, die aber letztlich ungeklärt bleiben werden. GALOIS ist sich sicher, daß er sterben wird. In der Nacht vom 29. auf den 30. Mai redigiert er seine früheren Manuskripte und schreibt mehrere Briefe, darunter einen sehr langen an seinen Freund Auguste CHEVALIER, in dem er nochmals seine mathematischen Entdeckungen zusammenfassend darlegt, die in drei *Mémoires* enthalten sind. Eins hatte er schon früher veröffentlicht, das zweite ist das abgelehnte, vom dritten fand sich keine Spur.* Er bittet CHEVALIER, diesen Brief nach seinem Tode zu veröffentlichen, denn er hoffe, daß »es Leute geben wird, die aus der Entzifferung dieses Durcheinanders ihren Nutzen ziehen werden.«** Am Morgen des 30. Mai wird er beim Duell in den Bauch geschossen und angeblich liegen gelassen. Vermutlich suchte man nach einem Arzt. Währenddessen findet ihn zufällig ein Bauer und bringt ihn ins Hospital; am 31. Mai 1832 stirbt GALOIS. Im September 1832 veröffentlicht CHEVALIER in einem Nachruf den mathematischen Abschiedsbrief und erst 1846 Joseph LIOUVILLE (1809–1882) das entscheidende *Mémoire* von 1831, zusammen mit anderen Arbeiten GALOIS'. Eine neue Generation von Mathematikern versteht die grundlegenden Ideen GALOIS', liefert die vollständigen Beweise und erkennt, daß GALOIS aus der einst so wichtigen Frage, welche Gleichungen auflösbar sind, einen völlig neuen Zweig der Mathematik, nämlich eine Mathematik der Strukturen oder die »moderne Algebra« geschaffen hat.

Aufgaben

1. Auf einer Keilschrifttafel aus der späten 1. babylonischen Dynastie (2057–1758)***, deren einer Teil in London (BM 85200) und deren anderer in Berlin (VAT 6599) liegt, sind uns sieben kubische Gleichungen überliefert (siehe auch Aufgabe 46/7). Davon wurden die folgenden mit einer (n^3+n^2)-Tabelle, wie sie uns auf Tafel VAT 8492 überliefert ist,**** gelöst. Es handelt sich jeweils um einen quaderförmigen Erdaushub. Dabei beziehen sich die Maßzahlen x und y von Länge und Breite auf die Einheit GAR ($=6$ m), die Maßzahl z der Tiefe aber auf die Einheit Elle; es gilt 1 GAR = 12 Ellen.

a) Stelle eine $n \mapsto (n^3+n^2)$-Tabelle für die einziffrigen natürlichen Zahlen auf.

b) *Aufgabe 5*: Länge, Breite. Was die Länge ist, ist auch die Tiefe. Querschnitt und Volumen sollst du addieren; es ergibt sich $1\frac{1}{6}$. Die Breite ist $\frac{2}{3}$ der Länge.

1) Stelle eine Gleichung für die Maßzahl z der Tiefe auf und löse sie mit Hilfe der Tabelle.

2) Gibt es weitere reelle Lösungen?

3) Gib Länge und Breite an.

* Die oft gehörte Behauptung, GALOIS habe erst in dieser Nacht seine mathematischen Theorien in fieberhafter Eile niedergeschrieben, ist ein romantisches Schauermärchen.

** [...] il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à dechiffrer ce gâchis.

*** Nach anderer Chronologie: 1894–1554 v. Chr.

**** Diese stammt aus neubabylonischer Zeit, d.h. 625–539 v. Chr.

c) *Aufgabe 23*: Länge, Breite. Der Querschnitt ist ein Quadrat. Die Länge und 1 Elle dazu ist die Tiefe. $1\frac{3}{4}$ als Volumen ist ausgegraben.
Stelle eine Gleichung für die Maßzahl x der Länge auf und löse sie mit Hilfe der Tabelle. Gib auch die Tiefe an.

2. Leite die Formel von CARDANO von Seite 116 auf dem HUDDEschen Weg her.

3. Die Formel von CARDANO liefert die Lösungen der kubischen Gleichung oft in sehr unzweckmäßiger Darstellung.

a) Zeige mit Hilfe der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung $x^3+6x=20$ genau eine positive Lösung hat. Ermittle sie durch Probieren.

b) Löse die Gleichung mit der Formel von CARDANO und bestimme mit Hilfe des Taschenrechners einen Näherungswert für den erhaltenen Ausdruck.*

4. a) Zeige, daß die Gleichungen

1) $x^3+3x=10$ 2) $x^3+x=11$ 3) $x^3=12x+20$

keine ganzzahligen Lösungen haben.

b) Gib eine Lösung mit Hilfe der Formel von CARDANO an.

c) Bestimme mit dem Taschenrechner einen Näherungswert bis auf die 5. Dezimalstelle genau für den in **b)** gewonnenen Ausdruck. Wie gut erfüllt dieser Näherungswert die gegebene Gleichung?

5. Zeige, daß bei $x^3=9x+10$ die Formel von CARDANO nicht angewendet werden kann. Bestimme die drei reellen Lösungen.

6. Im Falle des casus irreducibilis konnte CARDANO Gleichungen nur in besonderen Fällen lösen. Aus Kapitel XXV seiner *Ars magna*, das er daher mit *De Capitulis imperfectis et specialibus* – »Über die unvollkommenen und nur in Sonderfällen brauchbaren Regeln« – überschreibt, stammen die folgenden Gleichungen.

a) $x^3=32x+24$ b) $x^3=16x+21$ c) $x^3+12=34x$

d) $x^3+18=19x$ e) $x^3+8=18x$

7. a) Zeige, daß durch die Transformation $x=:y-\frac{a}{3}$ aus $x^3+ax^2+bx+c=0$ eine kubische Gleichung entsteht, die kein quadratisches Glied mehr enthält.

b) Löse nach diesem Verfahren und der Formel von CARDANO die Gleichung $x^3+6x^2+20x=100$ aus Kapitel XVII der *Ars magna* CARDANOS von 1545.

8. Löse die Gleichungen von Aufgabe **1** mit Hilfe der Formel von CARDANO.

9. Magister JOHANNES legte am Hofe Kaiser FRIEDRICHS II. (*1194, reg. 1215–1250) dem FIBONACCI genannten LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240) die Gleichung $x^3+2x^2+10x=20$ vor, die auf Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) zurückgeht.

a) LEONARDO zeigte 1225 in seiner *Flos* – »Die Blume« – mach es ihm nach! – :

1) Die Gleichung hat keine natürliche Zahl als Lösung.

2) Die Gleichung hat keine positive rationale Zahl $\frac{m}{n}$ als Lösung ($m, n \in \mathbb{N}$ und teilerfremd).

* CARDANO berichtet am 5. Januar 1540 ganz verzweifelt TARTAGLIA, daß der Teufel DA COI angeblich ein allgemeines Verfahren kenne, mit dem man $\sqrt[3]{\sqrt{108}\pm 10}$ in $\sqrt{3}\pm 1$ umwandeln könne, was ihm nicht gelinge. TARTAGLIA gibt in den *Quesiti* das Verfahren an.

3) Die Gleichung hat keine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl als Lösung. Forme sie zum Nachweis um in $x = \frac{20-2x^2}{10+x^2}$.

b) Zeige, daß im Intervall]1; 2[eine Lösung dieser Gleichung liegt. Bestimme für sie einen Näherungswert x_0 durch lineare Interpolation* und starte damit das Iterationsverfahren $x_{n+1} = \frac{20-2x_n^2}{10+x_n^2}$, $n \in \mathbb{N}_0$ zur Ermittlung einer Näherungslösung auf die 3. Dezimale genau.

c) LEONARDO gab ohne jede Herleitung als Lösung der Gleichung in sexagesimaler Form die Zahl $\xi = 1;22,7,42,33,4,40$ an. Schreibe ξ dezimal.

d) Zeige mit der Vorzeichenregel von DESCARTES, daß die Gleichung genau eine positive Lösung hat.

e) Zeige, daß es keine weitere reelle Lösung gibt, d.h., daß die Formel von CARDANO anwendbar ist. Bestimme die Lösung exakt.

* Man ersetzt das über [1; 2] gelegene Stück des Graphen $y = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ durch eine Gerade, die die x-Achse in $(x_0|0)$ schneidet.