Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

5.1 Definition und Sonderfälle

5 Algebraische Gleichungen

5.1 Definition und Sonderfälle

Der Umgang mit höheren Potenzen führte dazu, daß man sich auch an Gleichungen wagte, in denen die Unbekannte in höheren Potenzen vorkam. Man beschäftigte sich also nicht nur mit linearen und quadratischen Gleichungen, sondern auch mit kubischen Gleichungen, in denen die Unbekannte in dritter Potenz auftritt, und sogar mit Gleichungen noch höheren Grades.
Allgemein legt man fest:

> **Definition 96.1:** Die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heißt **algebraische Gleichung *n*-ten Grades**.
> Ist $a_n = 1$, dann liegt die Gleichung in **Normalform** vor.
> Die Gleichung $x^n + a_0 = 0$ heißt **reine Gleichung *n*-ten Grades**.

In *Algebra 3* haben wir Sonderfälle algebraischer Gleichungen höheren als zweiten Grades bereits kennen- und lösen gelernt. Gewisse kubische, biquadratische und reziproke Gleichungen sogar bis zum Grad 8 wurden dort behandelt. Allerdings konnten wir für Gleichungen mit höherem als zweitem Grad keine allgemeine Lösungsformel angeben. In **3.1** haben wir die Gleichungen $x^n = a, a > 0$, d. h. die reine algebraische Gleichung n-ten Grades $x^n + a_0 = 0$ für $a_0 = -a$ gelöst. Die Lösungsmenge der reinen Gleichung

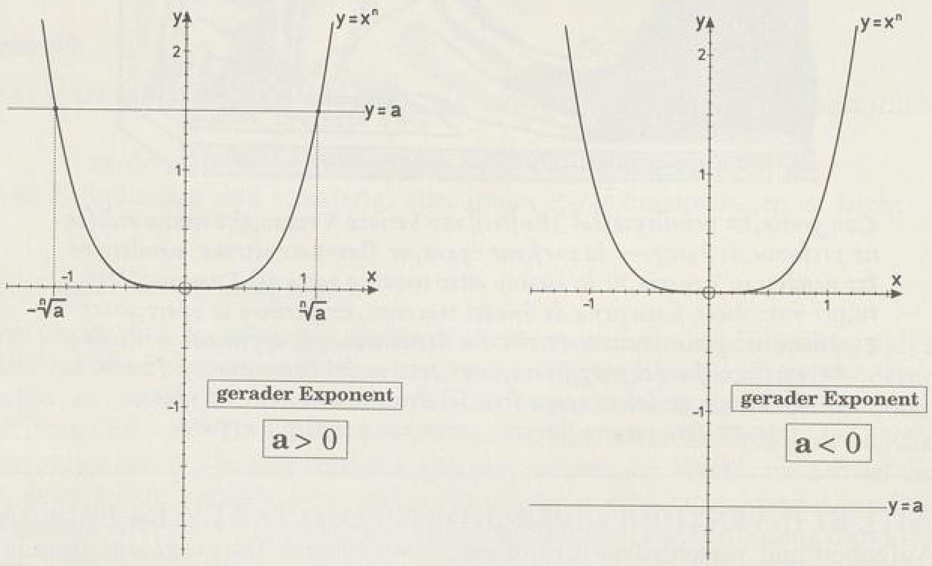

Abb. 96.1 Graphische Lösung der Gleichung $x^n = a$ für gerades n

$x^n = a$, $a \in \mathbb{R}$, hängt von n und dem Vorzeichen von a ab. Graphisch erhält man die Lösungen der Gleichung $x^n = a$, indem man den Graphen der Potenzfunktion $x \mapsto x^n$ mit der zur x-Achse parallelen Geraden $y = a$ zum Schnitt bringt. Aus Abbildung 96.1 lesen wir ab:

Satz 97.1: Ist n gerade, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösungsmenge

$L = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$, falls $a > 0$
$L = \{0\}$, falls $a = 0$
$L = \{\ \}$, falls $a < 0$.

Beispiele:

$x^4 = 16$ hat die Lösungen -2 und 2.
$x^8 = 768$ hat die Lösungen $-2\sqrt[8]{3}$ und $2\sqrt[8]{3}$.
$x^{18} = 0$ hat die Lösung 0.
$x^{56} = -9$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.
$x^6 = a^6$ hat die Lösungen $-a$ und a.
$x^6 = a^{18}$ hat die Lösungen $-a^3$ und a^3.

Für ungerades n lesen wir aus Abbildung 97.1 ab:
Ist $a > 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösung $x = \sqrt[n]{a}$.
Ist $a < 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösung $x = -\sqrt[n]{-a}$.

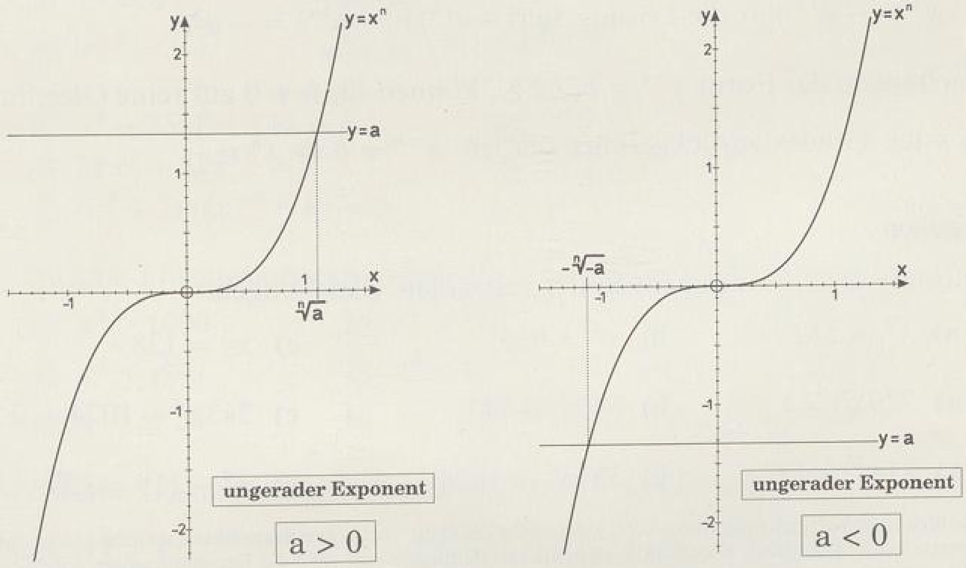

Abb. 97.1 Graphische Lösung der Gleichung $x^n = a$ für ungerades n

Die Fallunterscheidung für a kann man vermeiden, wenn man für das Vorzeichen von a die Abkürzung sgn a, gesprochen »signum von a« einführt.*

Definition 98.1:

$$\operatorname{sgn} a := \begin{cases} +1, \text{ falls } a > 0 \\ 0, \text{ falls } a = 0 \\ -1, \text{ falls } a < 0 \end{cases}$$

Wenn Mißverständnisse zu befürchten sind, setzt man das Argument der Signum-Funktion besser in Klammern. Es könnte nämlich $\operatorname{sgn} x \cdot x$ einerseits $\operatorname{sgn}(x) \cdot x = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$, andererseits aber auch $\operatorname{sgn}(x \cdot x) = \operatorname{sgn}(x^2) = \operatorname{sgn} x^2$ bedeuten.

Unter Verwendung von Definition 98.1 formulieren wir

Satz 98.1: Ist n ungerade, dann hat die Gleichung $x^n = a$ die Lösung $x = \operatorname{sgn}(a)\sqrt[n]{|a|}$.

Beispiele:

$x^5 = 32$ hat die Lösung 2.

$x^5 = -1024$ hat die Lösung -4.

$x^9 = 27$ hat die Lösung $\sqrt[9]{27} = \sqrt[3]{3}$.

$x^9 = -27$ hat die Lösung $-\sqrt[9]{27} = -\sqrt[3]{3}$.

$x^7 = a^7$ hat die Lösung $\operatorname{sgn}(a^7)\sqrt[7]{|a^7|} = (\operatorname{sgn} a)^7\sqrt[7]{|a|^7} = |a| \operatorname{sgn} a = a$.

$x^7 = -a^{14}$ hat die Lösung $\operatorname{sgn}(-a^{14})\sqrt[7]{|-a^{14}|} = -a^2$.

Gleichungen der Form $x^{-n} = b$, $n \in \mathbb{N}$, können für $b \neq 0$ auf reine Gleichungen n-ten Grades zurückgeführt werden: $x^{-n} = b \Leftrightarrow x^n = \dfrac{1}{b}$.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

1. a) $x^3 = 512$ **b)** $x^4 = 625$ **c)** $x^7 = 128$

2. a) $729x^6 = 1$ **b)** $64x^3 = 343$ **c)** $243x^5 - 1024 = 0$

3. a) $81x^2 = 27$ **b)** $32x^{10} = 1024$ **c)** $x^9 - 119 = 139 - x^9$

* Die Idee einer Vorzeichenfunktion, d. h., jeder reellen Zahl ihr Vorzeichen zuzuordnen, stammt von Leopold Kronecker (1823–1891), der sie 1878 erstmals veröffentlichte und 1884 die Bezeichnung sgn.a einführte. Verbreitung fand das Symbol sgn dadurch, daß Giuseppe Peano (1858–1932) es 1898 in sein *Formulaire de mathématiques*, II-§2 aufnahm.

4. a) $x^3 = -1$ **b)** $9x^6 + 1 = 0$ **c)** $5x^7 + 640 = 0$

5. a) $365x^4 + 12 = 85$ **b)** $19x^6 - 295 = 25 - x^6$
c) $800x^6 + 7 = 71(1 + x^6)$ **d)** $5(x^5 + 28) = 2(x^5 - 26)$

6. a) $x^{-4} = 16$ **b)** $x^{-1} = \frac{2}{3}$ **c)** $x^{-5} = -0{,}03125$

7. a) $\frac{1}{5}x^{-2} = \frac{0{,}2}{x^2}$ **b)** $4x^{-3} - 14 = (2x^3)^{-1} + 14$ **c)** $4x^6 - 20 = -\frac{1}{x^{-6}}$

8. a) $|x|^3 = 1$ **b)** $5\sqrt{x^6} = 0{,}04$ **c)** $\sqrt{x^{10}} + 62 = \left(2\sqrt[6]{x^6}\right)^5$

:9. Löse graphisch und durch Rechnung die folgenden Gleichungssysteme:

a) I $x^2 = a$, II $x^3 = a$ **b)** I $x^2 = a$, II $x^4 = a$ **c)** I $x^3 = a$, II $x^7 = a$ **d)** I $x = a$, II $x^3 = a$

:10. Für welche Werte von a haben folgende Gleichungen eine gemeinsame Lösung? Untersuche jeweils, wie viele gemeinsame Lösungen vorhanden sind. ($m, n \in \mathbb{N}$)

a) $x^n = a$ und $x^{n+1} = a$ **b)** $x^n = a$ und $x^{n+2} = a$
c) $x^n = a$ und $x^{n+m} = a$.

11. Ist die Aussage »Die Gleichung $x^n = a$ hat $\sqrt[n]{a}$ als Lösung« richtig?

•12. Bestimme die Lösungsmengen ggf. mit Fallunterscheidungen.

a) $x^2 = a^2$ **b)** $x^3 = a^3$ **c)** $x^4 = a^{-2}$
d) $x^6 = a^3$ **e)** $x^9 = a^3$ **f)** $x^{-4} = a^6$
g) $x^{-5} = \sqrt[3]{a^5}$ **•h)** $a \cdot x^0 - \sqrt{a^3} = 0$ **•i)** $a^3 \cdot x^{-21} = \sqrt[3]{a^2}$

13. a) $x^8 - 25x^4 + 144 = 0$ **b)** $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
c) $31x^5 + 32x^{10} = 1$ **d)** $x^7 + 27x^4 = 0$
e) $(x^3 + 7) \cdot (x^{-6} - 8) = 0$ **f)** $x^4 + 2 = 3x^{-4}$

14. Welche Lösungsmengen haben die folgenden Ungleichungen?

a) $x^3 > 1000$ **b)** $x^4 \geqq 16$ **c)** $x^6 < 27$
d) $x^5 < \frac{243}{1024}$ **e)** $x^0 \leqq 0$ **•f)** $x^{-3} \geqq -2$
g) $x^{-8} \leqq 25$ **h)** $-7 < x^5 < 11$ **i)** $1 \leqq x^2 < 20$

15. Welche Lösungsmengen haben folgende Ungleichungen?

a) $x^{\frac{2}{3}} \geqq \frac{2}{3}$ **b)** $x^{0,2} < 3$ **c)** $x^{\frac{3}{4}} \geqq \sqrt{2\sqrt{2}}$
d) $1 \leqq x^{\frac{4}{3}} < 4$ **e)** $x^{\frac{1}{3}} > -1$ **f)** $-3 \leqq x^{0,17} < -2$

16. Zur sgn-Funktion

a) Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Beweise durch Fallunterscheidung:

1) $x \operatorname{sgn} x = |x|$ **2)** $|x| \operatorname{sgn} x = x$

3) $\operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn}(x \cdot y)$ **4)** $\dfrac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn} y} = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

5) $\operatorname{sgn}(x^n) = (\operatorname{sgn} x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ **6)** $\dfrac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x$ für $x \neq 0$

17. a) Gib mit Hilfe der Betrags- und der Signum-Funktion den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion von $f\colon x \mapsto x^3$, $D_f = \mathbb{R}$ an.

b) Löse **a)** für $f\colon x \mapsto x^{2z+1}$, $z \in \mathbb{Z}$ und D_f maximal. Gib $D_{f^{-1}}$ an.

5.2 Näherungslösungen

Gleichungen höheren als zweiten Grades können wir nur in Sonderfällen exakt lösen. In allen anderen Fällen müssen wir uns mit Näherungswerten für die exakten Lösungen begnügen. Dazu fassen wir das Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ als Aufgabe auf, die Nullstellen der Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ zu bestimmen. Mit Hilfe einer Wertetabelle läßt sich der zugehörige Graph $y = f(x)$ zeichnen, aus dem man Näherungslösungen ablesen kann.

Beispiel: $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-19	-3	1	-1	-3	1	17

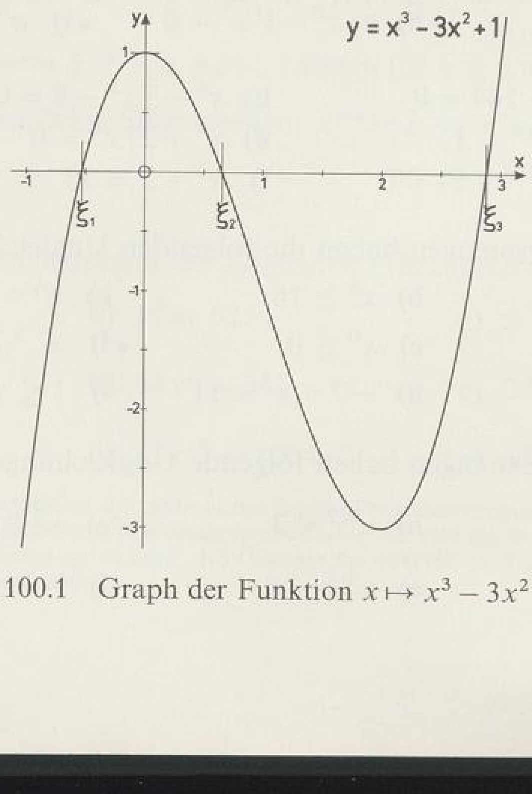

Abb. 100.1 Graph der Funktion $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$